Tema 1 - Introducció a la gestió de la cadena de subministrament

En aquest primer tema veurem alguns conceptes bàsics associats a la cadena de subministrament, la idea d'optimització de la cadena de subministrament i els tipus de decisions que podem prendre per a gestionar-la. Estudiarem alguns problemes bàsics que apareixen en l'optimització de la cadena i que, en alguns casos, seran necessaris també per a resoldre problemes més complexos en temes posteriors.

Conceptes bàsics

Cadena de subministrament

Una cadena de subministrament està formada per totes aquelles parts involucrades de manera directa o indirecta en la satisfacció d'una sol·licitud d'un client. La cadena de subministrament inclou no solament el fabricant i el proveïdor, sinó també els transportistes, magatzemistes, venedors al detall i fins i tot els mateixos clients. (Chopra i Meindl, 2015)

Una cadena de subministrament és una xarxa d'infraestructures i opcions de distribució que fa les funcions de subministrament de materials, transformació d'aquests materials en productes intermedis i finals, i la distribució d'aquests productes finals als clients. (Ganeshan i Harrison, 1995)

Gestió de la cadena de subministrament

La gestió de la cadena de subministrament és la coordinació de **producció, inventari, localització i transport** entre els participants d'una cadena de subministrament per a aconseguir la millor mescla de capacitat de resposta i eficiència per al mercat que se serveix. (Hugos, 2018)

Tenim, doncs, quatre àmbits principals en els quals podem incidir per a la gestió i optimització de la cadena de subministrament:

1. Producció: Quins productes produir? En quina quantitat? Quan?
2. Inventari: Quines quantitats hem d'emmagatzemar de matèria primera, producte semiacabat o producte final? Quant i quan hem de reproveir-nos?
3. Localització: On cal localitzar les instal·lacions (magatzems, plantes de fabricació, centres de distribució…)? Cal construir instal·lacions noves o millorar les existents?
4. Transport: Com cal moure les mercaderies d'un punt a un altre? Quins tipus de mitjans de transport convé utilitzar? Quina ruta han de seguir els vehicles de transport?

Existeixen altres aspectes que poden influir en la gestió de la cadena de subministrament, com la gestió de la informació (quina informació recopilar, com tractar-la, com compartir-la entre els diferents actors de la cadena de subministrament), màrqueting, finances…, però no es tractaran en aquesta assignatura.

Pot haver-hi múltiples objectius a l'hora de gestionar una cadena de subministrament, però el més habitual és maximitzar el valor total generat per la cadena, és a dir, la diferència entre el que val el producte final per al client i els costos en què s'incorre per a complir amb la petició d'aquest. Es coneix com a *rendibilitat de la cadena de subministrament* la diferència entre els ingressos generats pel client final i el cost total de la cadena. És important assenyalar que aquest concepte de rendibilitat és global, i aquest guany estarà repartit entre les diferents etapes i intermediaris de la cadena. Gestionar la cadena de subministrament de manera global permetrà obtenir una major rendibilitat global que optimitzant cadascun dels processos que intervenen de manera individual. No obstant això, no sempre serà possible aconseguir aquesta gestió global.

Tipus de decisions en la gestió de la cadena de subministrament

Per a gestionar la cadena de subministraments haurem de prendre decisions que podem classificar en tres àmbits en funció de la freqüència amb què es prenen i l'horitzó temporal sobre el qual tenen efecte:

Àmbit estratègic

Les decisions d'àmbit estratègic es prenen amb poca freqüència, solen tenir conseqüències a llarg termini (anys) i modificar-les *a posteriori* sol ser costós. Són decisions que comporten grans inversions de diners. Parlem, per exemple, de la construcció de noves infraestructures o inversió en noves línies de transport.

Àmbit tàctic

Aquest tipus de decisions són més freqüents que les d'àmbit estratègic, i poden repetir-se o modificar-se en períodes de temps no gaire llargs (mesos). Són decisions costoses, però no tant com les d'àmbit estratègic. Poden incloure decisions com subcontractació de determinats serveis, planificació de la producció…

Àmbit operatiu

Aquest últim àmbit de decisions correspon a aquelles que es prenen de manera diària o setmanal. Inclouen, entre altres, les relacionades amb la distribució dels productes, ordres de proveïment…

En aquesta assignatura veurem com prendre decisions per a optimitzar cadascun dels elements de la cadena de subministrament emprant per a això eines matemàtiques.

En aquest primer tema, veurem alguns problemes bàsics de planificació, així com problemes generals que seran d'ajuda en temes posteriors.

Problema d'emparellament perfecte de cost mínim en un graf

Donat un graf $G = (V, E)$ (vegeu repàs al final del tema) on V és un conjunt de vèrtexs i *E* és un conjunt d'arestes, i cada aresta $(i, j) \in E$ té associat un cost d'emparellament c_{ij}, el problema de l'emparellament perfecte de cost mínim en G, o *minimum-cost perfect matching*, consisteix a emparellar tots els vèrtexs de V, de manera que el cost total de l'emparellament siga mínim.

Per a formular-lo, empràrem les variables següents:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si s'emparellen els vèrtexs } i \text{ i } j \\ 0 \text{ si no} \end{cases}$$

La formulació serà:

$$Min \qquad \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij}$$

$$s.a: \qquad \sum_{(i,j)\in\delta(i)} x_{ij} = 1 \qquad \forall i \in V \qquad (1)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall (i,j) \in E \qquad (2)$$

on $\delta(i)$ és el que anomenem la *tall* del vèrtex *i*, és a dir, totes les arestes incidents amb el vèrtex *i*.

Exemple

Donat el graf següent, troba l'emparellament perfecte de cost mínim.

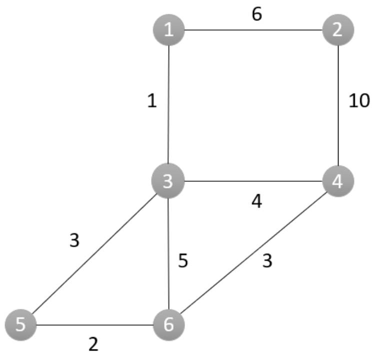


Figura 1: Graf per a l'emparellament perfecte

El model resolt pot trobar-se al fitxer *Tema 1 – emparellament.xlsx*, i la solució pot observar-se a la figura 2.

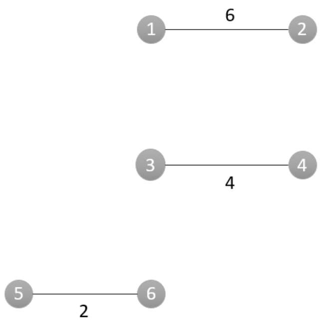


Figura 2: Solució òptima de l'emparellament

Existeixen algorismes capaços de resoldre aquest problema en temps polinòmic, però, donada la seua complexitat, no els estudiarem ací.

Problema d'assignació generalitzada

El problema d'assignació generalitzada (*Generalized Assignment Problem*, GAP) és similar al clàssic problema d'assignació. Tenim un conjunt de tasques i màquines. Cada màquina té una determinada capacitat i cada tasca consumeix un total d'unitats d'aquesta capacitat quan és assignada a la màquina. A més, assignar la tasca a la màquina comporta un cost (cost d'assignació). L'objectiu és assignar cada tasca a una màquina sense que s'excedisca la capacitat de les màquines i minimitzant el cost total de l'assignació.

Tenim n tasques (índex i) i m màquines (índex j). Donada una tasca i i una màquina j, c_{ij} representa el cost d'assignar la tasca i a la màquina j, b_j és la capacitat de la màquina j, i a_{ij} és la quantitat de capacitat de la màquina j consumida per la tasca i si aquesta és assignada.

Podem formular aquest problema usant les variables

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si s'assigna la tasca } i \text{ a la màquina } j \\ 0 \text{ si no} \end{cases}$$

D'aquesta manera, la formulació serà

$$Min \qquad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{array}{llll} s.a: & \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \leq b_j & j = 1, \ldots, m & (1) \\ & \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 & i = 1, \ldots, n & (2) \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} & i = 1, \ldots, n \;\; j = 1, \ldots, m & (3) \end{array}$$

La funció objectiu minimitza els costos totals. Les restriccions (1) garanteixen que no se sobrepasse la capacitat de les màquines, mentre que les restriccions (2) obliguen al fet que totes les tasques siguen assignades a una màquina.

Exemple

Suposem que tenim tres màquines per a les quals disposem de 100, 120 i 150 hores de treball, respectivament, i 12 tasques. La taula 4 mostra el cost de fer cada tasca en cadascuna de les màquines, mentre que la taula 5 proporciona les hores que necessita cada tasca per a ser completada en cadascuna de les màquines. L'objectiu és assignar cada tasca a una màquina sense sobrepassar el nombre d'hores disponible de cadascuna i minimitzant el cost total d'assignació. Aquest problema pot trobar-se resolt en el fitxer Tema 1 – GAP.xlsx.

Tasca	Màquina 1	Màquina 2	Màquina 3
1	14	14	16
2	20	21	19
3	18	19	20
4	15	15	15
5	20	18	22

6	24	22	20
7	20	22	24
8	50	55	60
9	3	5	4
10	14	10	15
11	22	22	22
12	23	34	21

Taula 1: Costos d'assignació

Tasca	Màquina 1	Màquina 2	Màquina 3
1	25	30	30
2	20	23	25
3	28	28	30
4	35	35	35
5	33	36	38
6	20	20	20
7	20	21	22
8	41	44	45
9	37	45	50
10	20	25	25
11	10	11	12
12	36	36	40

Taula 2: Hores d'execució

Problema d'empaquetament

El problema d'empaquetament (*Bin Packing Problem*) sorgeix quan tenim una sèrie d'objectes (per exemple, palets) amb un determinat pes o volum, que hem de col·locar dins d'una sèrie de contenidors (o vehicles) idèntics de capacitat limitada. L'objectiu és determinar el nombre mínim de contenidors que són necessaris per a poder carregar tots els objectes. Es tracta d'un problema similar al problema de la motxilla múltiple, però en aquest cas, no volem maximitzar la utilitat dels objectes seleccionats, sinó seleccionar-los tots i minimitzar el nombre de contenidors usats.

Podria pensar-se que aquest problema es pot resoldre trivialment calculant el pes total de tots els objectes i dividint-lo per la capacitat dels contenidors, però no és així. Suposem, per exemple, que tenim contenidors de capacitat 10 i hi hem de col·locar tres objectes de pes 6 cadascun. El pes total dels objectes és 18, que, dividit per la capacitat dels contenidors, 10, ens dona 1,8, per la qual cosa sembla que seria suficient amb 2 contenidors. No obstant això, és obvi que no hi ha manera de col·locar els objectes en només dos contenidors, ja que no ens caben dos objectes en un mateix contenidor. Per tant, realment necessitarem tres contenidors.

Suposem que tenim un conjunt de n objectes, cadascun amb un pes $w_i, i = 1, \dots, n$. Per una altra banda, tenim m contenidors, tots amb capacitat c, que representa el pes total que s'hi pot carregar. Podem suposar que n'hi ha prou contenidors per a carregar tots els objectes. El problema d'empaquetament consisteix a trobar el nombre mínim de contenidors necessaris per a carregar tots els objectes i determinar quins objectes s'han de carregar en cada contenidor sense sobrepassar la capacitat de cap d'aquests. Per tal de resoldre aquest problema, plantejarem un model de programació lineal entera definint les variables següents:

$$y_j = \begin{cases} 1 \text{ si s'utilitza el contenidor } j \\ 0 \text{ si no} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si s'assigna l'objecte } i \text{ al contenidor } j \\ 0 \text{ si no} \end{cases}$$

El model que hem de resoldre és el següent:

$$\begin{array}{llll} Min & \sum_{j=1}^{m} y_j & & \\ s.a: & \sum_{i=1}^{n} w_i x_{ij} \leq c y_j & j = 1, \ldots, m & (1) \\ & \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 & i = 1, \ldots, n & (2) \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} & i = 1, \ldots, n \quad j = 1, \ldots, m & (3) \\ & y_j \in \{0, 1\} & j = 1, \ldots, m & (4) \end{array}$$

La funció objectiu minimitza el nombre total de contenidors utilitzats. Les restriccions (1) garanteixen que no se sobrepassarà la capacitat dels contenidors (i que no se li assignarà un objecte a un contenidor que no s'utilitza), mentre que les restriccions (2) asseguren que tots els objectes seran assignats a un contenidor. Aquest model podria ser fàcilment adaptat en cas que tinguérem contenidors de diverses capacitats diferents.

Es tracta d'un problema que apareix en la cadena de subministrament quan hem de carregar vehicles amb mercaderia per a distribuir-la als clients o a altres plantes o magatzems. Més endavant, en el tema 4 sobre problemes de rutes de vehicles, tornarà a aparèixer aquest problema com a component de problemes més complexos. Existeixen versions més sofisticades del problema, considerant, per exemple, dues o tres dimensions dels objectes (ample, llarg, alt), però són molt més complexes i no les estudiarem en aquesta assignatura.

Exemple

Suposem que tenim 9 objectes, els pesos dels quals poden observar-se en la taula 3, i els nostres contenidors tenen capacitat 4. Per a assegurar-nos que podem carregar tots els objectes, suposarem que hi ha 9 contenidors.

Objecte	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Pes	2	1	2	1	1	2	3	2	1

Tabla 3: Pesos dels objectes

El model resolt amb el Solver d'Excel es troba en el fitxer *Tema 1 – Bin Packing.xlsx*. Hi podem veure que la solució òptima consisteix a utilitzar quatre contenidors. El primer carregarà l'objecte 7, el segon els objectes 4, 5 i 8, el tercer els objectes 3 i 6, i el quart els objectes 1, 2 i 9.

Problema del camí més curt

Donat un graf $G = (V, E)$, on *V* és un conjunt de vèrtexs i *E* és un conjunt d'arestes, i cada aresta $e \in E$ porta associat un pes w_e, el problema del camí més curt (CMM) entre dos vèrtexs $s, t \in V$

consisteix a trobar un camí en el graf unint tots dos vèrtexs de manera que la suma dels pesos de les arestes que formen part del camí siga mínima.

Resoldre aquest problema té utilitats òbvies en la vida real i, en particular, en l'optimització de la cadena de subministrament, ja que ens permet calcular el trajecte més curt (en termes de temps, distància, consum d'energia o qualsevol altre criteri que definim) entre dos llocs. És, a més, indispensable per a poder processar les dades abans de plantejar la resolució de problemes més complexos de disseny de rutes (temes 4 i 5) o localització (tema 3).

Formulació del problema del CMM com un problema de programació lineal

El CMM es pot plantejar mitjançant un model de programació lineal. Per a això, per a cada aresta $e = (i, j) \in E$, definim les variables

$$x_{ij} = \text{nombre de voltes que l'aresta } (i, j) \text{ és travessada de } i \text{ a } j$$

$$x_{ji} = \text{nombre de voltes que l'aresta } (i, j) \text{ és travessada de } j \text{ a } i$$

El model que hem de resoldre és:

$$Min \quad \sum_{e=(i,j)\in E} w_e(x_{ij} + x_{ji})$$

$$
\begin{aligned}
s.a: \quad & \sum_{(i,j)\in\delta(i)} x_{ij} - \sum_{(i,j)\in\delta(i)} x_{ji} = 0 \qquad \forall i \in V \setminus \{s,t\} && (1)\\
& \sum_{(s,j)\in\delta(s)} x_{ij} - \sum_{(s,j)\in\delta(s)} x_{ji} = 1 && (2)\\
& \sum_{(t,j)\in\delta(t)} x_{ij} - \sum_{(t,j)\in\delta(t)} x_{ji} = -1 && (3)\\
& x_{ij} \geq 0 \qquad \forall (i, j) \in E && (4)
\end{aligned}
$$

on $\delta(i)$ és el que denominem la *tall* del vèrtex *i*, és a dir, totes les arestes incidents amb el vèrtex *i*. La restricció (1) indica que el nombre de voltes que el camí ix d'un vèrtex ha de ser igual que el nombre de voltes que hi entra (excepte per als vèrtexs *s* i *t*). L'equació (2) diu que el nombre de voltes que s'ix de *s* és una més que el nombre de voltes que s'hi entra (perquè és el principi del camí), mentre que la (3) indica que el nombre de voltes que s'entra en el vèrtex *t* és una més que el nombre de voltes que se n'ix (perquè és el final del camí).

Encara que no és un model excessivament complex, habitualment no s'utilitza per a resoldre el problema del camí més curt, ja que existeixen algorismes més eficients, com l'algorisme de Dijkstra.

Algorisme de Dijkstra

L'algorisme de Dijkstra és un mètode que permet calcular el camí més curt des d'un vèrtex donat a la resta de vèrtexs del graf. Si volguérem calcular els camins més curts entre cada parell de vèrtexs d'un graf, hauríem d'aplicar Dijkstra |*V*| vegades (una per a cada vèrtex), mentre que, usant el model vist anteriorment, hauríem de resoldre'l |*V*|x|*V*| vegades. L'algorisme de Dijkstra per a calcular els camins més curts des d'un vèrtex *v* consta dels passos següents:

1. Inicialitzar un conjunt de vèrtexs $A = \{v\}$ i, a cada vèrtex $u \in V \setminus \{v\}$, assignar-li l'etiqueta $l_u = \infty$, mentre que $l_v = 0$.
2. Per a cada vèrtex u adjacent a v que no haja sigut estudiat encara:
   2.1 Si $l_v + w_{vu} < l_u$, actualitzar l'etiqueta $l_u = l_v + w_{vu}$, i guardar $pre(u) = v$.
   2.2 Si $u \notin A$, afegir el vèrtex u al conjunt A.
3. Eliminar el vèrtex v d' A i marcar-lo com a estudiat.
4. Si $A \neq \emptyset$, seleccionar el vèrtex en A amb menor valor de la seua etiqueta l_u i procedir a partir del punt 2 amb aquest vèrtex.

L'algorisme finalitza quan el conjunt A queda buit, i les etiquetes l_u proporcionen la longitud del camí més curt des del vèrtex inicial v. El valor guardat en $pre(u)$ indica el vèrtex predecessor a u en el camí des de v. Per tant, si volem conèixer quin és el camí més curt des del vèrtex v al vèrtex u, emprant les etiquetes $pre(u)$ de manera successiva obtindrem la seqüència de vèrtexs del camí en sentit invers.

Exemple

Donat el graf de la figura 3, on els valors al costat de les arestes són els costos/pesos d'aquestes, calcularem el camí més curt des del vèrtex 1 al vèrtex 6. El fitxer *Tema 1 - CMC.xlsx* conté el model de programació lineal resolt per a trobar el camí més curt. En la figura 4 podem veure els passos de l'algorisme de Dijkstra. El camí més curt del vèrtex 1 al vèrtex 6, per tant, és la seqüència 1-4-3-6, que té cost 4.

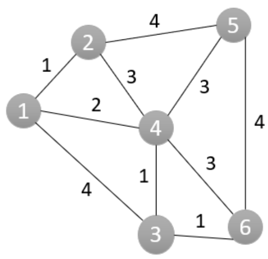
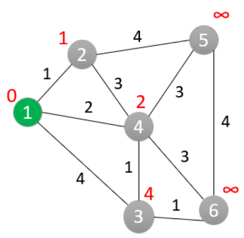
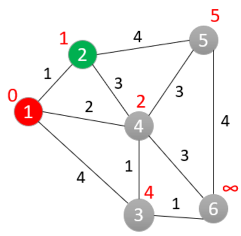


Figura 3: Graf exemple



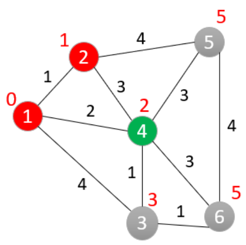
A={2,4,3}

u	1	2	3	4	5	6
pre(u)	-	1	1	1	-	-



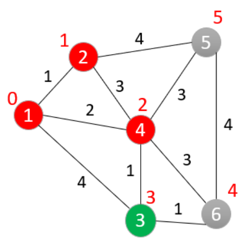
A={4,3,5}

u	1	2	3	4	5	6
pre(u)	-	1	1	1	2	-



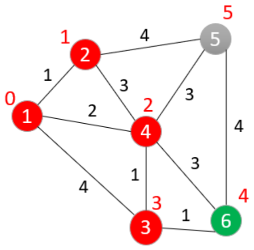
A={3,5,6}

u	1	2	3	4	5	6
pre(u)	-	1	4	1	2	4



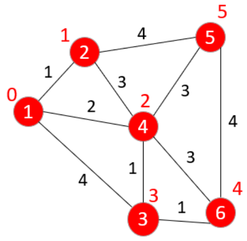
A={6,5}

u	1	2	3	4	5	6
pre(u)	-	1	4	1	2	3



A={5}

u	1	2	3	4	5	6
pre(u)	-	1	4	1	2	3



A={}

u	1	2	3	4	5	6
pre(u)	-	1	4	1	2	3

Figura 4: Algorisme de Dijkstra

Problema de planificació agregada

El problema de planificació agregada es pot definir de la manera següent: donat el pronòstic de la demanda per a cadascun dels períodes en un determinat horitzó de planificació, determinar els nivells de producció, inventari i capacitat (interna i externa) per a cada període, que maximitzen el benefici de la companyia durant aquest horitzó. (Hugos, 2018)

Aquest tipus de problema considera tots els productes com un únic producte a l'efecte de la planificació, és a dir, pretenem determinar la producció total d'una planta, però no la producció específica de cada tipus de producte, per això el terme *agregada*. Se sol utilitzar per a determinar la producció a mitjà termini (entre 3 i 18 mesos, per exemple), ja que en aquest horitzó encara no se solen tenir dades suficients per a dur a terme una planificació més detallada producte per producte.

En resoldre un problema de planificació agregada, pretenem determinar les incògnites següents:

- *Taxa de producció:* nombre d'unitats de producte que es fabricaran en una determinada unitat de temps (per setmana, per mes…).
- *Força de treball:* nombre de treballadors o unitats de capacitat necessàries per a la producció.
- *Temps extra:* quantitat de temps extra a emprar per a la producció planificada.
- *Nivell de capacitat de màquina:* nombre d'unitats de capacitat de màquina necessàries per a la producció.
- *Subcontractació:* capacitat subcontractada requerida durant l'horitzó de planificació.
- *Backlog*: demanda no satisfeta en el període estudiat i que es transferirà a un període futur.
- *Inventari disponible:* unitats de producte fabricades en el període planificat que es transferirà a un període futur.

No obstant això, no sempre es tenen en compte tots aquests factors. Per exemple, es pot considerar una estratègia de persecució de la demanda, en la qual no s'emmagatzema producte d'un període al següent ni s'admet *backlog*, és a dir, cal produir cada període la quantitat exacta demanada. Una altra estratègia possible consisteix a mantenir una força de treball constant, és a dir, no es permet contractar ni acomiadar treballadors.

Per a resoldre un problema de planificació agregada, hem d'especificar l'horitzó de planificació, que és el temps total per al qual calcularem aquesta planificació (per exemple, 12 mesos). També hem de determinar la duració dels períodes en els quals dividirem aquest horitzó de planificació (per exemple, en períodes d'un mes, de setmanes, de trimestres…). A partir d'ací, necessitem obtenir la informació següent per a poder plantejar el problema de planificació agregada:

- F_t: pronòstic de la demanda per al període t, tenint en compte que hi ha un total de T períodes en el nostre horitzó temporal.
- c_w: cost de la mà d'obra (hores normals).
- c_o: cost de les hores extres.
- c_c: cost de subcontractació de la producció.
- c_h: cost de contractar un treballador.
- c_l: cost d'acomiadar un treballador.
- c_i: cost de manteniment d'una unitat en l'inventari.
- c_s: cost de desproveïment o *backlog*.
- c_p: cost de produir una unitat.
- k_w: nombre d'unitats produïdes per treballador en un període.
- k_o: nombre d'unitats produïdes per cada hora extra de treball.
- r: nombre màxim d'hores extres que pot fer un treballador en un període de temps.

Qualsevol restricció addicional que hàgem de tenir en compte: límits d'hores extres, acomiadaments, capital disponible, desproveïment, proveïdors…

Variables del model

Per a plantejar el model de programació matemàtica que ens permetrà resoldre el problema de la planificació agregada, necessitarem les variables següents:

- W_t: quantitat de força de treball per al període t (W_0 serà la quantitat de força de treball disponible a l'inici de l'horitzó de planificació)
- H_t: nombre de treballadors contractats a l'inici del període t
- L_t: nombre de treballadors acomiadats a l'inici del període t
- P_t: nombre d'unitats produïdes en el període t
- I_t: inventari al final del període t
- S_t: *backlog* al final del període t
- C_t: nombre d'unitats subcontractades en el període t
- O_t: nombre d'hores extres treballades en el període t

El model de programació matemàtica per al problema de planificació agregada, seria:

$$Min \quad \sum_{i=1}^{T} \left(c_w W_t + c_O O_t + c_h H_t + c_l L_t + c_s S_t + c_p P_t + c_c C_t \right)$$

$$\begin{array}{lrll} s.a: & W_t = W_{t-1} + H_t - L_t & t = 1, \dots T & (1) \\ & P_t \leq k_w W_t + k_O O_t & t = 1, \dots, T & (2) \\ & I_{t-1} + P_t + C_t = F_t + S_{t-1} + I_t - S_t & t = 1, \dots, T & (3) \\ & O_t \leq r W_t & t = 1, \dots, T & (4) \\ & W_t, O_t, H_t, L_t, I_t, S_t, P_t, C_t \geq 0 \quad \text{enteres} & t = 1, \dots, T & (5) \end{array}$$

L'objectiu del model és minimitzar la suma de tots els costos. La primera restricció permet calcular la quantitat de força disponible en el període t com la quantitat del període anterior més els treballadors contractats menys els acomiadats. La restricció (3) indica que el nombre

d'unitats produïdes en un període no pot ser major que la capacitat de producció, calculada com el nombre d'unitats que es poden produir per treballador multiplicades pel nombre de treballadors més el nombre d'unitats per hora extra multiplicades pel nombre d'hores extres. En l'equació (4), la part de l'esquerra representa les unitats de producte disponibles en el període t (calculades com la suma de les unitats en inventari al final del període anterior, les produïdes en el període actual i les produïdes mitjançant subcontractació) amb les unitats de producte que "s'utilitzen" en aquest període (la suma de la demanda que cal satisfer, el *backlog* pendent del període anterior i les unitats que es quedaren en inventari per al període següent menys les unitats que es queden sense servir de la demanda del període actual, és a dir, el *backlog* d'aquest període). Les desigualtats (4) limiten el nombre d'hores extres que es poden contractar en un període de temps, tenint en compte que cada treballador pot fer un màxim de r hores.
A vegades, el model pot ser més simple (com en els casos de les estratègies de persecució de la demanda o de força de treball constant comentades anteriorment). En aquest cas, algunes de les variables o restriccions poden no ser necessàries.

Exemple (Hugos, 2018)

La demanda de les eines de jardineria de Red Tomato per part dels consumidors és altament estacional; té el pic a la primavera, quan la gent arregla el jardí. Aquesta demanda estacional afecta la cadena de subministrament, des del detallista fins a Red Tomato, el fabricant. Red Tomato ha decidit utilitzar la planificació agregada per a superar l'obstacle de la demanda estacional i maximitzar el benefici. Les opcions que té per a manejar l'estacionalitat són contractar treballadors durant la temporada pic, subcontractar part del treball, acumular inventari durant els mesos lents, o acumular un *backlog* de comandes que seran entregades tard als clients. Per a determinar com utilitzar millor aquestes opcions per mitjà d'un pla agregat, el vicepresident de la cadena de subministrament comença la primera tasca, que és construir un pronòstic de la demanda. Encara que Red Tomato podria tractar de pronosticar aquesta demanda per si mateixa, un procés col·laboratiu emprat tant per Red Tomato com pels seus detallistes permet produir un pronòstic més precís mostrat en la taula 1. Red Tomato ven cadascuna de les eines als detallistes per 40 dòlars. La companyia té un inventari inicial al gener de 1000 eines. Al principi de gener la companyia té una força de treball de 80 empleats. La planta té un total de 20 dies hàbils cada mes i cada empleat guanya 4 dòlars per hora en horari normal. Cada empleat treballa vuit hores per dia i la resta són hores extres. La capacitat de producció està determinada principalment pel total d'hores laborables treballades. Per tant, la capacitat de màquina no limita la capacitat de producció. A causa de les lleis laborals, cap empleat pot treballar més de 10 hores extres per mes. Els diversos costos es mostren en la taula 2. En l'actualitat, Red Tomato no té límits en la subcontractació, inventaris i desproveïment/*backlog*. Tots els casos de desproveïment es posen en *backlog* i s'assorteixen amb la producció dels mesos següents. S'incorre en els costos d'inventari al final del mes. La meta del gerent de la cadena és obtenir un pla agregat òptim que permeta a Red Tomato acabar al juny amb almenys 500 unitats (sense desproveïment al final de juny). El pla agregat òptim és el que produeix el major benefici durant l'horitzó de planificació de sis mesos. Ara com ara, donat el desig de Red Tomato d'oferir un molt alt nivell de servei al client, suposem que tota la demanda serà satisfeta, encara que pot satisfer-se tard. Per tant, els ingressos obtinguts durant l'horitzó de planificació són fixos. Com a resultat, minimitzar els costos durant l'horitzó de planificació és equivalent a maximitzar el benefici.

Mes	Pronòstic de la demanda
Gener	1600
Febrer	3000

Març	3200
Abril	3800
Maig	2200
Juny	2200

Taula 4: Pronòstic de la demanda

Article	Cost
Material	10$/unitat
Manteniment de l'inventari	2$/unitat/mes
Backlog	5$/unitat/mes
Contractació d'un treballador	300$
Acomiadament d'un treballador	500$
Mà d'obra (hores normals)	4$/hora
Hores extres	6$/hora
Subcontractació	30$/unitat
Hores de mà d'obra necessàries	4/unitat

Taula 5: Costos

Es pot trobar aquest problema resolt amb el Solver d'Excel en el fitxer *Tema 1 – Redtomato.xlsx*.

Repàs

Què és un graf?

Un graf és una estructura formada per uns punts, anomenats vèrtexs o nodes, i uns enllaços, anomenats arestes o arcs, que uneixen tots o alguns d'aquests punts. Són una forma gràfica i esquemàtica de representar dades en un problema, i són molt habituals en problemes de rutes de vehicles (tema 4), però també apareixen en problemes de disseny de xarxes (tema 5), localització (tema 3)… Els vèrtexs poden representar els llocs on estan o poden estar les plantes, magatzems, clients… o també interseccions de carrers, carreteres… Els enllaços solen representar camins, carrers o carreteres que connecten els punts representats pels vèrtexs. Quan aquests enllaços poden ser recorreguts en tots dos sentits, els anomenem arestes, i les representem mitjançant una línia. Si l'enllaç pot recórrer-se únicament en un sentit (carrers d'una única direcció, per exemple), l'anomenem arc, i es representa mitjançant una línia acabada en una punta de fletxa, que indica la direcció en què pot ser recorreguda.

Si tots els enllaços del graf són arestes, és a dir, poden ser recorreguts en tots dos sentits, diem que es tracta d'un *graf no dirigit*, i el denotem $G = (V, E)$, on *V* és el conjunt de vèrtexs i *E* el conjunt d'arestes. Si tots els enllaços són d'un únic sentit, tenim un *graf dirigit* $G = (V, A)$, on *A* és el conjunt d'arcs. També podem tenir grafs que continguen els dos tipus d'enllaç, anomenats *grafs mixtos*, i representats com a $G = (V, E \cup A)$.

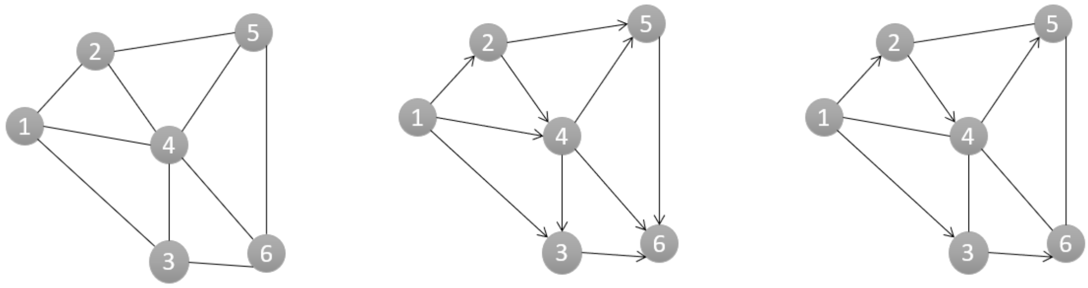


Figura 5: Exemple de graf no dirigit, dirigit i mixt

Un graf no dirigit es diu que és *complet* si existeixen totes les possibles arestes entre tots els parells de vèrtexs. Direm que un graf no dirigit és *connex* si, donat qualsevol parell de vèrtexs del graf, existeix un camí d'arestes que connecta tots dos vèrtexs.

Bibliografia

Chopra, S. i Meindl, P. (2013). *Administración de la cadena de suministro: estrategia, planificación y operación.* 5a ed. Pearson Educación de México.

Ganeshan, R. i Harrison, T. P. (1995). *An Introduction to Supply Chain Management.* Department of Management Sciences and Information Systems, 303. https://ram-ganeshan.squarespace.com/s/an-introduction-to-supply-chain-management.pdf

Hugos, M. (2018). *Essentials of Supply Chain Management. In Essentials of Supply Chain Management*. 4a ed. John Wiley & Sons, Incorporated.

Tema 2 - Gestió d'inventaris

L'inventari o estoc fa referència a una quantitat de mercaderies que es tenen en depòsit, generalment amb l'objectiu de satisfer una demanda. Mantenir un nivell d'estoc massa elevat pot comportar uns costos d'emmagatzematge massa alts (a causa del cost de l'espai d'emmagatzematge, pèrdues per caducitat dels productes…), mentre que un estoc massa baix pot fer que no siguem capaços de satisfer la demanda quan s'hi produeixen pics inesperats (ruptura d'estoc). És per això que es fa necessària una gestió eficient de l'inventari. En aquest tema veurem diferents estratègies de gestió d'estocs.

Tipus d'estoc

És important tenir present que una empresa pot tenir estoc de productes que compleixen funcions diferents dins dels processos de producció. Una empresa productora té generalment tres tipus de productes en estoc: matèries primeres que utilitza per a la fabricació dels seus productes, productes o parts de producte que formen part d'un procés de producció (producte no acabat) i producte acabat que està llest per a ser distribuït als clients. En canvi, un distribuïdor només tindrà un únic tipus d'estoc, el producte que compren als fabricants i després venen als clients. També podem tenir estoc d'altres tipus de productes, com peces de recanvi, material d'oficina…

A més d'aquesta distinció d'estocs segons el tipus de producte que s'emmagatzema, també podem categoritzar diferents tipus d'estoc segons la seua funció dins de l'empresa. Alguns dels tipus d'estoc més rellevants són:

- Estoc de cicle: és aquell que resulta d'aplicar les diferents polítiques de comanda. Ve determinat per la freqüència de comandes i la quantitat que es demana.
- Estoc de seguretat: és el que es manté com a protecció contra la incertesa de la demanda. Mantenir un estoc de seguretat adequat ens protegirà davant de possibles pics de demanda. Un estoc de seguretat massa gran comportarà costos de emmagatzematge alts, i un massa baix pot no ser suficient.
- Estoc d'anticipació: és el que s'acumula com a anticipació a una necessitat o per a aconseguir avantatges en el mercat.
- Estoc en trànsit: les empreses fan comandes de material als seus proveïdors periòdicament, però aquests materials no es reben de manera instantània, sinó que hi ha un retard des del llançament de l'ordre de comanda fins a la recepció d'aquesta. L'estoc de productes que ja ha sigut sol·licitat i es troba de camí es coneix com a estoc en trànsit. Encara que aquests productes no estiguen encara en el magatzem, es consideren part de l'estoc de l'empresa.
- Estoc de promoció: inventari acumulat per a una acció promocional.

Estoc de cicle

Les empreses no compren tota la matèria primera de colp, ni tampoc d'unitat en unitat, sinó en lots. Per exemple, una empresa que necessite 50000 tones d'acer anuals pot fer comandes en lots de 4000 tones. Quan l'estoc està prop d'esgotar-se, tornarà a fer una nova comanda d'altres 4000 tones, i així successivament. L'estoc de cicle és el resultant de fer les comandes de material en lots. Determinar la grandària òptima dels lots i la freqüència amb què s'han de demanar depèn de diversos factors i seran la clau de la gestió de l'estoc, com veurem més endavant.

Costos associats a l'inventari

Existeixen tres tipus de costos associats al manteniment d'un inventari, són els costos d'*adquisició*, *llançament* i *emmagatzematge*.

El cost d'adquisició és el que ens costa comprar els productes que emmagatzemem. Si D és la demanda total al llarg del nostre horitzó de planificació (per exemple, un any) i C és el cost de comprar una unitat de producte, el cost total d'adquisició al llarg del període de planificació serà $D \cdot C$.

El cost de llançament és el cost fix associat a una comanda de qualsevol quantitat de producte. Aquest cost és independent de la quantitat que demanem, i inclou costos de transport, manipulació... Si C_L és el cost de llançament, és a dir, el que paguem cada vegada que fem una comanda (sense comptar el cost d'adquisició), el cost total de llançament en el nostre horitzó de planificació serà igual al producte de C_L pel nombre total de comandes que fem durant aquest temps.

Finalment, tenim el cost d'emmagatzematge. Mantenir una unitat de producte emmagatzemat té uns costos associats. Aquests costos venen causats per diversos factors: el cost d'oportunitat (l'empresa ha invertit uns diners en aquests productes que podria haver usat per a algun altre tipus d'inversió que li proporcionara rendiment), el cost de mantenir l'espai d'emmagatzematge, el cost derivat de productes que poden caducar, deteriorar-se o quedar obsolets, costos d'assegurances, manteniment... Per a calcular el cost total de manteniment, necessitem saber un dels dos costos següents: el cost d'emmagatzematge per unitat en tot l'horitzó de planificació, que anomenarem h, és a dir, el que ens costa tenir una unitat de producte emmagatzemada durant tot el temps planificat; o el cost d'emmagatzematge per unitat monetària emmagatzemada durant l'horitzó de planificació, que anomenarem k, és a dir, el cost d'emmagatzemar productes per valor d'una unitat monetària (un euro, un dòlar...) durant tot el temps. Així, podrem calcular el cost d'emmagatzematge com el producte de h (o de $k \cdot C$) pel nivell mitjà d'inventari al llarg de tot l'horitzó de planificació.

El cost total d'inventari (CTI) serà la suma d'aquests tres costos:

$$CTI = D \cdot C + C_L \cdot \text{nombre de comandes} + h \cdot \text{nivell mitjà d'inventari}$$

Estratègies de gestió d'inventaris

Hi ha tres factors claus que és necessari determinar per a gestionar l'estoc:

- Amb quina freqüència hem de controlar el nivell d'inventari d'un producte?
- Quan hem de llançar una ordre d'aprovisionament?
- Quant hem de demanar?

A continuació, detallarem les estratègies que poden seguir-se per a contestar cadascuna d'aquestes preguntes.

Freqüència de revisió

Bàsicament, existeixen dues maneres de controlar el nivell d'estoc d'un producte. De manera *contínua*, és a dir, a cada moment es coneix la quantitat exacta de producte disponible, o de manera *discreta*, és a dir, el nivell d'estoc del producte s'actualitza amb una determinada freqüència fixa (una vegada a la setmana, al mes…), però entre dues actualitzacions no es coneix la quantitat exacta disponible.

Freqüència d'aprovisionament - Quan demanar?

Tenim dues opcions quant a com prendre la decisió de quan llançar una ordre d'aprovisionament. La primera consisteix a llançar una comanda en el moment en el qual el nivell d'estoc arribe a un valor predeterminat. És el que es coneix com a *punt de comanda*. Aquest tipus d'estratègia té sentit si tenim una revisió contínua de l'inventari ja que, si no, no podem saber el moment exacte en què s'arriba el punt de comanda. La segona opció consisteix a fer ordres de comanda amb una determinada freqüència, independentment del nivell d'estoc que hi haja a cada moment. Aquesta estratègia és més habitual amb estocs de revisió discreta.

Grandària del lot de comanda - Quant demanar?

La grandària del lot dependrà de diversos factors, com els costos de llançament (cost associat a fer una ordre, independentment de la grandària), d'emmagatzematge… Si la grandària del lot és xicoteta, haurem de demanar amb més freqüència, la qual cosa incrementa el cost total de llançament. A més, correm el risc de patir un ruptura d'estoc si la demanda és major de l'esperat. Mentre que, si demanem més quantitat, s'incrementaran el cost d'inventari. Tenim dues possibles estratègies per a determinar la grandària del lot, calcular la grandària que minimitza els costos totals o fixar un nivell màxim d'inventari i demanar sempre la quantitat necessària per a arribar a aquest nivell.

Les diferents combinacions d'estratègies per a determinar aquests tres factors ens donaran com a resultat l'estratègia global de gestió del nostre inventari. Aquestes estratègies es poden englobar dins de dues possibles categories: **gestió per punt de comanda** i **gestió per aprovisionament periòdic**. Estudiarem amb detall dues de les estratègies més emprades, una de cada tipus:

- Sistema (s, Q): revisió contínua i grandària de lot fixa (gestió per punt de comanda).
- Sistema (T, S): revisió periòdica (discreta) i comanda fins a nivell màxim (gestió per aprovisionament periòdic).

Sistema (s,Q)

En aquest sistema, l'empresa té un control continu del nivell d'inventari del producte. Aquest nivell d'inventari anirà disminuint a mesura que es consumeix el producte (per a servir demanda de clients, com a matèria primera per a la producció d'altres productes…). Quan l'inventari assoleix un determinat nivell s, anomenat *punt de comanda*, automàticament es llança una ordre de reaprovisionament de Q unitats (*grandària del lot*). Cal tenir en compte que aquesta comanda no es rep automàticament, sinó que ha de transcórrer l'anomenat *temps d'aprovisionament* L des que es llança l'ordre fins que es rep el producte. El comportament del nivell d'estoc amb aquest sistema, suposant una demanda i un temps d'aprovisionament constants, pot observar-se en la figura 2.

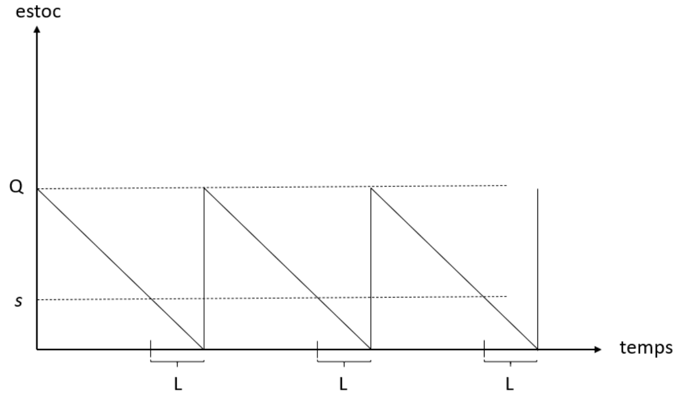


Figura 1: Sistema (s,Q)

Per a aplicar aquest sistema, hem de determinar la grandària del lot Q i el punt de comanda s. Observe's que una grandària de lot gran reduirà el nombre d'ordres que es llançaran en el nostre horitzó de planificació, i farà disminuir els costos de llançament, però augmentarà el nivell mitjà de l'inventari, i incrementarà els costos d'emmagatzematge. Per una altra banda, una grandària del lot baixa contribuirà a reduir el cost d'emmagatzematge, ja que disminueix l'inventari mitjà, però haurem de llançar més ordres d'aprovisionament, amb la qual cosa augmentarà el cost de llançament. Quant al punt de comanda, hem de calcular-lo perquè les comanes arriben justament quan el nostre inventari s'esgota. Si elegim un punt s més elevat, el nivell mitjà d'inventari augmentarà i amb aquest els costos d'emmagatzemament, i si és més baix, es produirà un ruptura d'estoc.

Sistema (T,S)

Aquest sistema s'aplica en inventaris de revisió discreta o periòdica. Cada interval de temps T s'actualitza l'estat de l'inventari del producte i es determina quina grandària de lot Q és necessari demanar perquè l'inventari arribe a un determinat nivell màxim S. La figura 3 il·lustra el comportament de l'estoc per a un sistema (T,S), suposant demanda i temps d'aprovisionament constants.

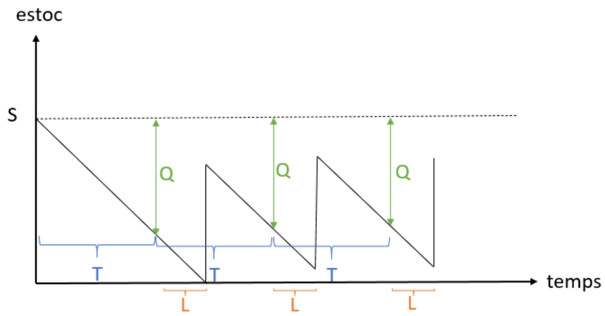


Figura 2: Sistema (T,S)

Un període T curt farà augmentar els costos de llançament i d'emmagatzematge, ja que es faran més comandes i el nivell d'inventari es mantindrà més alt, però un T massa llarg podria causar ruptures d'estoc. Per una altra banda, un nivell màxim molt alt farà augmentar els costos d'emmagatzematge, però, si és massa baix, podrien produir-se ruptures d'estoc.

Models amb demanda determinista

La gestió de l'estoc està íntimament lligada a les demandes, per la qual cosa és imprescindible estudiar-les per a poder gestionar l'estoc de manera eficient. Encara que la demanda futura sempre implica una certa incertesa, en algunes situacions podem assumir que la demanda del producte serà estable i constant al llarg del nostre horitzó de planificació. Pot ser que no ho siga realment, però si les fluctuacions respecte a aquesta mitjana són xicotetes, podem assumir que ho és. A continuació, estudiarem els models que permeten determinar els factors clau del nostre sistema de gestió d'inventari sota la premissa que la demanda és constant i coneguda.

Càlcul del lot econòmic (model EOQ, *Economic Order Quantity*)

Mitjançant el càlcul del lot econòmic intentarem respondre a la pregunta "Quant hem de demanar?". Per als càlculs següents, assumirem el següent:

- Només estudiem l'estoc d'un únic producte que té demanda coneguda i aproximadament constant.
- La política de revisió d'inventari és contínua i emprarem un model (s, Q), és a dir, llançarem una ordre quan el nivell d'inventari baixe del valor s.
- Quan es llança una comanda, aquesta es rep automàticament (no hi ha temps d'aprovisionament) i tota d'una vegada. Això no és realista, però simplifica els càlculs.
- Els costos de llançament, emmagatzematge i el preu del producte són constants.
- Com que l'aprovisionament és automàtic, no es produiran ruptures d'estoc.

Habitualment, cada ordre de compra porta associat un cost de llançament que és independent de la quantitat ordenada. Això vol dir que, com més ordres fem durant l'any, més costos de llançament totals haurem de pagar. Per tant, des del punt de vista dels costos de llançament, l'ideal és fer el menor nombre de comandes possibles (idealment una) i demanar grans quantitats cada vegada. No obstant això, també existeixen els costos d'emmagatzematge de mercaderia. Si comprem tot el producte en una sola ordre, haurem de pagar uns costos d'emmagatzematge elevats, ja que estarem emmagatzemant una quantitat molt gran de producte durant molt de temps. Quina és, llavors, la quantitat ideal de producte (*grandària del lot*) que hem de demanar en cada ordre perquè el cost total (llançament més emmagatzematge) siga mínim?

Com hem vist anteriorment, a l'hora de calcular els costos totals, a més dels costos de llançament i emmagatzematge, hem d'incloure també el cost d'adquisició dels productes. Aquest cost dependrà únicament de la quantitat comprada. Si la demanda total esperada durant tot l'horitzó de planificació és D i el cost unitari del producte és C, el cost total d'adquisició serà $D \cdot C$. Com podem veure, el cost d'adquisició dels productes no depèn de la grandària del lot, sinó que és constant si coneixem la demanda i el cost del producte. Per tant, no podem influir directament sobre aquest i el deixarem fora en el càlcul del cost total de l'inventari.

Si anomenem Q la grandària de cada lot, al llarg de l'horitzó temporal haurem de fer D/Q comandes. Com cada comanda té un cost de llançament C_L, el cost total de llançament serà $\frac{D}{Q}C_L$.

Si la demanda és constant i el temps d'aprovisionament és nul, podem suposar que llançarem l'ordre de comanda quan s'acabe l'estoc del producte, moment en el qual es rebran les Q unitats del lot, com es representa en la figura 3. Llavors, el nivell d'estoc mitjà serà $Q/2$.

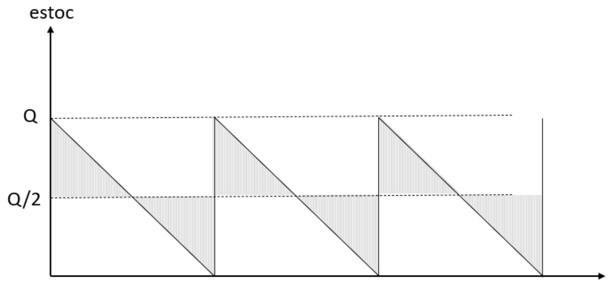


Figura 3: Estoc mitjà

El cost d'emmagatzematge pot expressar-se en funció de les unitats de producte emmagatzemades o del valor econòmic d'aquestes unitats. Si anomenem h el cost d'emmagatzemar una unitat durant tot l'horitzó temporal i k el cost d'emmagatzemar una unitat econòmica (euros, per exemple), el cost d'emmagatzematge durant l'horitzó de càlcul serà

$$h \cdot \frac{Q}{2} = k \cdot C \cdot \frac{Q}{2}$$

Podem expressar, per tant, el cost total de l'inventari CTI en funció de Q com la suma dels tres costos d'adquisició, llançament i emmagatzematge:

$$CTI(Q) = \frac{D}{Q} \cdot C_L + k \cdot C \cdot \frac{Q}{2}$$

Derivant aquesta funció respecte de Q, tenim:

$$CTI'(Q) = -\frac{D}{Q^2} \cdot C_L + \frac{k \cdot C}{2}$$

Per a trobar el mínim de la funció, igualem la derivada a 0 i aïllem Q, obtenint:

$$Q = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot C_L}{k \cdot C}} \text{ o bé } Q = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot C_L}{h}}$$

És fàcil veure que la segona derivada és positiva, per la qual cosa aquesta expressió determina la grandària del lot necessària per a minimitzar els costos d'inventari.

Per a aquest càlcul, es important que la demanda total D i el cost d'emmagatzematge per unitat de producte h (o el cost per unitat monetària k, segons el que utilitzem per al càlcul) utilitzen les mateixes unitats de temps. És a dir, si h és el cost anual, D ha de ser la demanda anual.

Observe's que, com que no hi ha temps d'aprovisionament, les comandes es llancen quan el nivell d'inventari és 0, és a dir, en el nostre model (s, Q), $s = 0$. A més, com que la demanda és constant, aquest nivell s'assoleix sempre amb la mateixa periodicitat, per la qual cosa el temps entre dues ordres sempre serà constant, i es pot calcular com Q/D.

Exemple (García i al., 2004)

Una empresa de distribució de matalassos té un producte amb una demanda de 150 matalassos cada dues setmanes. El cost de llançament d'una ordre és $C_L = 500$ euros, i el d'emmagatzematge és $h = 10$ euros per unitat emmagatzemada a l'any (52 setmanes). Quina és la grandària de lot òptima?

$$Q = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot C_L}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 150 \cdot \frac{52}{2} \cdot 500}{10}} = 624.5 \approx 625 \text{ unitats}$$

Introduint el temps d'aprovisionament

En el model anterior, hem suposat que no hi ha temps d'aprovisionament, la qual cosa no és molt realista en la majoria de les situacions. Si considerem que, quan llancem una ordre, la comanda tarda un temps L a arribar (constant i conegut), hem de tenir en compte aquest temps i llançar l'ordre de comanda abans que el nostre inventari arribe a 0, per a així poder continuar satisfent la demanda mentre esperem l'arribada de les noves unitats, sense que arribe a produir-se un ruptura d'estoc. Si d és la demanda esperada per unitat de temps (dies, setmanes…), durant el temps d'aprovisionament L haurem de poder cobrir una demanda de $L \cdot d$ unitats. Per tant, el punt de comanda òptim es pot calcular com:

$$s = L \cdot d$$

És important que la demanda i el temps d'aprovisionament estiguen expressats en les mateixes unitats de temps.

Exemple (Shenoy i Rosas, 2018)

Una companyia ven un producte la demanda anual del qual és de 1000 unitats. Si el temps d'aprovisionament és de 5 dies, calcula el punt de comanda.

$$s = 5 \cdot \frac{1000}{365} = 13.7 \text{ unitats}$$

Càlcul de la grandària del lot econòmic amb reposició gradual

A vegades, les comandes llançades no arriben d'una sola vegada, sinó que es van rebent de manera gradual. Això ocorre, per exemple, quan es tracta d'un article que es produeix en la mateixa empresa, encara que també pot donar-se si l'espai d'emmagatzematge és limitat. Estudiarem què ocorre si les unitats d'una comanda no es reben en un sol lliurament, sinó que arriben amb una taxa constant p. Podem suposar que les unitats començaran a arribar en el mateix moment en què es llança l'ordre, per la qual cosa farem la comanda quan l'inventari siga 0.

Una vegada llancem l'ordre de comanda, les unitats comencen a rebre's a un ritme de p unitats de producte per unitat de temps, suposem que són dies, per exemple. Com que, al mateix temps, satisfem una demanda de d unitats al dia (podem suposar que $p > d$), l'inventari augmentarà $p - d$ cada dia. Si la grandària del lot és Q, es tardarà Q/p dies a rebre el lot complet. Durant aquest temps, el nostre inventari haurà augmentat en $(p - d)\frac{Q}{p}$ unitats. Aquest serà, per tant, el nivell màxim que aconseguirà el nostre inventari, i el nivell mitjà serà:

$$(p - d)\frac{Q}{2p}$$

Podem, llavors, calcular els costos totals d'inventari com s'ha vist anteriorment:

$$CTI(Q) = \frac{D}{Q} \cdot C_L + k \cdot C \cdot \frac{p-d}{p}\frac{Q}{2}$$

Igual que anteriorment, derivant, igualant a 0 i aïllant Q obtenim la grandària òptima del lot, que en aquest cas és:

$$Q = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot C_L}{k \cdot C}\frac{p}{p-d}}$$

Exemple (Shenoy i Rosas, 2018)

En una planta de producció es consumeix una matèria primera a raó de 100 unitats per dia. El proveïdor d'aquesta matèria primera la subministra a la planta a raó de 300 unitats diàries. El cost d'emmagatzematge és de 0,1 euros per dia, i el cost de llançament és de 250 euros per ordre. Calcula la grandària del lot per a la matèria primera.

$$Q = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot C_L}{k \cdot C}\frac{p}{p-d}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \cdot 250}{0.1}\frac{300}{300-100}} = 866.025 \approx 866 \text{ unitats}$$

Model de revisió periòdica

Els models amb demanda determinista vistos fins ara empraven un sistema (s, Q) amb revisió contínua. Veurem ara el cas d'un sistema (T, S) amb revisió periòdica. Els valors que hem de determinar per a aplicar aquest model són el temps òptim T entre dues revisions de l'inventari i el nivell màxim d'inventari S. Suposarem que la demanda és coneguda i constant, i el temps d'aprovisionament nul.

Si T és el temps transcorregut entre dues revisions d'inventari (i els corresponents llançaments d'ordre d'aprovisionament), llavors el cost total d'emmagatzematge serà

$$\frac{d \cdot T}{2} \cdot k \cdot C$$

Si H és el temps total del nostre horitzó de planificació, el cost total de llançament serà

$$\frac{H}{T} \cdot C_L$$

Així, doncs, els costos totals d'inventari en funció del període de reaprovisionament T seran:

$$CTI(T) = \frac{H}{T} \cdot C_L + \frac{d \cdot T}{2} \cdot k \cdot C$$

Derivant com en casos anteriors, però ara respecte de T, tenim que el període òptim serà:

$$T = \sqrt{\frac{2 \cdot H \cdot C_L}{d \cdot k \cdot C}}$$

És important recordar que tots els valors (d, H i k) han d'estar donats en la mateixa unitat temporal, i que el resultat també estarà calculat en aquesta unitat.

Com que estem considerant que el temps d'aprovisionament és nul, el nivell màxim d'inventari i la grandària del lot són iguals, ja que el moment de llançar l'ordre coincideix amb el moment en què l'inventari arriba a 0, i es pot calcular fàcilment com $Q = S = d \cdot T$.

Nota: Sota les condicions que la demanda siga constant i el temps d'aprovisionament nul, els sistemes (s, Q) i (T, S) són equivalents, és a dir, les ordres és llançaran amb la mateixa periodicitat, la grandària dels lots encomanats serà igual, i el nivell màxim d'inventari també coincidirà, així com els costos totals d'inventari. No obstant, si s'introdueixen temps d'aprovisionament i incertesa en les dades, els dos sistemes proporcionaran resultats diferents.

Exemple (Shenoy i Rosas, 2018)

Una empresa emmagatzema un producte la demanda anual del qual és de 15000 unitats. El cost de llançament és de 300 euros, el cost de cada unitat és de 2,5 euros, i el cost d'emmagatzematge és del 15% (0,15 euros per euro) per any emmagatzemat. Determina el període òptim de reaprovisionament i el nivell màxim d'inventari per a un sistema de revisió periòdica.

$$T = \sqrt{\frac{2 \cdot H \cdot C_L}{d \cdot k \cdot C}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1 \cdot 300}{15000 \cdot 0.15 \cdot 2.5}} = 0.3265 \text{ anys} \approx 119 \text{ dies}$$

$$S = d \cdot T = 15000 \cdot \frac{119}{365} \approx 4890.41 \approx 4890 \text{ unitats}$$

Models amb incertesa en la demanda i/o en el temps d'aprovisionament

Òbviament, la gestió de l'estoc està íntimament lligada a les demandes, per la qual cosa és imprescindible estudiar-les per a poder gestionar l'estoc de manera eficient.

En funció de com varia la demanda dins d'un període considerat, podem classificar la demanda com:

- Demanda estable: la mitjana no pateix variacions significatives dins del període.
- Demanda amb tendència: el valor de la mitjana va creixent o decreixent amb el temps.
- Demanda estacional: la mitjana pateix modificacions significatives coincidint sempre amb les mateixes dates.

Segons les raons que produeixen la variació de la demanda, distingim entre demanda *independent* o *dependent*. La demanda independent és aquella que només es veu afectada per decisions dels clients que no podem anticipar i sobre les quals no podem influir directament. La demanda dependent és la d'aquells components la quantitat dels quals és resultat de definir nivells de compra o fabricació d'altres productes (si decidim produir una major quantitat de pa, augmentarà la nostra demanda dels ingredients necessaris, com la farina).

També podem distingir entre demanda *contínua* o *discreta*. Es considera que la demanda és contínua si podem conèixer la demanda en qualsevol instant de temps, mentre que diem que és discreta si només considerem la quantitat demanada en determinats blocs de temps. Per exemple, si només coneixem la demanda mensual del producte, es tracta de demanda discreta, mentre que, si sabem la quantitat demanada dia a dia, es tractaria de demanda contínua.

Dins de la demanda discreta, distingim entre la demanda d'un únic o de diversos períodes. Diem que la demanda és d'un únic període si el producte només es compra/ven una vegada per temporada. Per exemple, articles de moda (una vegada finalitza la temporada, l'article es retira). Mentre que la demanda és de diversos períodes si el mateix article pot tornar a vendre's en el període següent, per la qual cosa per al període següent haurem de reproveir-nos d'aquest article en cas que en tinguem un estoc baix al final del període anterior.

Una correcta predicció de la demanda és fonamental per a l'adequada gestió de l'estoc, i ens ajudarà a reduir excessos d'inventari, evitar ruptures d'estoc, millorar el servei al client… No obstant això, en aquesta assignatura no ens ocuparem d'aquest aspecte, ja que és tractat àmpliament en altres assignatures del grau.

De la mateixa manera, els temps d'aprovisionament, és a dir, el temps que tarden les comandes a arribar des que es llança una ordre, poden ser variables. Un increment inesperat en el temps d'aprovisionament pot causar també un ruptura d'estoc.

Estudiarem com evitar aquestes ruptures d'estoc quan la demanda i/o el temps d'aprovisionament presenten incertesa. Assumirem que els valors d'aquestes mesures presenten una distribució normal amb una certa mitjana i desviació típica conegudes. Encara que això no és així en la pràctica, podríem estimar aquests paràmetres a partir de dades històriques.

Estoc de seguretat

L'estoc de seguretat és un inventari amb la fi de satisfer la demanda en cas en què aquesta puga sobrepassar les previsions o els temps d'aprovisionament s'allarguen més de l'esperat.

Si, per exemple, la demanda durant el termini d'aprovisionament L és inferior a la previsió, l'única cosa que ocorrerà és que després de rebre el lot tindrem un estoc superior a l'esperat. Però, si la demanda durant aquest termini supera la previsió, es produirà un ruptura d'estoc (vegeu figura 5). Si la demanda segueix una distribució simètrica respecte a la mitjana (per exemple, normal), això es produirà aproximadament la meitat de les vegades.

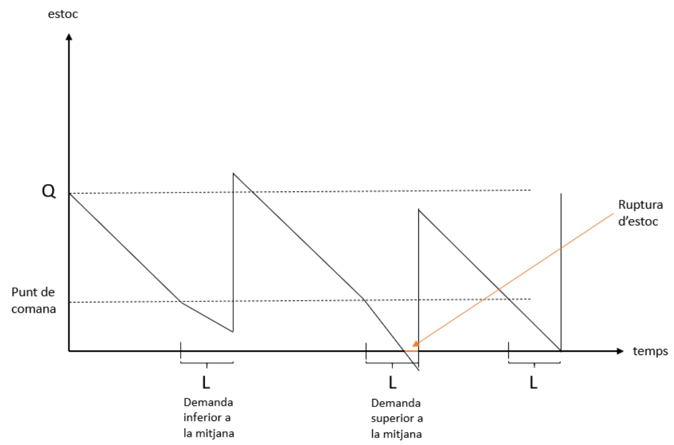
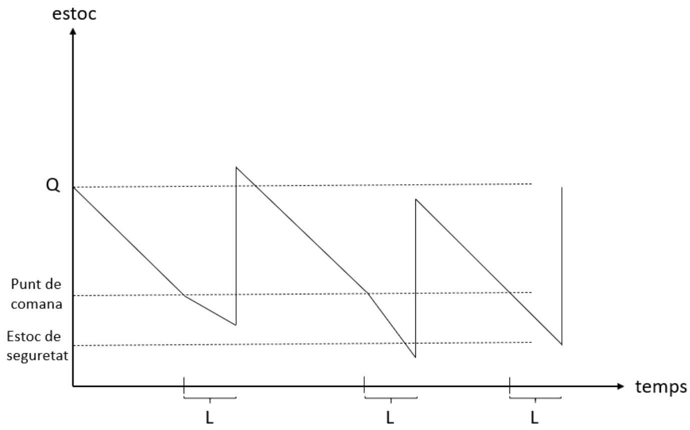


Figura 4: Ruptura d'estoc

Si mantenim un estoc de seguretat adequat, podrem fer front a pics inesperats de la demanda i a comandes rebudes amb retard, i així evitar que es perden vendes per falta de producte (figura 6). D'altra banda, un estoc de seguretat massa alt, encara que garantirà que mai es perden vendes per falta d'unitats, incorrerà en costos elevats d'emmagatzematge.



Il·lustració 5: Estoc de seguretat

L'objectiu ha de ser, per tant, trobar l'estoc de seguretat necessari per a disminuir al màxim els costos de manteniment sense que descendisca el nivell de disponibilitat dels productes. El nivell apropiat d'estoc de seguretat vindrà determinat per dos factors: la incertesa de la demanda i el temps d'aprovisionament i el nivell desitjat de disponibilitat del producte.

Mesura de la disponibilitat del producte

La disponibilitat del producte reflecteix la capacitat de l'empresa per a completar una comanda mitjançant l'inventari disponible. Si la comanda no es pot satisfer, es produeix un ruptura d'estoc. Existeixen diverses maneres de mesurar la disponibilitat del producte:

- Ràtio d'unitats servides: percentatge de productes demanats que han pogut ser servits amb l'inventari disponible. Això ens dona una mesura de com de probable és que una comanda puga ser satisfeta. En alguns casos, aquesta ràtio pot calcular-se respecte de comandes completes. Una comanda pot estar composta de diversos productes diferents, i s'entén que la comanda es completa només si tots els productes estan disponibles en inventari. Si només tenim un producte, les dues mesures són molt paregudes, no així si tenim múltiples productes.
- Nivell de servei de cicle (NSC): percentatge de cicles de reposició que finalitzen amb tota la demanda dels clients satisfeta. Un cicle de reposició és l'interval entre la finalització de dues ordres de reposició successives. El NSC és equivalent a la probabilitat que no es produïsca un ruptura d'estoc durant un cicle de reposició.

Exemple (Shenoy i Rosas, 2018)

La taula 1 mostra les dades de vendes d'un producte (demanda i nombre d'unitats no servides per falta d'estoc).

CICLE DE REPOSICIÓ	DEMANDA	UNITATS NO SERVIDES
1	23	0
2	18	0
3	31	6
4	24	0
5	12	0
6	32	7

7	38	13
8	40	15
9	13	0
10	20	0
11	24	0
12	25	0
TOTAL	300	41

Taula 1: Dades de vendes

La ràtio d'unitats servides és $\frac{(300-41)}{300} = 0.86$, és a dir, se serveix un 86% de la demanda. Dels 12 cicles de reposició, en 8 s'ha pogut servir tota la demanda, per la qual cosa el nivell de servei de cicle és $NSC = \frac{8}{12} = 0.67$, és a dir, la probabilitat de no patir ruptura d'estoc en un cicle és del 67%.

A l'hora de determinar l'estoc de seguretat, fixarem el percentatge que volem aconseguir per a una d'aquestes mesures de disponibilitat i calcularem l'estoc de seguretat necessari per a això. En el nostre cas, utilitzarem el NSC. És a dir, fixarem el nivell de servei de cicle que ens agradaria aconseguir (95%, 99%...) i a partir d'ací calcularem l'estoc de seguretat.

Càlcul del punt de comanda en sistemes (s, Q)

Anteriorment hem vist com calcular la grandària del lot econòmic Q i el punt de comanda s quan la demanda i el temps d'aprovisionament eren constants i coneguts. Veurem ara què fer amb el punt de comanda quan tenim incertesa en les dades.

Demanda variable i temps d'aprovisionament constant

El punt de comanda per al cas de demanda constant es calculava com $s = L \cdot d$, on d és la demanda i L el temps d'aprovisionament (totes dues mesures han d'estar expressades en les mateixes unitats temporals). Ara, per a cobrir possibles variacions en la demanda, augmentarem el punt de comanda en una certa quantitat que denominem *estoc de seguretat* ss. A més, com que la demanda ja no és constant, utilitzarem la mitjana de la demanda $\bar{d}$ per al càlcul. Així doncs, el punt de comanda serà $s = \bar{d} \cdot L + ss$.

Primer, hem de decidir quin nivell de servei de cicle volem aconseguir. Com s'ha explicat abans, el NSC és la probabilitat que no es produïsca ruptura d'estoc en un cicle de reposició qualsevol, és a dir, la probabilitat que la demanda durant el cicle de reposició siga menor que el punt de comanda. Per tant, si X és la demanda durant un cicle, el NSC és $P(X \leq L \cdot \bar{d} + ss)$. Com que assumim que la demanda segueix una distribució normal $N(\bar{d}, \sigma_d)$, la demanda en el període de aprovisionament L, és a dir, la variable X, seguirà una distribució normal $N(L \cdot \bar{d}, \sigma_d \cdot \sqrt{L})$. Si estandarditzem (tipifiquem) la variable, tenim:

$$NSC = P\left(\frac{X - L \cdot \bar{d}}{\sigma_d \cdot \sqrt{L}} \leq \frac{ss}{\sigma_d \cdot \sqrt{L}}\right)$$

Així, usant les taules de la normal estandarditzada, per a un NSC del 95%, per exemple, tindrem que $\frac{ss}{\sigma_d \cdot \sqrt{L}} = 1.65$, és a dir, $ss = 1.65 \cdot \sigma_d \cdot \sqrt{L}$. En general, tenim:

$$ss = z \cdot \sigma_d \cdot \sqrt{L}$$

on z s'obté de la taula de la distribució normal estandarditzada per al NSC desitjat. Per als valors més típics de NSC tenim la taula següent:

$NSC(\%)$	z
95	1.65
97.5	1.96
99	2.33
99.5	2.58
99.9	4

El punt de comanda, per tant, serà

$$s = \bar{d} \cdot L + z \cdot \sigma_d \cdot \sqrt{L}$$

Exemple (García i al., 2004)

Una empresa de distribució de matalassos té un producte amb una demanda de 150 matalassos cada dues setmanes, tenint una desviació típica de 20 matalassos en aquest període. Des que sol·licita una comanda fins que la reben passen 5 setmanes. Quin seria l'estoc de seguretat corresponent a un nivell de servei de cicle del 99%?

És important que el temps d'aprovisionament estiga en les mateixes unitats de temps que la demanda. Com la demanda ve expressada en parells de setmanes, hem de dividir el temps d'aprovisionament entre 2:

$$L = 5/2 = 2.5$$

Per a un NSC del 99%, el valor de z en la taula és $z = 2.33$. Apliquem la fórmula de l'estoc de seguretat:

$$ss = z \cdot \sigma_d \cdot \sqrt{L} = 2.33 \cdot 20 \cdot \sqrt{2.5} = 73.68 \approx 74 \text{ unitats}$$

Quin seria el punt de comanda?

$$s = L \cdot \bar{d} + ss = 2.5 \cdot 150 + 74 = 449 \text{ unitats}$$

Temps d'aprovisionament variable i demanda constant

En aquest cas, la demanda d serà coneguda i constant, mentre que el temps L seguirà una distribució normal amb mitjana $\bar{L}$ i desviació típica σ_L. Argumentant de manera similar al cas anterior, obtenim la fórmula següent per a l'estoc de seguretat:

$$ss = z \cdot d \cdot \sigma_L$$

El punt de comanda serà llavors:

$$s = d \cdot \bar{L} + z \cdot d \cdot \sigma_L$$

Demanda i temps d'aprovisionament variables

Ara totes dues mesures seguiran una distribució normal amb mitjanes $\bar{d}$ i $\bar{L}$ i desviacions típiques σ_d i σ_L, respectivament. La fórmula per a calcular l'estoc de seguretat en aquest cas és:

$$ss = z \cdot \sqrt{\sigma_d^2 \cdot \bar{L} + \sigma_L^2 \cdot \bar{d}^2}$$

El punt de comanda es calcula com:

$$s = \bar{d} \cdot \bar{L} + z \cdot \sqrt{\sigma_d^2 \cdot \bar{L} + \sigma_L^2 \cdot \bar{d}^2}$$

Exemple (Shenoy i Rosas, 2018)

La demanda diària d'una empresa de muntatge d'ordinadors té una distribució normal amb mitjana de 20 unitats i desviació típica de 6 unitats. L'empresa té un proveïdor de memòria RAM el temps d'aprovisionament de la qual es distribueix amb mitjana de 3 dies i desviació típica d'1 dia. Calcula l'estoc de seguretat i el punt de comanda si l'empresa vol tenir un 90% de seguretat que no es produiran ruptures d'estoc.

Per a un nivell de servei del 90%, tenim que $z = 1.28$. Aplicant la fórmula per a l'estoc de seguretat amb demanda i temps d'aprovisionament variables, obtenim:

$$ss = z \cdot \sqrt{\sigma_d^2 \cdot \bar{L} + \sigma_L^2 \cdot \bar{d}^2} = 1.28 \cdot \sqrt{6^2 \cdot 3 + 1^2 \cdot 20^2} = 28.8 \text{ unitats}$$

I per al punt de comanda:

$$s = \bar{d} \cdot \bar{L} + ss = 20 \cdot 3 + 28.8 = 88.8 \text{ unitats}$$

El punt de comanda, per tant, és de 89 unitats, i es mantindrà un estoc de seguretat de 29 unitats.

Càlcul del nivell màxim d'inventari en sistemes (T, S)

Estudiarem ara les tres situacions anteriors quan tenim un sistema de revisió periòdica (T, S), és a dir, es revisa l'inventari cada període de grandària T i es llança una ordre per a assolir un nivell d'inventari S. El període T es calcula amb la mateixa fórmula que en el cas de demanda i temps d'aprovisionament constants, és a dir:

$$T = \sqrt{\frac{2 \cdot H \cdot C_L}{d \cdot k \cdot C}}$$

No obstant això, el nivell màxim S i, per tant, la grandària Q del lot, han de calcular-se tenint en compte la variabilitat de la demanda i/o el temps d'aprovisionament, per a això haurem d'incorporar un estoc de seguretat.

Demanda variable i temps d'aprovisionament constant

L'estoc de seguretat, en aquest cas, es calcula com

$$ss = z \cdot \sigma_d \cdot \sqrt{T + L}$$

ja que aquest estoc ha de cobrir la variabilitat que es produïsca durant el període T entre dues revisions més el temps d'aprovisionament L.

Així doncs, el nivell màxim S serà:

$$S = \bar{d}(T + L) + ss = \bar{d}(T + L) + z \cdot \sigma_d \sqrt{T + L}$$

Temps d'aprovisionament variable i demanda constant

Com que ara la demanda és constant, durant el període entre aprovisionaments no hi ha variabilitat. La incertesa només es produeix durant el temps des que es llança la comanda fins que es rep, ja que aquest és variable. Per tant, l'estoc de seguretat es calcularà amb la fórmula següent:

$$ss = d \cdot z \cdot \sigma_L$$

ja que el temps d'aprovisionament estarà per davall de $z\sigma_L$ amb la probabilitat que hàgem triat per al NSC.

Així, el nivell màxim serà

$$S = d \cdot (T + \bar{L}) + d \cdot z \cdot \sigma_L$$

Demanda i temps d'aprovisionament variables

En aquesta situació el càlcul de l'estoc de seguretat és un poc més complex, i es fa mitjançant la fórmula següent, que incorpora la variabilitat de tots dos factors:

$$ss = z \cdot \sqrt{\left(T + \bar{L}\right)\sigma_d^2 + \bar{d}^2\sigma_L^2}$$

El nivell màxim en aquest cas queda:

$$S = \bar{d}\left(T + \bar{L}\right) + z \cdot \sqrt{\left(T + \bar{L}\right)\sigma_d^2 + \bar{d}^2\sigma_L^2}$$

Exemple (Shenoy i Rosas, 2018)

Una botiga que utilitza un sistema de revisió periòdica d'inventari té una demanda anual d'un determinat producte de 5500 unitats. Els costos de llançament són de 43 euros per ordre, i el cost d'emmagatzematge per euro és del 35% anual. Cada unitat de producte té un cost de 100 euros. La demanda diària segueix una distribució normal amb mitjana 15 i desviació típica 3. El temps d'aprovisionament del producte també segueix una distribució normal amb mitjana de 5 dies i desviació típica d'1 dia. Calcula l'estoc de seguretat per a un nivell de servei de cicle del 90%.

En primer lloc, calculem el període d'aprovisionament T:

$$T = \sqrt{\frac{2 \cdot H \cdot C_L}{d \cdot k \cdot C}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1 \cdot 43}{5500 \cdot 0.35 \cdot 100}} = 0.0211 \text{ anys} \approx 7.7 \text{ dies}$$

Ara apliquem la fórmula de l'estoc de seguretat per a temps d'aprovisionament i demanda variables:

$$\begin{aligned} ss &= z \cdot \sqrt{\left(T + \bar{L}\right)\sigma_d^2 + \bar{d}^2\sigma_L^2} \\ &= 1.28 \cdot \sqrt{(7.7 + 5) \cdot 3^2 + 15^2 \cdot 1^2} \approx 23.58 \approx 24 \text{ unitats} \end{aligned}$$

Gestió d'estocs de demanda discreta

En tots els models que hem vist fins ara, hem considerat que la demanda del producte era contínua (encara que en alguns sistemes la revisió de l'inventari es fera de manera discreta). Estudiarem a continuació el cas en què la demanda del producte és discreta, és a dir, es fa de manera agregada per períodes de temps.

Dins dels productes amb demanda discreta, cal distingir entre els que tenen demanda d'un únic període (productes amb alt grau d'obsolescència, com moda, peribles…) i els que presenten demanda de diversos períodes. Per a estudiar la demanda d'un únic període és necessari definir paràmetres com la probabilitat de venda o el cost residual que són difícils d'ajustar de manera objectiva, per la qual cosa no considerarem aquest cas. Ens centrarem, per tant, en els productes de demanda discreta de diversos períodes.

D'ara en avant, suposarem que l'horitzó de planificació està dividit en T períodes i la demanda del producte en cada període $t \in \{1, \ldots, T\}$, denotada com d_t, és coneguda (o, almenys, tenim una previsió de quina serà la demanda). Cada llançament té associat un cost C_L i podem assumir que el temps d'aprovisionament és nul (o constant i conegut, per la qual cosa l'ordre es podria llançar amb l'antelació necessària perquè arribe exactament en el període que desitgem). Tant la recepció de les comandes com el lliurament de la demanda del període es fan al principi d'aquest. També tenim un cost d'emmagatzematge h per cada unitat de producte i període. L'inventari al principi de la planificació se suposarà nul.

Model de programació matemàtica

Per a planificar les comandes que cal fer al llarg de l'horitzó de planificació per a minimitzar el cost de l'inventari, podem plantejar i resoldre un model de programació matemàtica. Les variables que utilitzarem seran les següents:

q_t : quantitat demanda en l'ordre llançada en el període t

I_t : inventari al principi del període t (després de tindre en compte les comandes i la demanda d'eixe període)

$$y_t = \begin{cases} 1 \text{ si en el període } t \text{ s'ha llançat una ordre} \\ 0 \text{ si no} \end{cases}$$

El model a resoldre és el següent:

$$Min \qquad \sum_{i=1}^{T} (C_L \cdot y_t + h \cdot I_t)$$

$$\begin{array}{llll} s.a: & I_t = I_{t-1} + q_t - d_t & t = 1, \ldots, T & (1) \\ & q_t \leq y_t \sum_{r=1}^{T} d_r & t = 1, \ldots, T & (2) \\ & I_0 = 0 & & (3) \\ & I_t, q_t \geq 0 & t = 1, \ldots, T & (4) \\ & y_t \in \{0, 1\} & t = 1, \ldots, T & (5) \end{array}$$

La funció objectiu minimitza la suma dels costos de llançament i els costos d'emmagatzematge. Les equacions (1) estableixen que l'inventari en el període t serà el resultat de sumar a l'inventari del període anterior la comanda rebuda i restar-li la demanda d'aquest període.

Les restriccions (2) obliguen al fet que, si no és llança una ordre en el període t $(y_t = 0)$, la quantitat rebuda q_t siga 0, mentre que, si es llança, no hi ha més limitació que la quantitat total demanada en tot l'horitzó de planificació.

Exemple

Per a un dels articles produïts per una empresa es coneixen les següents demandes per als sis primers mesos de l'any (vegeu taula 2). El cost de llançament és de 80€, i el d'emmagatzematge és 1,75€ per unitat al mes.

Mes	Gener	Febrer	Març	Abril	Maig	Juny
Demanda	36	60	85	11	39	75

Taula 2: Demandes mensuals

Volem determinar la planificació de les comandes necessàries per a satisfer la demanda amb un cost d'inventari mínim. El model resolt amb Solver es troba en el fitxer *Tema 2 - demanda discreta.xlsx*.

Encara que hem vist una manera de convertir el model en lineal, això no sempre és eficient, ja que suposa introduir més restriccions, algunes amb un paràmetre M que pot causar problemes a l'hora d'obtenir la solució òptima. És per això que existeixen altres mètodes alternatius que ens permeten obtenir la solució òptima, com el que veurem a continuació.

Mètode de Wagner-Whitin

Aquest mètode es basa en el fet que es pot demostrar que en l'estratègia òptima només llançarem una ordre en un període si l'inventari s'ha esgotat en el període anterior. Per a aplicar aquest mètode, construirem un graf dirigit format per $T+1$ vèrtexs. Des de cada vèrtex i tindrem arcs que ixen cap als vèrtexs $i+1, i+2, \ldots, T$. Cadascun d'aquests arcs (i, j) representen una comanda que cobriria la demanda des del període i fins al període $j-1$. Si es decideix fer aquesta ordre, la quantitat a demanar serà $\sum_{k=i}^{j-1} d_k$. Per tant, el cost total que suposaria per a l'inventari llançar aquesta ordre seria $C_L + h \cdot \sum_{k=i}^{j-1} (k-i) d_k$. Aquest serà el cost c_{ij} que li assignarem a l'arc (i, j) en el graf. Una vegada construït el graf, calculem el camí més curt del vèrtex 1 al $T+1$. Els arcs que formen part d'aquest camí ens indicaran les comandes que cal llançar, i el cost del camí serà el cost total d'inventari.

Exemple

Considerem l'exemple anterior resolt amb el model de programació matemàtica. Aplicarem el mètode de Wagner-Whitin per a obtenir la mateixa solució òptima. Primer construïm el graf dirigit. Com que la planificació correspon a 6 mesos, el graf tindrà 7 vèrtexs. Des de cadascun dels vèrtexs eixirà un arc cap a cadascun dels vèrtexs posteriors. En la figura 7 podem veure alguns d'aquests arcs (no s'han dibuixat tots per qüestió d'espai).

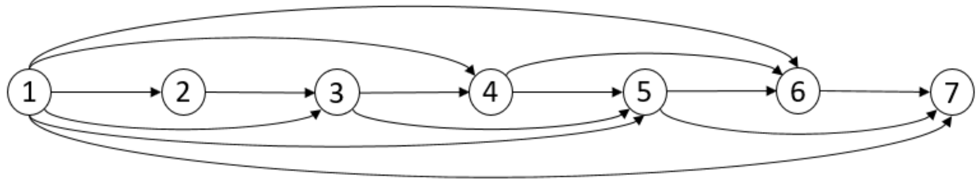


Figura 6: Graf per a l'algorisme de Wagner-Whitin

Ara hem de calcular els costos associats a cada arc. Per exemple, per a l'arc $(1, 4)$, que representa una comanda que cobrirà la demanda dels mesos 1, 2 i 3, el cost serà:

$$c_{14} = 80 + 1.75 \cdot (60 + 2 \cdot 85) = 482.5$$

En el càlcul incloem el cost de llançament, 80, i el cost d'emmagatzematge, que és 1,75 per unitat al mes, així que cal multiplicar-lo per les quantitats emmagatzemades durant aquest interval i el nombre de mesos que s'emmagatzema aquesta quantitat. La quantitat destinada al primer mes no suposa costos d'emmagatzematge, ja que s'utilitza immediatament. La quantitat per al segon mes, 60 unitats, s'ha d'emmagatzemar durant un mes, i la quantitat per al tercer mes, 85, s'emmagatzema durant els mesos 1 i 2, així que s'ha de multiplicar per dos. D'aquesta manera calculem els costos de tots els arcs, que poden veure's en la taula 3.

El camí més curt en aquest graf dirigit pot observar-se en la figura 8, i correspon a fer comandes els mesos 1, 2, 3 (que cobrirà també el mes 4), 5 i 6, amb un cost total de 419.25€. Com podem veure, es tracta de la mateixa solució obtinguda resolent el model anterior.

Arc	Cost	Arc	Cost	Arc	Cost
(1,2)	80	(2,4)	228.75	(3,7)	629.5
(1,3)	185	(2,5)	267.25	(4,5)	80
(1,4)	482.5	(2,6)	472	(4,6)	148.25
(1,5)	1055.75	(2,7)	997	(4,7)	410.75
(1,6)	1328.75	(3,4)	80	(5,6)	80
(1,7)	1985	(3,5)	99.25	(5,7)	211.25
(2,3)	80	(3,6)	235.75	(6,7)	80

Taula 3: Costos dels arcs

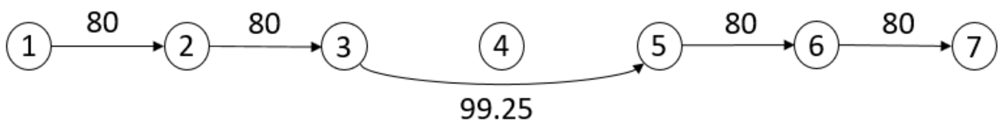


Figura 7: Camí més curt

L'algorisme de Wagner-Whitin té també l'avantatge que pot aplicar-se fàcilment per a casos en els quals el càlcul dels costos d'inventari és més complicat i no pot expressar-se com una funció lineal.

Sistema de classificació ABC de productes

Quan en l'inventari es manté un gran nombre de productes diferents, a vegades no és possible dedicar la mateixa quantitat de recursos per al control i gestió de l'estoc de tots aquests. És per això que és important saber quins productes prioritzar per a aconseguir un major efecte en l'eficiència de la gestió de l'inventari. L'anàlisi ABC ens permetrà classificar els productes de l'inventari segons una certa mesura d'importància (demanda, ingressos per vendes, nivell de consum…).

L'anàlisi ABC està basat en la regla de Pareto, segons la qual, quan s'analitzen grans quantitats de dades, la distribució de la major part dels paràmetres és irregular. Suposem, per exemple, que el nostre criteri de classificació dels articles són els ingressos per vendes generats per cada article. Llavors, la regla de Pareto aplicada a la gestió de l'inventari ens diu que, per regla general, aproximadament el 20% dels nostres productes suposaran el 80% dels ingressos per vendes, el 30% següent correspondrà a un 15% d'aquests ingressos, mentre que l'últim 50% suposarà només el 5%.

Per a aplicar l'anàlisi ABC, el primer que hem de fer és decidir quin criteri o mesura utilitzarem per a determinar la importància de cada article. Aquest criteri pot ser el nombre d'unitats demanades al llarg d'un determinat termini, els ingressos per vendes generats per aquest article, el nivell de consum del producte si es tracta d'un article per a consum intern de l'empresa…

Una vegada obtinguts els valors d'aquesta mesura per a tots els productes, els ordenarem de major a menor valor d'aquest criteri i calcularem els valors acumulats d'aquesta mesura per a tots els productes. Finalment, classificarem els productes en tres grups A, B i C a partir d'aquests valors acumulats. El grup A el formaran aquells pocs productes ($\approx 20\%$) que sumen el 80% del valor de l'inventari d'acord amb el criteri triat, el grup B correspondrà a aquells ($\approx 30\%$) que representen el següent 15% del valor, mentre que en el grup C tindrem els productes ($\approx 50\%$) que representen l'últim 5% del valor. Òbviament, aquests percentatges poden variar i ser molt diferents depenent de cada cas.

Com a conseqüència, els productes del grup A seran els més importants i als quals més recursos haurem de dedicar (actualització més freqüent del nivell d'estoc, revisió periòdica dels mètodes de càlcul de previsions, actualització freqüent dels paràmetres de gestió, elecció de nivell de servei de cicle més elevat…). Els productes del grup B seran els següents en importància, mentre que els del grup C seran aquells als quals no serà necessari prestar tanta atenció.

Exemple

Una empresa ven 10 articles diferents. La taula 3 mostra els nivells de demanda anuals de cada article, així com el seu valor monetari per unitat. Aplicarem l'anàlisi ABC a aquests productes.

Producte	Demanda anual	Valor monetari per unitat (€)
A	3000	50
B	4000	12
C	1500	15
D	6000	10
E	1000	20
F	500	500
G	300	1500
H	600	20
I	1750	10

J	2500	5

Taula 4: Demanda i valor dels productes

En primer lloc, hem de triar el criteri que utilitzarem per a classificar els productes. Un possible criteri seria la demanda anual. En eixe cas, ordenem els productes de major a menor demanda (taula 4) i calculem la demanda acumulada.

Producte	Demanda anual	Demanda acumulada
D	6000	6000
B	4000	10000
A	3000	13000
J	2500	15500
I	1750	17250
C	1500	18750
E	1000	19750
H	600	20350
F	500	20850
G	300	21150

Taula 5: Productes ordenats per demanda

La demanda total és 21150. El 80% de la demanda total suposen 16920 unitats, així que el grup A el conformen els productes D, B, A, J i I. El 95% de la demanda són 20092 unitats, així que el grup B serien els productes C, E i H, mentre que el 5% restant de la demanda determina el grup C, que estarà format pels productes F i G.

No obstant això, aquest no és l'únic criteri possible de classificació. En comptes de fixar-nos en la demanda, podem classificar els productes sobre la base del valor anual que suposa aquesta demanda (producte de la demanda anual i el valor unitari). En la taula 5 veiem el valor total calculat i els productes ordenats segons aquest valor total.

Producte	Valor anual (€)	Valor anual acumulat (€)
G	450000	450000
F	250000	700000
A	150000	850000
C	67500	917500
D	60000	977500
B	48000	1025500
E	20000	1045500
I	17500	1063000
J	12500	1075500
H	12000	1087500

El 80% del valor total són 870000€, per la qual cosa el grup A el formen els productes G, F i A. El grup B el componen els productes C, D i B, mentre que en el grup C estan els productes E, I, J i H.

Com acabem de veure, usar diferents criteris de classificació pot donar lloc a grups molt diferents, per la qual cosa és important saber quin és el criteri que realment ens interessa prioritzar.

Bibliografia

Chopra, S. i Meindl, P. (2013). *Administración de la cadena de suministro: estrategia, planificación y operación*. 5a ed. Pearson Educación de México.

García, J. P., Cardós, M., Albarrasí, J. M. i García, J. J. (2004). *Gestión de stocks de demanda independiente.* Universitat Politècnica de València.

Shenoy, D. i Rosas, R. (2018). *Problems & Solutions in Inventory Management*. Springer.

Tema 3 – Problemes de localització

Aquest tema està dedicat a la formulació i resolució de problemes de localització, que apareixen en el disseny de la cadena de subministrament i impliquen decisions com on situar instal·lacions, de quin tipus, com assignar la demanda a les localitzacions… Es tracta de decisions molt importants, ja que, generalment, impliquen inversions altes i tenen gran influència en altres factors clau, com els costos de producció, inventari i transport o la capacitat de resposta al client.

Introducció

Els problemes de localització que estudiarem en aquest tema ens ajudaran a prendre diversos tipus de decisions. La primera i principal és on construir les instal·lacions. Aquesta és una decisió que tindrà un impacte a llarg termini en el funcionament de la cadena de subministrament, ja que tancar-les, traslladar-les a un altre lloc o obrir-ne de noves implica uns costos molt elevats. Es tracta, per tant, de decisions d'àmbit estratègic, encara que, si les instal·lacions no són pròpies, sinó llogades, és més fàcil i menys costós dur a terme canvis, i podrien fer-se amb més freqüència, de manera que es considerarien decisions d'àmbit tàctic. A més de decidir la ubicació de les noves instal·lacions, podem prendre altres decisions relacionades, com tancar-ne alguna de les existents, ampliar-les, reduir-ne la capacitat… Els tipus d'instal·lacions que podem considerar en aquests problemes són molt diversos, i inclouen plantes de producció, magatzems, centres de distribució…, però també veurem instal·lacions relacionades amb serveis públics, com hospitals, parcs de bombers….

A més de decidir on col·locarem les instal·lacions, també hem de prendre decisions relacionades amb l'assignació de la demanda o de les fonts de subministrament a aquestes instal·lacions. Per exemple, quines plantes s'encarregaran de la producció de la demanda de cada client, quins ciutadans seran atesos en cada hospital… Aquestes decisions també tenen un impacte significatiu, ja que afecten els costos totals de producció, operació, inventari i transport en què incorre la cadena per a satisfer la demanda del client i/o la qualitat del servei. Es tracta d'una decisió que pot ser reconsiderada amb més regularitat per a poder modificar l'assignació segons vagen canviant les condicions de les instal·lacions o les demandes. Parlem, per tant, de decisions d'àmbit tàctic. Les decisions de localització d'instal·lacions i d'assignació de demandes o subministraments estan molt relacionades entre si i, sovint, han de prendre's simultàniament, per la qual cosa aquests problemes es coneixen també com a problemes de localització-assignació.

Aquest tipus de decisions sobre el disseny de la xarxa que sosté la cadena de subministrament han de ser revisades a mesura que la companyia creix o quan dues companyies es fusionen, però també pot ser necessari quan la demanda ha patit un canvi considerable (en quantitats o en ubicació) o quan l'estratègia de producció ha canviat de manera important (producció de nous tipus de productes o retirada d'alguns d'obsolets, per exemple).

Factors a tenir en compte

A l'hora de plantejar el problema que hem de resoldre per a dissenyar la xarxa logística, existeixen una sèrie de factors que hem de considerar per a conèixer amb detall les característiques del nostre problema i, per tant, el model i mètode de resolució que hem d'emprar:

- Quin serà el nostre objectiu? Quan parlem de la cadena de subministrament d'una empresa, els objectius solen ser de tipus econòmic (minimitzar costos o maximitzar beneficis), mentre que els problemes de localització que apareixen en serveis públics solen tenir com a objectiu principal proporcionar un servei a l'usuari equitatiu i de qualitat.
- Quin nombre d'instal·lacions volem construir? Si només hem de construir una instal·lació, el problema resulta més senzill, ja que no és necessari prendre decisions respecte a l'assignació de recursos o demandes.
- On puc situar les instal·lacions? Si podem obrir les instal·lacions en qualsevol lloc, tenim un espai continu de possibles localitzacions, mentre que si hi ha un nombre finit de punts potencials on podem obrir-les, es tracta d'un espai discret (això últim sol ser més realista).
- Quants tipus de mercaderia es mouen des de / cap a les instal·lacions? Podem tenir un únic tipus de mercaderia (o que, encara que siguen tipus diferents, es poden tractar com un només) o múltiples tipus.
- Quants tipus diferents d'instal·lacions hem d'obrir? Pot ser que totes les instal·lacions siguen del mateix tipus o que hàgem de construir diversos tipus diferents d'instal·lacions (per exemple, plantes de producció i centres de distribució).
- Quins fluxos de producte són rellevants? És possible que només ens interesse considerar el flux de mercaderia que ix des de les nostres instal·lacions cap al seu destí, mentre que no hi ha entrada de materials a la instal·lació (o a l'inrevés, només volem preocupar-nos per la matèria primera que entra, però no pel que ix). En aquest cas, tindríem un problema d'un únic nivell de flux (*single-echelon*). Però en alguns casos haurem de considerar un flux entrant i un altre sortint (per exemple, la matèria primera que entra en la planta de fabricació i el producte acabat que n'ix), amb la qual cosa tindríem un problema amb dos nivells de flux (*two-echelon*).
- És la demanda divisible? Si la demanda d'un client pot ser servida per més d'una de les nostres instal·lacions alhora (de forma compartida), diem que la demanda és divisible, però en alguns casos pot ser que siga requerit que la demanda d'un client haja de ser servida íntegrament per una única instal·lació.

La resposta a aquestes preguntes determinarà a quina mena de problema ens enfrontem. Òbviament, no és possible veure en aquesta assignatura tots els models possibles per a totes les combinacions de factors abans descrits. I encara que així fora, això no cobriria tota la casuística que pot donar-se en la vida real, ja que cada empresa i situació té les seues característiques particulars. Per tant, el que veurem a continuació és una representació dels models bàsics més comuns que poden servir-nos com a punt de partida per a resoldre problemes reals.

Models amb un sol tipus de producte i un nivell de flux

Suposarem que treballem en un espai discret, és a dir, tenim un conjunt finit de localitzacions on és possible construir les nostres instal·lacions. També assumirem que, encara que puguem construir diverses instal·lacions, totes seran del mateix tipus i amb les mateixes característiques (és a dir, un conjunt homogeni d'instal·lacions). Com que es tracta de models amb un nivell de flux, només ens preocuparem pel flux de mercaderia sortint de les instal·lacions (podria ser igualment el flux entrant, però només un). Finalment, tota la mercaderia sortint es tractarà com si es tractara d'un únic producte i la demanda serà divisible. Aquest tipus de models es coneixen com a models d'un sol tipus de producte i un nivell de flux (*Single-Commodity Single-Echelon*, SCSE).

Els models SCSE es poden representar mitjançant un graf dirigit bipartit, és a dir, un graf dividit en dos conjunts de vèrtexs on tots els arcs ixen del primer conjunt i acaben en el segon.

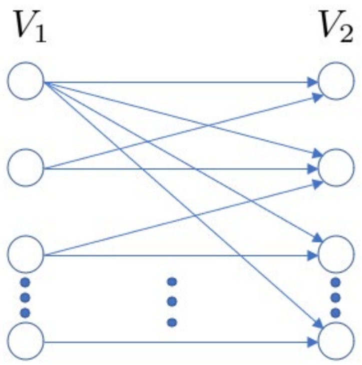


Figura 1: Graf bipartit

En aquest graf bipartit $G = (V_1 \cup V_2, A)$, els vèrtexs de V_1 representen les possibles localitzacions de les instal·lacions (suposem que són plantes de producció) des de les quals ix la mercaderia, mentre que V_2 són els llocs on s'envien els productes que ixen d'aquestes plantes (suposem que són clients). Els arcs representen tots els possibles fluxos de mercaderia des dels potencials magatzems fins als clients.

Cada vèrtex j de V_2, és a dir, cada client, té associada una certa demanda del producte denotada d_j, mentre que cada vèrtex i de V_1 té una certa capacitat de producció denotada q_i. Suposarem que tant la capacitat com la demanda són constants per a qualsevol període de temps. Definim les variables següents:

- u_i = unitats produïdes a la planta $i \quad \forall i \in V_1$
- s_{ij} = unitats enviades des de la planta i al client $j \quad \forall i \in V_1\ \forall j \in V_2$

Definim també la funció $C_{ij}(s_{ij})$ com el cost de transportar s_{ij} unitats de producte des de la planta i fins al client j, i la funció $F_i(u_i)$ com el cost d'operació a nivell u_i de la possible planta i, és a dir, el cost de produir u_i unitats de producte (incloent cost d'obertura i tots els costos necessaris). El problema SCSE es pot resoldre mitjançant el model següent:

$$
\begin{aligned}
&Min \quad && \sum_{i\in V_1}\sum_{j\in V_2} C_{ij}(s_{ij}) + \sum_{i\in V_1} F_i(u_i) && && \\
&s.a: && \sum_{j\in V_2} s_{ij} = u_i && i \in V_1 && (1)\\
& && \sum_{i\in V_1} s_{ij} = d_j && j \in V_2 && (2)\\
& && \sum_{j\in V_2} s_{ij} \leq q_i && i \in V_1 && (3)\\
& && s_{ij} \geq 0 && i \in V_1, j \in V_2 && (4)\\
& && u_i \geq 0 && i \in V_1 && (5)
\end{aligned}
$$

Les variables u_i determinen si es construeix o no la instal·lació, ja que un nivell de producció estrictament major que 0 implica l'obertura d'aquesta planta, mentre que les variables s_{ij} ens indiquen la quantitat de producte que s'envia des de cada planta als clients finals. La funció objectiu és la suma dels costos de transport i els costos d'operació. Les restriccions (1), una per a cada possible planta, diuen que la quantitat total enviada des d'aquesta planta ha de ser igual que la quantitat produïda. Les equacions (2), una per client, obliguen al fet que la quantitat total de producte enviada a cada client siga igual a la seua demanda, mentre que les desigualtats (3), una per planta, impedeixen que la quantitat total enviada (i produïda) sobrepasse la capacitat de producció de la planta.

Observe's que la funció objectiu s'ha construït com la suma de les funcions C_{ij} i F_i, però aquestes funcions poden prendre moltes formes. Un assumpció molt habitual és que el cost de transport per unitat és constant i els costos d'operació són lineals a trossos i còncaus, per exemple:

$$C_{ij}(s_{ij}) = a_{ij}s_{ij}$$
$$F_i(u_i) = \begin{cases} f_i + g_i u_i, & si\ u_i > 0 \\ 0, & si\ u_i = 0 \end{cases}$$

on a_{ij} és el cost de transportar una unitat de producte de i a j, f_i és el cost d'obertura o construcció de la planta i i g_i és el cost de produir una unitat en la planta i. El cost de producció d'una unitat g_i pot afegir-se al cost de transport a_{ij}, per la qual cosa podem definir $b_{ij} = a_{ij} + g_i$, que inclou el cost de produir i transportar una unitat al seu destí. D'aquesta manera, si definim una nova variable

$$y_i = \begin{cases} 1 \text{ si obrim la planta } i \\ 0 \text{ si no} \end{cases}$$

podem reescriure el model com

$$
\begin{aligned}
&Min && \sum_{i\in V_1}\sum_{j\in V_2} b_{ij}s_{ij} + \sum_{i\in V_1} f_i y_i \\
&s.a: && \sum_{i\in V_1} s_{ij} = d_j && j\in V_2 && (1)\\
& && \sum_{j\in V_2} s_{ij} \le q_i y_i && i\in V_1 && (2)\\
& && s_{ij}\ge 0 && i\in V_1,\, j\in V_2 && (3)\\
& && y_i\in\{0,1\} && i\in V_1 && (4)
\end{aligned}
$$

Ja no necessitem les variables u_i. Les restriccions (2) ara indiquen que, si s'obri la planta, la quantitat total enviada des d'aquesta planta no pot sobrepassar-ne la capacitat, mentre que que, si no s'obri, la part de la dreta val 0, la qual cosa obliga al fet que la quantitat total enviada des d'aquesta planta siga 0. Això és el que coneixem com una restricció de capacitat condicionada.

Una altra forma habitual d'expressar aquest model és reemplaçant les variables s_{ij} per unes altres que, en comptes de representar les unitats enviades, representen el percentatge de la demanda coberta:

$$x_{ij} = \text{percentatge de demanda del client } j \text{ cobert per la planta } i$$

D'aquesta manera, es té la relació $s_{ij} = d_j x_{ij}$ i el model queda

$$
\begin{aligned}
&Min && \sum_{i\in V_1}\sum_{j\in V_2} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i\in V_1} f_i y_i \\
&s.a: && \sum_{i\in V_1} x_{ij} = 1 && j\in V_2 && (1)\\
& && \sum_{j\in V_2} d_j x_{ij} \le q_i y_i && i\in V_1 && (2)\\
& && x_{ij}\ge 0 && i\in V_1,\, j\in V_2 && (3)\\
& && y_i\in\{0,1\} && i\in V_1 && (4)
\end{aligned}
$$

on $c_{ij} = b_{ij}d_j = (a_{ij} + g_i)d_j$. Aquest model ha sigut àmpliament estudiat en la literatura i és conegut com el problema de localització de plantes amb capacitats (*Capacitated Plant Location*, CPL).

Exemple (Ghiani i al., 2013)

Milatog és una companyia productora de pinso per a animals. A la província hi ha set granges que tenen unes demandes diàries de pinso de 36, 42, 34, 50, 27, 30 i 43 quintars, respectivament. Milatog pretén comprar plantes productores des de les quals proveir les set granges. S'han identificat sis llocs potencials a la zona, amb una producció diària de pinso de 80, 90, 110, 120, 100 i 120 quintars, respectivament. Els costos fixos de cadascuna de les possibles plantes són (en euros): 321420, 350640, 379860, 401775, 350640 i 336030. Com que la companyia preveu mantenir les operacions durant quatre anys (1461 dies), el cost fix diari per a cada planta (resultant de dividir el cost fix entre el nombre de dies) és de 220, 240, 260, 275, 240 i 230 euros, respectivament. El cost diari de producció d'un quintar de pinso, en euros, per a cada planta és 0,15, 0,18, 0,20, 0,18, 0,15 i 0,17, respectivament. El cost del transport d'un quintar és de 0,06 euros per quilòmetre. Les distàncies des de cada planta fins a cada granja, en quilòmetres, venen donades en la taula 1 (tingues en compte que cada viatge suposa anar i tornar). El fitxer *Tema 3 - Milatog.xlsx* conté el model resolt amb el Solver d'Excel.

		Granja						
		1	2	3	4	5	6	7
Planta	1	18	23	19	21	24	17	9
	2	21	18	17	23	11	18	20
	3	27	18	17	20	23	9	18
	4	16	23	9	31	21	23	10
	5	31	20	18	19	10	17	18
	6	18	17	29	21	22	18	8

Taula 1: Distàncies

Variants del model SCSE

El model que acabem de veure pot adaptar-se a situacions més particulars o complexes modificant o afegint variables i/o restriccions. Per exemple, en algunes situacions, les plantes no són rendibles si no produeixen una quantitat mínima de producte al dia. Per tant, hem d'afegir restriccions que ens asseguren que aquesta quantitat mínima de producció s'aconseguirà en cas que decidim obrir la planta. Si la quantitat mínima diària d'una planta i és q_i^-, les restriccions que hem d'afegir al model seran:

$$\sum_{j \in V_2} d_j x_{ij} \geq q_i^- y_i, \quad i \in V_1$$

Un altre cas interessant és quan, a causa de l'economia a escala, la funció de costos de producció $F_i(u_i)$ és una funció lineal a trossos i còncava, per exemple

$$F_i(u_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } u_i = 0 \\ f_i' + g_i' u_i & \text{si } 0 < u_i \leq \bar{u}_i \\ f_i'' + g_i'' u_i & \text{si } \bar{u}_i < u_i \leq \hat{u}_i \end{cases}$$

En aquest cas només està formada per dos trossos lineals, però podria generalitzar-se a més. Com que aquesta funció no és lineal (ho és a trossos), no podem utilitzar-la directament en el nostre model. Per a adaptar el model a aquesta situació, el que hem de fer és considerar com si tinguérem dues possibles plantes en cada lloc. Una planta "xicoteta" que tindrà els costos del primer tros de la funció, i una planta "gran" que tindrà els costos de la segona part. En realitat, es tracta d'una única planta, però el que farem és decidir quina de les dues versions de la planta obrirem (o cap de les dues). Tindrem, per tant, dues variables d'obertura per a cada planta, $y_{i'}$ i $y_{i''}$, de les quals podem utilitzar-ne una com a màxim. Per tant, haurem d'afegir les restriccions següents:

$$y_{i'} + y_{i''} \leq 1$$

Els costos fixos de les plantes i' e i'' seran f_i' i f_i'', i els costos per unitat produïda g_i' i g_i'', respectivament.

Per una altra banda, si no existeix una limitació en la capacitat màxima de producció de les plantes, les restriccions (2) del model han de modificar-se perquè no es limite la quantitat enviada, però, al mateix temps, si no s'obri la planta no es puga produir ni enviar res des d'aquesta. Això s'aconsegueix escrivint-la de la manera següent:

$$\sum_{j \in V_2} x_{ij} \leq |V_2| y_i, \quad i \in V_1$$

Així, quan la planta no s'obri, la part de la dreta val 0 i la suma del que ix de la planta és 0 obligatòriament. Si la planta s'obri, la part de la dreta és el nombre total de clients, per la qual cosa la restricció no limita en res el valor de les variables de l'esquerra. El model resultant en substituir (2) per aquestes noves restriccions es coneix com el problema de localització de plantes simple (*Simple Plant Location*, SPL).

Una altra restricció habitual consisteix a fixar el nombre de plantes que cal construir. Això s'aconsegueix fàcilment mitjançant l'equació següent:

$$\sum_{i \in V_1} y_i = p$$

on p és el nombre de plantes que es desitja obrir.

També és possible considerar incertesa en el model. La incertesa pot aparèixer en la demanda de cada client o en els costos de transport i/o producció. La introducció d'incertesa pot complicar considerablement la formulació i resolució del problema. Existeixen diferents tècniques per a tenir en compte aquesta variabilitat en les dades. Una és la utilització de diferents *escenaris*. Cada escenari representa diferents possibles situacions, cadascuna amb unes determinades demandes i costos. No sabem quin escenari ocorrerà finalment, però podem assignar una probabilitat d'ocurrència a cadascun (si no tenim ni idea, podem assignar la mateixa probabilitat a tots).

Anomenarem S el conjunt de possibles escenaris. Cada possible escenari $s \in S$ té un conjunt de demandes dels clients d_{js}, uns costos de transport i producció que determinen els coeficients c_{ijs} i una probabilitat d'ocurrència p_s, complint-se que $\sum_{s \in S} p_s = 1$. Llavors, el model SCSE amb incertesa pot formular-se amb les variables següents:

$$x_{ijs} = \text{percentatge de demanda del client } j \text{ cobert per la planta } i \text{ en l'escenari } s$$

$$y_i = \begin{cases} 1 \text{ si s'obri la planta } i \\ 0 \text{ si no} \end{cases}$$

Observe's que la decisió de quines plantes obrir és única per a tots els escenaris, ja que és una decisió que s'ha de prendre abans de saber quin escenari ocorrerà. Però l'assignació de la demanda als clients pot ser diferent en funció de l'escenari que finalment es done. Això sí, hem d'assegurar-nos que les restriccions de demanda i capacitat es compliran en qualsevol dels escenaris. Per a això, el model que s'ha de resoldre és:

$$Min \quad \sum_{s\in S} p_s \sum_{i\in V_1} \sum_{j\in V_2} c_{ijs}x_{ijs} + \sum_{i\in V_1} f_i y_i$$

$$\begin{array}{llll} s.a: & \displaystyle\sum_{i\in V_1} x_{ijs} = 1 & j\in V_2, s\in S & (1) \\ & \displaystyle\sum_{j\in V_2} d_{js}x_{ijs} \leq q_i y_i & i\in V_1, s\in S & (2) \\ & x_{ijs} \geq 0 & i\in V_1, j\in V_2, s\in S & (3) \\ & y_i \in \{0,1\} & i\in V_1 & (4) \end{array}$$

En la funció objectiu, els costos de producció i transport estan ponderats per la probabilitat de l'escenari. Així, escenaris amb una alta probabilitat tindran més influència en la solució obtinguda que aquells amb baixa probabilitat. Les restriccions són les mateixes que en el model bàsic, però repetides per a tots els escenaris.

Problemes de localització-cobriment

En els problemes de localització-cobriment, l'objectiu consisteix a decidir la localització d'una sèrie d'instal·lacions de manera que tots els usuaris/clients de la instal·lació puguen ser servits dins d'un límit màxim de temps i minimitzant el cost d'obertura de les instal·lacions.

En aquest cas, representarem el problema mitjançant un graf no dirigit $G = (V_1 \cup V_2, E)$, on V_1 són les possibles localitzacions de les instal·lacions, V_2 representa el conjunt de clients i el conjunt d'arestes E representa els camins més curts entre instal·lacions i clients. Cada possible instal·lació $i \in V_1$ té associat un cost d'obertura f_i. A més, tindrem una matriu A de dimensió $|V_1| \times |V_2|$ formada per zeros i uns, anomenada matriu de cobriment, on cada element a_{ij} prendrà el valor 1 si el client j pot ser servit des de la instal·lació i (perquè compleix els requisits de distància, temps… que hàgem establit) i 0 si no pot ser servit.

Per a modelitzar el problema, utilitzarem les variables següents:

$$y_i = \begin{cases} 1 \text{ si obrim la planta } i \\ 0 \text{ si no} \end{cases}$$

El model que caldria resoldre seria el següent:

$$Min \quad \sum_{i\in V_1} f_i y_i$$

$$\begin{array}{llll} s.a: & \displaystyle\sum_{i\in V_1} a_{ij} y_i \geq 1 & j\in V_2 & (1) \\ & y_i \in \{0,1\} & i\in V_1 & (2) \end{array}$$

La funció objectiu representa el cost total d'obertura de les instal·lacions. Les restriccions (1) obliguen al fet que tot client puga ser servit des d'almenys una instal·lació. Aquest model no sols s'utilitza per a resoldre problemes de localització-cobriment, sinó que apareix també a l'hora de resoldre molts altres problemes (el veurem, per exemple, com a part d'algun problema de rutes de vehicles en el tema 4). Es coneix també com el problema de cobriment de conjunts (*Set-covering*, SC), i ha sigut àmpliament estudiat en la literatura.

Exemple (Ghiani i al., 2013)

A Portugal, l'administració de Coïmbra necessita situar estacions de bombers per a cobrir set districtes residencials de la ciutat en un temps màxim de 16 minuts. Les distàncies entre els centres de cada districte venen donades en la taula 2, i la velocitat mitjana de viatge es considera 65 km/h. Els costos anuals de les estacions, donats en milers d'euros, són 200, 160, 240, 220, 180, 180 i 220. L'objectiu és decidir quines estacions de bombers obrir minimitzant el cost i garantint que tots els districtes estan coberts. El fitxer *Tema 3 – Coïmbra.xlsx* conté el model resolt amb Solver.

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	8	24	18	30	20	16
2	8	0	30	120	14	4	6
3	24	30	0	16	12	10	18
4	18	120	16	0	18	20	6
5	30	14	12	18	0	4	100
6	20	4	10	20	4	0	54
7	26	6	28	6	100	54	0

Taula 2: Distàncies entre districtes

Variants del model de localització-cobriment

Si els costos d'obertura són iguals per a totes les instal·lacions, l'objectiu és equivalent a minimitzar el nombre d'instal·lacions obertes, i és possible que existisquen múltiples solucions òptimes alternatives. En aquest cas, pot ser interessant introduir un segon criteri per a triar entre aquestes alternatives. Per exemple, minimitzar els temps de recorregut. Per a incloure això en el model, necessitem definir un altre conjunt de variables binàries:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si el client } j \text{ es servit des de la instal·lació } i \\ 0 \text{ si no} \end{cases}$$

Si t_{ij} és el temps de viatge des de la instal·lació i al client j, i M és un valor gran arbitrari, el model quedaria:

$$Min \qquad \sum_{i \in V_1} M y_i + \sum_{i \in V_1} \sum_{j \in V_2} t_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{array}{llll} s.a: & \displaystyle\sum_{i \in V_1} a_{ij} x_{ij} \geq 1 & j \in V_2 & (1) \\ & \displaystyle\sum_{j \in V_2} x_{ij} \leq |V_2| y_i & i \in V_1 & (2) \\ & y_i \in \{0,1\} & i \in V_1 & (3) \\ & x_{ij} \in \{0,1\} & i \in V_1, j \in V_2 & (4) \end{array}$$

El valor M s'utilitza perquè la part de la funció objectiu que calcula el nombre d'instal·lacions obertes tinga molt més pes que la part del total de temps emprat i, d'aquesta manera, es prioritze minimitzar el nombre d'instal·lacions obertes. Les restriccions (1) obliguen al fet que tots els clients siguen servits per almenys una instal·lació d'entre les que compleixen els requisits. Les desigualtats (2) impedeixen que es puga assignar un client a una instal·lació que no haja sigut oberta. Observe's que es tracta d'un model multiobjectiu.

Una altra forma alternativa d'incloure aquest segon objectiu consistiria a resoldre primer el model que només minimitza el nombre d'instal·lacions:

$$Min \qquad \sum_{i \in V_1} y_i$$

$$\begin{array}{llll} s.a: & \displaystyle\sum_{i \in V_1} a_{ij} y_i \geq 1 & j \in V_2 & (1) \\ & y_i \in \{0,1\} & i \in V_1 & (2) \end{array}$$

Una vegada es coneix el nombre mínim d'instal·lacions, siga aquest p, resolem un segon model similar al que acabem de veure fixant el nombre d'instal·lacions construïdes a p mitjançant una nova restricció:

$$Min \qquad \sum_{i \in V_1} \sum_{j \in V_2} t_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{array}{llll} s.a: & \displaystyle\sum_{i \in V_1} a_{ij} x_{ij} \geq 1 & j \in V_2 & (1) \\ & \displaystyle\sum_{j \in V_2} x_{ij} \leq |V_2| y_i & i \in V_1 & (2) \\ & \displaystyle\sum_{i \in V_1} y_i = p & & (3) \\ & y_i \in \{0,1\} & i \in V_1 & (4) \\ & x_{ij} \in \{0,1\} & i \in V_1, j \in V_2 & (5) \end{array}$$

Un altre possible criteri de desempat quan tenim diverses solucions òptimes amb el mateix nombre d'instal·lacions construïdes és l'anomenat *doble cobriment*. Amb aquest criteri pretenem triar la solució que, a més de minimitzar el nombre d'instal·lacions construïdes, intente maximitzar el nombre de clients que tenen almenys dues instal·lacions que complisquen amb els criteris de distància/temps per a poder ser atesos des d'aquestes. D'aquesta manera, es persegueix que el client tinga una instal·lació alternativa per al cas en el qual la seua instal·lació inicialment assignada no estiguera en funcionament o estiguera saturada. Per a modelitzar aquesta situació, necessitem definir les variables

$$y_i = \begin{cases} 1 \text{ si s'obri la instal·lació } i \\ 0 \text{ si no} \end{cases}$$

$$s_j = \begin{cases} 1 \text{ si el client } j \text{ està cobert per, almenys, dos instal·lacions} \\ 0 \text{ si no} \end{cases}$$

El model seria:

$$
\begin{array}{llll}
Min & M \sum_{i \in V_1} y_i - \sum_{j \in V_2} s_j & & \\
s.a: & \sum_{i \in V_1} a_{ij} y_i - s_j \geq 1 & j \in V_2 & (1) \\
 & y_i \in \{0,1\} & i \in V_1 & (2) \\
 & s_j \in \{0,1\} & j \in V_2 & (3)
\end{array}
$$

La funció objectiu li dona un pes gran M al nombre d'instal·lacions obertes perquè aquest siga l'objectiu prioritari (igual que en el model anterior). La segona part de la funció és el nombre total de clients coberts per, almenys, dues instal·lacions. Com que s'està minimitzant la funció objectiu, per a maximitzar aquest nombre hem de canviar-li el signe i posar-lo en negatiu. Les restriccions (1) són una variació de les desigualtats de cobriment de models anteriors. Si el client està cobert per una única instal·lació, el sumatori valdrà 1 i, obligatòriament, la variable s_j prendrà el valor 0. Si, en canvi, està cobert per dues o més instal·lacions, aquest sumatori valdrà 2 o més, amb el que la variable s_j podrà valdre 1.

En algunes situacions, és possible deixar sense servir alguns clients a canvi de pagar una penalització per això. Per a modelitzar això són necessàries les variables següents:

$$
y_i = \begin{cases} 1 \text{ si s'obri la instal·lació } i \\ 0 \text{ si no} \end{cases}
$$

$$
z_j = \begin{cases} 1 \text{ si el client } j \text{ no és servit} \\ 0 \text{ si sí que és servit} \end{cases}
$$

I el model serà:

$$
\begin{array}{llll}
Min & \sum_{i \in V_1} f_i y_i + \sum_{j \in V_2} p_j z_j & & \\
s.a: & \sum_{i \in V_1} a_{ij} y_i + z_j \geq 1 & j \in V_2 & (1) \\
 & y_i \in \{0,1\} & i \in V_1 & (2) \\
 & z_j \in \{0,1\} & j \in V_2 & (3)
\end{array}
$$

La funció objectiu inclou un primer terme amb els costos de les instal·lacions obertes i un segon terme amb les penalitzacions pels clients no servits. Cada client pot tenir una penalització associada diferent p_j. Les restriccions (1) s'han modificat per a obligar al fet que, o bé el sumatori és major o igual que 1 (vol dir que el client està servit) o bé la variable z_j val 1 (el client no està servit).

Quan cada usuari té associada una demanda d_j i no és possible servir a tots els usuaris perquè el nombre d'instal·lacions a construir està limitat i no pot sobrepassar un cert nombre p, convé plantejar el problema com un model de *màxim cobriment*. Per a això, definim el mateix tipus de variables que en el model anterior:

$$
y_i = \begin{cases} 1 \text{ si s'obri la instal·lació } i \\ 0 \text{ si no} \end{cases}
$$

$$
z_j = \begin{cases} 1 \text{ si el client } j \text{ és servit} \\ 0 \text{ si no és servit} \end{cases}
$$

I modelitzem el problema com:

$$
\begin{array}{llll}
Max & \sum_{j \in V_2} d_j z_j & & \\
s.a: & \sum_{i \in V_1} a_{ij} y_i \geq z_j & j \in V_2 & (1) \\
& \sum_{i \in V_1} y_i \leq p & & (2) \\
& y_i \in \{0, 1\} & i \in V_1 & (3) \\
& z_j \in \{0, 1\} & j \in V_2 & (4)
\end{array}
$$

La funció objectiu consisteix a maximitzar la demanda total coberta. Les desigualtats (1) obliguen al fet que la variable z_j només puga valdre 1 si el client està cobert per alguna instal·lació, mentre que la desigualtat (2) limita el nombre total d'instal·lacions que poden ser obertes.

Problemes del p-centre

En aquests problemes l'objectiu és situar p instal·lacions de manera que el temps màxim de viatge entre els clients i la seua instal·lació més pròxima siga el mínim possible. D'aquesta manera es persegueix proporcionar un servei equitatiu a tots els clients i que no hi haja cap que estiga especialment lluny de la instal·lació més pròxima.

Encara que existeixen versions del problema en les quals les instal·lacions poden col·locar-se en qualsevol lloc de la xarxa (tant en vèrtexs com a la meitat d'un enllaç), estudiarem només el cas en el qual les instal·lacions poden situar-se només en els vèrtexs. Siga $G = (V, E)$ un graf no dirigit, on el conjunt de vèrtexs V representa tots aquells punts on es pot construir una instal·lació, E representa els camins més curts entre aquests vèrtexs i tenim un subconjunt de vèrtexs $V' \subset V$ que són aquells vèrtexs en els quals hi ha clients. Cada aresta (i, j) té associat un temps de recorregut t_{ij}, que és el temps de viatge des de i fins a j. Definim les variables següents:

$$
x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si el client } j \text{ és servit des de la instal·lació } i \\ 0 \text{ si no} \end{cases}
$$

$$
y_i = \begin{cases} 1 \text{ si s'obri la instal·lació } i \\ 0 \text{ si no} \end{cases}
$$

A més, tindrem una variable z que representarà el temps màxim de viatge de qualsevol client a la seua instal·lació més pròxima. El model a resoldre serà:

$$Min \quad z$$

$$
\begin{aligned}
s.a: \quad & \sum_{i \in V} y_i = p & & (1)\\
& \sum_{i \in V} x_{ij} = 1 & j \in V' \quad & (2)\\
& \sum_{j \in V'} x_{ij} \leq |V'| y_i & i \in V \quad & (3)\\
& \sum_{i \in V} t_{ij} x_{ij} \leq z & j \in V' \quad & (4)\\
& y_i \in \{0, 1\} & i \in V \quad & (5)\\
& x_{ij} \in \{0, 1\} & i \in V, j \in V' \quad & (6)
\end{aligned}
$$

La funció objectiu minimitza el major temps de viatge dels clients, representat per la variable z. Aquesta variable pren el valor del temps de viatge més llarg gràcies a les restriccions (4), que obliguen al fet que z siga major igual que el temps de viatge de tots els clients. Aquesta és la forma habitual de poder minimitzar el màxim d'un conjunt de valors en el que es coneixen com a problemes min-max. La restricció (1) fixa el nombre d'instal·lacions que hem d'obrir. Les equacions (2) indiquen que cada client ha de ser assignat a una instal·lació, mentre que les desigualtats (3) impedeixen que puguem assignar clients a una instal·lació que no s'ha obert.

Bibliografia

Chopra, S. i Meindl, P. (2013). *Administración de la cadena de suministro: estrategia, planificación y operación*. 5a ed. Pearson Educación de México.

Ghiani, G., Laporte. G. i Musmanno, R. (2013). *Introduction to Logistics Systems Management*. 2a ed. Wiley.

Tema 4 – Problemes de rutes de vehicles

Una vegada les mercaderies estan llestes per a ser distribuïdes als clients (o centres de distribució, o magatzems), aquestes ha de ser carregades en vehicles, generalment camions, que han de seguir una ruta determinada per a repartir-les. Dissenyar adequadament aquestes rutes resulta de vital importància, ja que permet reduir costos (combustible, hores de treball, nombre de camions…), disminuir la quantitat d'emissions contaminants i millorar el servei al client. Aquest tipus de problemes en els quals tractem de dissenyar rutes òptimes es coneixen com a problemes de rutes de vehicles. En aquest tema estudiarem alguns dels problemes de rutes de vehicles més coneguts, així com diverses tècniques per a resoldre'ls.

Introducció

Dins de la problemàtica de la distribució de mercaderies, hem de distingir entre dos tipus de problemes: els problemes de rutes definits en distàncies curtes i els definits per a distàncies llargues.

En els problemes de rutes en distàncies llargues, les mercaderies es mouen generalment entre terminals de transport i/o instal·lacions (magatzems, centres de distribució…). Els mitjans de transport utilitzats solen ser vaixells, avions, trens o camions de gran capacitat, i el transport sol ocupar llargs períodes de temps (dies o setmanes). Aquest tipus de problemes es tractaran en el tema 5.

Els problemes de rutes en distàncies curtes són els que solen aparèixer en la distribució del producte al client final. Els vehicles utilitzats solen ser camions o furgonetes, i cada ruta està composta d'una seqüència de punts que cal visitar (els clients). Aquests repartiments solen fer-se en períodes relativament curts de temps, màxim un dia. Aquest tipus de problemes, que són els que abordarem en aquest tema, també es coneixen com a problemes de repartiment d'última milla. No sols apareixen en el repartiment d'articles als clients, sinó també en contextos com el transport urgent, repartiment de correu, recollida de fem, rutes per a serveis de reparació…

El disseny de les rutes dels vehicles és una decisió d'àmbit operatiu, ja que normalment aquestes rutes han de ser recalculades amb freqüència (cada dia o setmana), o fins i tot han de ser modificades sobre la marxa. No obstant això, la resolució d'aquests problemes també ens pot ajudar a prendre algunes decisions que poden considerar-se d'àmbit tàctic, com la composició d'una flota de vehicles.

Per a representar els problemes de rutes utilitzarem grafs. Els vèrtexs hi poden representar punts on hem de fer un servei (clients que visitar) o simplement interseccions entre carrers o carreteres. Els enllaços del graf representaran els carrers, carreteres o camins que uneixen els vèrtexs.

Dins dels problemes de rutes, podem trobar dues grans famílies: els *problemes de rutes per vèrtexs* i els *problemes de rutes per arcs*. En els problemes de rutes per vèrtexs, l'objectiu serà dissenyar rutes que visiten una sèrie de vèrtexs del graf (perquè hem de visitar els clients que s'hi troben per a recollir o entregar mercaderia o fer algun servei). En els problemes de rutes per arcs, en canvi, l'objectiu no és visitar uns vèrtexs concrets, sinó recórrer una sèrie d'enllaços del graf, ja que el servei que farem es du a terme recorrent el carrer (per exemple, netejar el carrer, retirar neu, recollir fem…).

Factors a tenir en compte

A l'hora de plantejar el problema que hem de resoldre per a dissenyar rutes de vehicles, existeixen una sèrie de factors que hem de considerar per a conèixer amb detall les característiques del nostre problema i, per tant, el model i mètode de resolució que hem d'emprar:

Demanda

Cada client que cal visitar té associada una certa demanda, les característiques de la qual influeixen de manera determinant en el tipus de problema que haurem de resoldre:

- Hem d'entregar mercaderia, recollir-la, o totes dues coses? Si cal recollir i entregar, és mercaderia que es recull en un punt i s'entrega en un altre, o no hi ha relació entre recollides i lliuraments?
- Podem entregar/recollir la mercaderia en qualsevol moment, o hi ha uns horaris predeterminats per a fer-ho (finestres temporals)?
- Les comandes es componen d'un únic tipus de mercaderia, o tenim diversos tipus diferents?
- La demanda d'un client ha de ser servida per un únic vehicle, o podem repartir-la entre dievrsos en diferents moments?
- Els clients són tots iguals, o existeix algun tipus de prioritat, de manera que hàgem de servir alguns clients abans que uns altres?
- La demanda és coneguda *a priori*, o no es coneix amb exactitud fins a arribar al client?

Vehicles

Les característiques de la nostra flota de vehicles també poden influir en la manera de plantejar el problema:

- La flota és homogènia (tots els vehicles són iguals) o heterogènia (vehicles amb diferents característiques)?
- Hi ha limitacions de temps de treball o de capacitat per als vehicles?
- Tenen un sol compartiment, o n'hi ha diversos per a diferents tipus de mercaderia?
- Existeix algun tipus d'incompatibilitat entre vehicles i clients? Per exemple, si un client està situat en un carrer estret, els vehicles de grans dimensions no podran accedir-hi.
- Existeixen incompatibilitats entre vehicles i mercaderies? Per exemple, si la mercaderia necessita mantenir-se a baixa temperatura, no podrà ser transportada per un vehicle que no tinga cambra refrigerada.
- La grandària de la flota és fixa, o podem afegir o eliminar vehicles?
- Els vehicles ixen tots del mateix lloc (depòsit), o cadascun pot tenir un depòsit diferent? Han de tornar al depòsit en acabar?

Conductors

També poden existir condicionants que afecten els conductors dels vehicles.

- Quin tipus de contracte tenen els conductors (fix, autònom, per hores…)?

- El nombre de conductors disponibles, és fix o variable?
- Hem de tenir en compte descansos, temps per a menjar…?

Dades rellevants de les quals hem de disposar

A més dels condicionants anteriors, les dades de les quals puguem disposar que siguen rellevants per al nostre problema també determinaran les característiques del nostre model. Algunes de les dades que podem / hem de tenir en compte són:

- Localització dels clients: hem de saber on estan els clients, és a dir, els punts que els nostres vehicles han de visitar.
- Temps de viatge: generalment, necessitarem conèixer els temps de viatge entre clients i del depòsit als clients. Aquests temps poden ser constants, variables que depenguen del moment en què es faça el trajecte (si és hora punta, o no), aleatoris amb una certa distribució…
- Distàncies: un altre element que hem de tenir en compte són les distàncies entre clients. Si es considera una velocitat constant (poc realista, però més senzill), els temps de viatge seran proporcionals a les distàncies.
- Regulacions de trànsit: pot ser que hàgem de tenir en compte algunes normes per al disseny de les nostres rutes (velocitats màximes, tipus de vehicles que poden circular per cada carretera, girs prohibits…).
- Costos fixos: a més dels costos associats a les distàncies recorregudes, pot ser que existisquen costos fixos per l'ús de cada vehicle.

La resposta a aquestes preguntes i les dades de les quals disposem determinaran a quin tipus de problema ens enfrontem. Òbviament, no és possible veure en aquesta assignatura tots els models possibles per a totes les combinacions de factors abans descrits. I encara que així fora, això no cobriria tota la casuística que pot donar-se en la vida real, ja que cada empresa i situació té les seues característiques particulars. Per tant, el que veurem a continuació és una representació dels models bàsics més comuns que poden servir-nos com a punt de partida per a resoldre problemes reals.

Problemes de rutes de vehicles per vèrtexs

Els problemes de rutes de vehicles per vèrtexs són aquells en què el servei que els vehicles han de fer (generalment, recollir o entregar mercaderia) està situat en punts concrets i per a dur-lo a terme és necessari visitar aquests punts. Representem aquests problemes gràficament mitjançant grafs, on el conjunt de vèrtexs correspon als clients (encara que també poden representar el/els depòsit/s o interseccions entre carrers o carreteres) i els enllaços són els trajectes que connecten els clients. La figura 1 representa el graf corresponent a un problema amb cinc clients. Les arestes del graf són tots els possibles trajectes entre clients.

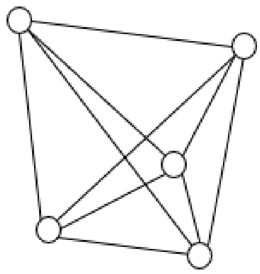


Figura 1: Graf per a un problema de rutes per vèrtexs

Cada enllaç del graf té associat almenys un cost, que pot representar la distància o el temps de viatge entre els seus dos extrems. L'objectiu d'un problema de rutes per vèrtexs és trobar una (o diverses) rutes que visiten tots els clients amb un cost total mínim. Addicionalment, pot haver-hi més dades i restriccions que hàgem de tenir en compte a l'hora de construir les rutes (demandes, capacitats, depòsits, horaris…).

A continuació, veurem alguns dels problemes de rutes per vèrtexs bàsics.

El problema del viatjant (*Traveling Salesman Problem*, TSP)

El problema del viatjant o TSP és el problema de rutes per vèrtexs més bàsic i el més conegut i estudiat. Donat un graf complet $G = (V, E)$ amb un conjunt de vèrtexs V que representen els clients, un conjunt d'arestes E que representen el camí més curt i, per a cada aresta $(i, j) \in E$ entre un parell de vèrtexs $i, j \in V$, un cost c_{ij} corresponent al cost de recórrer aquesta aresta, el TSP consisteix a trobar una ruta (també anomenada *cicle* o *tour*) tancada (que comence i acabe en el mateix vèrtex) visitant tots els vèrtexs amb cost total mínim.

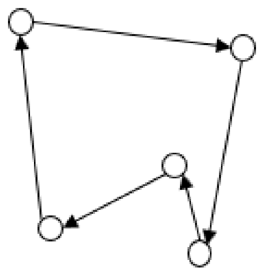


Figura 2: Tour *del TSP*

La figura 2 mostra un *tour* del TSP corresponent al graf de la figura 1 (encara que no sabem si és la solució òptima del TSP, ja que no coneixem els costos).

El TSP il·lustra la situació en la qual un representant ha de visitar una sèrie de clients recorrent per a això la mínima distància possible. Encara que és un problema que no sol tenir moltes aplicacions reals directes (els problemes reals solen tenir molts més condicionants i característiques addicionals), apareix com a component bàsic de molts problemes de rutes més complexos. Malgrat l'aparent simplicitat, és un problema NP-difícil, per la qual cosa no s'espera poder desenvolupar algorismes que el resolguen de manera òptima en temps polinòmic.

Formulació del TSP

Podem formular el TSP com un problema de programació lineal entera emprant les variables següents:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si l'aresta } (i, j) \text{ és recorreguda} \\ 0 \text{ si no} \end{cases}$$

És fàcil deduir que, si el graf és complet (i si no ho és, sempre podem completar-lo calculant camins més curts) mai serà necessari recórrer una aresta més d'una vegada.

Donat un conjunt de vèrtexs $S \subset V$, anomenem *tall* $\delta(S)$ el conjunt d'arestes que tenen un extrem en S i l'altre en $V \setminus S$, és a dir, $\delta(S) = \{(i, j) \in E : i \in S, j \in V \setminus S \text{ o } i \in V \setminus S, j \in S\}$. Quan el conjunt S està format per un únic vèrtex i, escrivim $\delta(i)$ per a representar totes les arestes incidents amb aquest vèrtex.

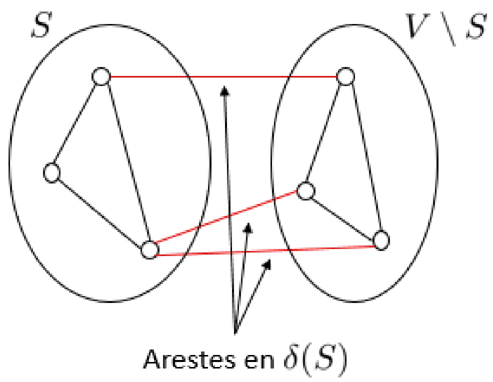


Figura 3: Exemple de tall

D'aquesta manera, la formulació del TSP serà:

$$Min \quad \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij}$$

$$
\begin{array}{llll}
s.a: & \displaystyle\sum_{(i,j)\in\delta(i)} x_{ij} = 2 & i \in V & (1) \\
& \displaystyle\sum_{(i,j)\in\delta(S)} x_{ij} \geq 2 & S \subset V, |S| \geq 2 & (2) \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} & (i, j) \in E & (3)
\end{array}
$$

La funció objectiu calcula el cost total de la ruta, és a dir, de les arestes utilitzades en la ruta. Les equacions (1) asseguren que tots els vèrtexs seran visitats exactament una vegada (per a això, és necessari que s'usen dues arestes incidents amb cada vèrtex, una per a entrar i una altra per a eixir). Les desigualtats (2) es diuen *restriccions de connectivitat*, i fan que la solució siga una ruta connexa. Si no les incloguérem, podríem obtenir solucions com les de la figura 4, que no és connexa. Les restriccions de connectivitat obliguen al fet que, per a qualsevol tall, siga obligatori creuar-lo almenys dues vegades, amb la qual cosa aquesta solució no seria possible.

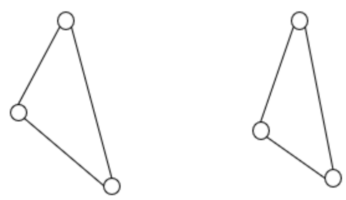


Figura 4: Solució no connexa

La solució no connexa de la figura 4 està formada per dos cicles. Aquests cicles reben el nom de *subtours*. Les desigualtats de connectivitat poden substituir-se per aquestes altres, que reben el nom de *restriccions d'eliminació de subtours*:

$$\sum_{(i,j)\in E(S)} x_{ij} \leq |S| - 1 \quad S \subset V$$

on $E(S)$ és el conjunt d'arestes amb tots dos extrems en S.

Aquesta formulació té un inconvenient: per a assegurar completament que la solució serà connexa, fan falta tantes desigualtats de connectivitat com possibles subconjunts S amb almenys dos vèrtexs. Això suposa un nombre de desigualtats que és exponencial sobre el nombre de vèrtexs del graf, per la qual cosa, per a un graf mitjanament gran, és impossible escriure totes les desigualtats de connectivitat. Per exemple, per a un graf amb 7 vèrtexs serien necessàries 259 desigualtats de connectivitat, i per a un de 8 vèrtexs, 1400.

Com podem, llavors, obtenir la solució òptima d'aquesta formulació? Podem recórrer a una mena d'algorisme conegut com a *plans de tall*.

Algorisme de plans de tall

L'algorisme de plans de tall consta dels passos següents:

1. Resoldre una relaxació del problema original (és a dir, una versió simplificada del model de la qual hem llevat algunes restriccions).
2. Trobar, entre les restriccions que hem relaxat en el pas 1, aquella que és *violada* (incomplida) per la solució que hem trobat.
3. Si hem trobat una restricció violada, afegir-la al problema, resoldre'l i tornar al pas 2. Si no existeix cap restricció violada, la solució que hem trobat és òptima.

Aquest tipus d'algorisme no és exclusiu del TSP, pot aplicar-se a molts problemes, i és útil quan tenim un conjunt de restriccions en la formulació que no podem incloure al complet. Aplicat a la formulació del TSP que acabem de veure, l'algorisme consistiria a començar eliminant les restriccions de connectivitat de la formulació i resoldre la relaxació resultant (mitjançant algun mètode per a problemes lineals enters, per exemple, ramificació i acotació). Això ens donarà una solució que probablement no és connexa (com la de la figura 4). Ara hem de trobar un tall que separe la solució en dos (o més) *subtours*. Aquest tall correspondrà a una desigualtat de connectivitat que està violada per aquesta solució, així que hem d'incorporar-lo a la relaxació del problema que hem resolt anteriorment. Tornem a resoldre el problema, analitzar la solució i afegir les restriccions que facen falta, i així successivament, fins que aconseguim una solució que ja és connexa, per la qual cosa no existeixen desigualtats de connectivitat violada i aquesta serà la solució òptima del TSP. D'aquesta manera, no és necessari incorporar totes les desigualtats de connectivitat existents a la formulació, sinó només aquelles que són imprescindibles.

Exemple

Un representant ha de visitar clients en 10 ciutats espanyoles: A Corunya, Albacete, Alacant, Burgos, Granada, Múrcia, Oviedo, Salamanca, Santiago i València. Resol un TSP mitjançant un algorisme de plans de tall per a trobar la ruta que passe per totes les ciutats amb distància total mínima. La solució pot veure's en el fitxer *Tema 4 – TSP Espanya.xlsx*.

Així i tot, per a problemes molt grans aquest mètode pot no ser eficient, ja que és necessari resoldre un problema lineal enter cada vegada que afegim desigualtats noves, i el nombre de desigualtats necessàries pot ser elevat. Per a no haver d'aplicar l'algorisme de ramificació i tall cada vegada, és possible relaxar la condició que les variables siguen enteres. Quan la solució que obtinguem tinga valors no fraccionaris, es coneix que ha d'haver-hi alguna desigualtat vàlida per al problema que *talle* aquesta solució no factible. Només hem de trobar-la i afegir-la al problema. Si fórem capaços de trobar sempre aquesta desigualtat que ens fa falta, no seria necessari recórrer a la ramificació. Per això es continua estudiant el conjunt de solucions del TSP a la recerca de noves famílies de desigualtats vàlides que puguen ser utilitzades per a la resolució del problema. Existeixen moltes d'aquestes famílies de desigualtats conegudes: desigualtats pinta, *clique*…, però són massa complexes i no les estudiarem ací.

Quan el problema és massa difícil per a aplicar mètodes exactes per a resoldre'l, hem de recórrer als algorismes heurístics, que ens permeten obtenir solucions molt bones, en alguns casos òptimes (encara que sense garantia que ho siguen) en temps raonables.

Algorismes heurístics per al TSP

Donada la importància del TSP, un gran nombre d'algorismes heurístics i metaheurístics han sigut desenvolupats per a la resolució d'aquest problema. Entre els mètodes heurístics constructius per al TSP més coneguts, trobem els algorismes del veí més pròxim, dels estalvis, d'inserció… També s'han dissenyat multitud d'algorismes de millora: k-òptim, Or-òptim, Lin-Kernighan… Finalment, la gran majoria d'algorismes metaheurístics han sigut provats amb el TSP: cerca tabú, temperat simulat, GRASP, genètics…

A continuació, veurem alguns dels algorismes constructius més emprats per a obtenir solucions del TSP.

Algorisme del veí més pròxim

Segurament es tracta de l'algorisme més senzill que puguem imaginar. Es tria un vèrtex qualsevol com a inici de la ruta i, en cada pas successiu, afegim el vèrtex més pròxim (amb menor distància) a l'últim afegit i l'incorporem al final de la ruta que construïm. Quan ja s'han afegit tots els vèrtexs, es tanca la ruta tornant al vèrtex inicial. Si es repeteix aquest procés partint de diferents vèrtexs inicials, pot donar lloc a solucions diferents.

És un algorisme molt fàcil d'aplicar, però les solucions obtingudes no solen ser molt bones, ja que els últims vèrtexs afegits per l'algorisme solen distar molt entre si, especialment en els últims passos.

Algorisme dels estalvis (Clark i Wright)

Per a aplicar aquest algorisme comencem triant un vèrtex inicial, anomenem-lo k. Ara calculem els estalvis per a cada parell de vèrtexs i, j, definits com $s_{ij} = c_{ik} + c_{kj} - c_{ij}$. Aquest valor representa quant estalviaríem en distància si, en comptes de viatjar des del vèrtex inicial k al vèrtex i i tornar al k (i el mateix per al j), visitàrem el vèrtex j a continuació del i i després tornàrem a l'inicial. En la figura 5 podem veure un exemple del que succeeix en fer això. Inicialment, la ruta segueix la seqüència $k - i - k - j - k$. En visitar el vèrtex j a continuació del i, desapareixen les arestes verdes i afegim la roja, amb la qual cosa, reduïm la distància total recorreguda en $c_{ik} + c_{kj}$, però l'augmentem en c_{ij}. Per tant, com més gran siga l'estalvi, millor. Agafem el primer estalvi s_{ij} de la llista (el major) i incorporem el vèrtex j a la ruta on està el vèrtex i a continuació d'aquest, sempre que no es forme un *subtour*. Continuem recorrent la llista i incorporant els vèrtexs que puguem fins que es complete la ruta.

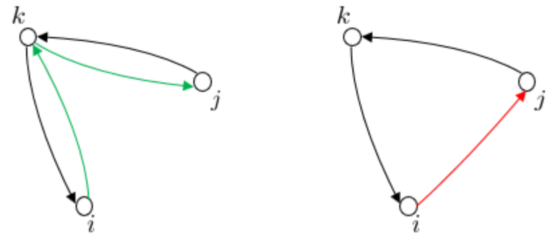


Figura 5: Exemple d'estalvi

Algorisme d'inserció del més pròxim

Aquest algorisme va inserint un a un els vèrtexs en la seua posició idònia. Suposem que ja tenim construïda una ruta parcial, és a dir, que visita alguns vèrtexs, però no tots. Ara busquem el vèrtex k més pròxim a la ruta parcial. Es considera que el vèrtex més pròxim és aquell la distància del qual al vèrtex més pròxim de la ruta és mínima. Si i, j són dos vèrtexs consecutius en la ruta parcial, inserir el vèrtex k en la ruta entre aquests dos vèrtexs faria incrementar el cost de la ruta en $c_{ik} + c_{kj} - c_{ij}$ (vegeu figura 6). Per tant, inserim el vèrtex k entre aquells dos vèrtexs per als quals l'increment del cost és menor. Continuem l'algorisme inserint vèrtexs d'aquesta manera fins que la ruta estiga completa. Per a iniciar la ruta al principi de l'algorisme, es tria un vèrtex qualsevol i el seu vèrtex més pròxim.

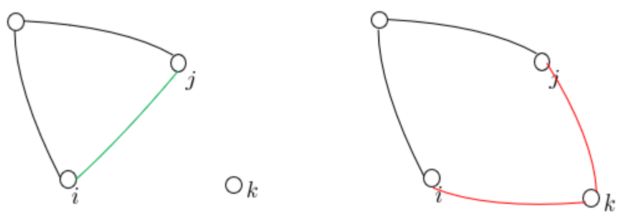


Figura 6: Increment del cost en l'algorisme d'inserció

Variants de l'algorisme d'inserció

En l'algorisme d'inserció que acabem de veure, en cada pas se selecciona el vèrtex que està més prop de la ruta parcial i s'insereix en la seua posició ideal en aquest moment. Si canviem el criteri d'elecció del vèrtex a inserir, obtenim diferents variants de l'algorisme que poden donar lloc a resultats diferents. Alguns dels criteris que es poden emprar són:

- **Inserció del més llunyà**: en comptes de seleccionar el vèrtex més pròxim a la ruta parcial, es tria el més llunyà (aquell per al qual la mínima de les distàncies als vèrtexs de la ruta és el més gran possible).
- **Inserció més barata**: s'avalua el cost d'inserció en la seua posició ideal per a tots els vèrtexs que no estan en la ruta, i es tria aquell la inserció del qual resulta en un increment menor del cost de la ruta.
- **Inserció aleatòria**: el vèrtex que s'insereix en cada pas es tria de manera aleatòria.

El problema de rutes de vehicles amb capacitats (*Capacitated Vehicle Routing Problem*, CVRP)

En el CVRP tenim un graf no dirigit $G = (V, E)$. El conjunt de vèrtexs V conté els clients més un vèrtex especial que representa el depòsit, des del qual parteixen i al qual han d'arribar tots els vehicles. El conjunt d'arestes E representa els camins entre clients i depòsit. Cada aresta té un cost associat c_{ij}, i cada client $i \in V$ té una demanda d_i. Disposem d'una flota de vehicles (el nombre dels quals pot ser fix o variable), cadascun dels quals té una capacitat C. L'objectiu és trobar un conjunt de rutes amb cost total mínim, de forma que totes les rutes comencen i acaben en el depòsit, tots els clients siguen visitats per una ruta i la demanda servida en cada ruta no sobrepasse la capacitat C.

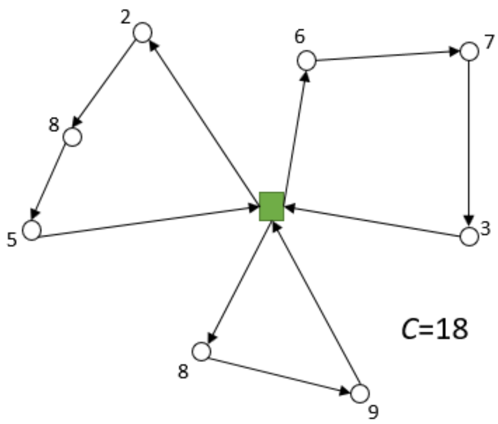


Figura 7: Exemple de solució del CVRP

Per suposat, el CVRP és NP-difícil, ja que conté el TSP com a cas particular (amb un vehicle, demandes unitàries i capacitat igual al nombre de clients).

Formulació del CVRP

Per a formular el CVRP utilitzarem les variables següents:

$$x_{ij} = \text{nombre de vegades que l'aresta } (i, j) \text{ és utilitzada}$$

Cal assenyalar dues coses interessants sobre aquestes variables. La primera és que no distingeixen quin vehicle recorre cada aresta. No obstant això, una vegada obtinguda la solució, no és difícil diferenciar la ruta de cada vehicle. La segona és que, a diferència del TSP, les variables ací no són binàries i poden ser recorregudes més d'una vegada. Tanmateix, és possible demostrar que això només pot ocórrer amb les arestes que ixen del depòsit, i es recorreran com a màxim dues vegades. Amb aquestes variables, la formulació del CVRP és la següent:

$$Min \quad \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij}$$

$$
\begin{array}{llll}
s.a: & \displaystyle\sum_{(i,j)\in\delta(i)} x_{ij} = 2 & i \in V \setminus \{0\} & (1) \\
& \displaystyle\sum_{(i,j)\in\delta(0)} x_{ij} = 2m & & (2) \\
& \displaystyle\sum_{(i,j)\in\delta(S)} x_{ij} \geq 2\alpha(S) & S \subseteq V \setminus \{0\} & (3) \\
& x_{ij} \in \{0,1\} & (i,j) \in E(V \setminus \{0\}) & (4) \\
& x_{ij} \in \{0,1,2\} & (i,j) \in \delta(0) & (5)
\end{array}
$$

on el vèrtex 0 correspon al depòsit i m és el nombre de vehicles disponibles o que fan falta per a servir als clients.

La funció objectiu és igual a la del TSP i minimitza la distància total de les rutes. Les restriccions (1) també les havíem vistes en el TSP, i garanteixen que qualsevol vèrtex excepte el depòsit serà incident amb dues arestes. La restricció (2) diu que el depòsit ha de ser incident amb $2m$ arestes. Això és així perquè cada vehicle ha d'eixir i entrar en el depòsit. En les restriccions (3), el paràmetre $\alpha(S)$ és el nombre de vehicles que són necessaris per a cobrir la demanda dels vèrtexs en el conjunt *S*. Aquestes desigualtats tenen una doble funció. D'una banda, asseguren que no se sobrepasse la capacitat dels vehicles i, d'una altra, que la solució siga connexa, ja que obliga al fet que qualsevol tall $\delta(S)$ siga travessat almenys dues vegades. Una manera de calcular $\alpha(S)$ és sumant la demanda dels vèrtexs de S i dividint-la per la capacitat C dels vehicles, és a dir $\alpha(S) = \left\lceil \frac{\sum_{i\in S} d_i}{C} \right\rceil$. Amb aquest valor de $\alpha(S)$ és suficient perquè la formulació siga correcta. No obstant això, és possible millorar aquest valor, tal com vam veure en el problema d'empaquetament en el tema 1, la qual cosa donaria lloc a una desigualtat millor.

Aquesta formulació presenta la mateixa dificultat que la del TSP, és a dir, el nombre de desigualtats (3) és massa gran per a poder generar-les totes, així que es pot aplicar un algorisme de plans de tall com en el cas anterior. No obstant això, per a aquest problema resultarà més complicat identificar desigualtats violades, ja que no sols cal estar atent als possibles *subtours* que apareguen, sinó també a conjunts de clients servits per una mateixa ruta la demanda de la qual supere la capacitat del vehicle.

Exemple (Ghiani, Laporte i Musmanno, 2013)

Bengalur Oil produeix i distribueix carburants a gasolineres a la regió de Karnakata (l'Índia). Avui ha rebut 5 comandes de 5 gasolineres diferents. Les quantitats sol·licitades, en hectolitres, poden veure's en la taula 1. Les distàncies entre les gasolineres i el depòsit, en quilòmetres, es mostren en la taula 2. La capacitat de cada vehicle és de 150 hectolitres. L'objectiu és trobar el conjunt de rutes òptim per a servir les comandes minimitzant la distància total recorreguda. El fitxer *Tema 4 – Bengalur.xlsx* conté el problema resolt, primer suposant que tenim 3 vehicles i després amb 2.

Gasolinera	1	2	3	4	5
Comanda	50	75	50	50	75

Taula 1: Comandes

	Depòsit	1	2	3	4	5
Depòsit	0	90	100	90	80	80
1	90	0	10	20	10	30
2	100	10	0	10	20	40
3	90	20	10	0	10	30
4	80	10	20	10	0	20
5	80	30	40	30	20	0

Taula 2: Distàncies

Formulació del CVRP basada en el cobriment de conjunts (*set-covering*)

La formulació que hem vist més amunt no és l'única formulació possible per al CVRP. Estudiarem ara una altra formulació basada en la del problema de cobriment de conjunts que vam veure en el tema 3. Aquest tipus de formulació es pot aplicar no sols per al CVRP, sinó per a molts altres tipus de problemes de rutes, i fins i tot per a problemes fora de l'àrea de les rutes de vehicles. Suposem que coneixem totes les rutes possibles que podria fer un vehicle del nostre problema i anomenarem K el conjunt d'aquestes rutes. Entenem per ruta possible qualsevol ruta que poguera ser feta per un dels nostres vehicles complint totes les condicions del nostre problema: començar i acabar en el depòsit, ser una ruta connexa i no excedir la capacitat del vehicle, en el cas del CVRP, però podria considerar-se qualsevol altre tipus de condició addicional si el nostre problema la requerira. Donada una ruta $k \in K$, c_k serà el cost d'aquesta ruta i, per a cada vèrtex $i \in V$, definim

$$a_{ik} = \begin{cases} 1 \text{ si la ruta } k \text{ visita el vèrtex } i \\ 0 \text{ si no} \end{cases}$$

Note's que a_{ik} no és una variable, sinó un paràmetre conegut. Per a cada ruta k, tindrem la variable següent:

$$y_k = \begin{cases} 1 \text{ si en la solució utilitzem la ruta } k \\ 0 \text{ si no} \end{cases}$$

El CVRP pot formular-se llavors com:

$$Min \quad \sum_{k \in K} c_k y_k$$

$$\begin{array}{llll} s.a: & \displaystyle\sum_{k \in K} a_{ik} y_k = 1 & i \in V \setminus \{0\} & (1) \\ & \displaystyle\sum_{k \in K} y_k = m & & (2) \\ & y_k \in \{0,1\} & k \in K & (3) \end{array}$$

La funció objectiu minimitza el cost total de les rutes utilitzades. Les restriccions (1) asseguren que cada vèrtex siga visitat per exactament una de les rutes utilitzades, i l'equació (2) fixa el nombre de rutes utilitzades igual al nombre de vehicles disponibles.

Aquesta formulació que acabem de veure és molt simple i fàcil d'implementar, i és, a més, molt flexible, ja que permet incorporar tot tipus de condicions sobre les rutes. No obstant això, té un inconvenient bastant obvi. Per a emprar-la, és necessari conèixer el conjunt K de totes les rutes possibles, el qual és molt difícil d'obtenir. I, encara que fórem capaços de generar aquest conjunt, el nombre de rutes segurament seria tan gran que tindríem un problema amb un nombre de variables massa gran per a poder resoldre'l amb les tècniques habituals. Un mètode habitual per a resoldre aquest tipus de formulacions és el conegut com a *generació de columnes*. S'hi parteix d'un conjunt de rutes conegut (habitualment rutes prometedores que es consideren que poden ser útils) i es resol la formulació amb aquest conjunt. A continuació, hem de trobar una o diverses rutes que, en afegir-les al conjunt K i resoldre de nou la formulació, milloren la solució obtinguda. Això és el que es coneix com a generar columnes (generar rutes noves). Per a garantir que la solució millorarà en introduir aquestes noves rutes, necessitem que aquestes tinguen cost reduït negatiu. Podem trobar-les mitjançant procediments heurístics o resolent un subproblema de manera exacta. Si trobem aquestes rutes, les afegim al conjunt i tornem a resoldre, i així successivament. Si en un moment donat podem demostrar que no existeixen més rutes de cost reduït negatiu, haurem resolt el problema original. Tanmateix, demostrar això implica resoldre el subproblema de manera exacta, i això sol ser difícil, per la qual cosa no estudiarem aquest mètode amb detall. Sí que podem implementar-lo a manera heurística: simplement generarem un conjunt (gran) de rutes inicials per al conjunt K i resoldrem el problema amb aquest conjunt, però ja no generarem més rutes. Això ens proporcionarà una solució heurística, però no podem garantir que siga òptima.

Exemple (Ghiani, Laporte i Musmanno, 2013)

El mateix exemple anterior s'ha resolt utilitzant la formulació tipus *set-covering* en el fitxer *Tema 4 – Bengalur SC.xlsx.*

Algorismes heurístics per al CVRP

Algorisme dels estalvis

L'algorisme dels estalvis que hem vist per al TSP pot ser adaptat fàcilment per al CVRP. L'única diferència és que, a l'hora d'aplicar un estalvi i afegir una aresta unint dos clients de manera consecutiva, hem de comprovar que la ruta que resulta d'aquesta unió no excedisca la capacitat màxima del vehicle. En aquest cas, aquesta aresta es descarta i es procedeix amb el següent estalvi de la llista.

Algorisme d'agranament

Aquest algorisme es pot aplicar si els vèrtexs tenen coordenades i podem situar-los en un pla. Triem un vèrtex que serà l'inicial de la primera ruta. A continuació, ordenem els vèrtexs per la seua coordenada angular respecte d'aquest vèrtex inicial prenent el depòsit com a origen. Anem afegint els vèrtexs a la ruta en aquest ordre fins que ja no és possible afegir més vèrtexs perquè sobrepassaríem la capacitat. En aquest moment tanquem la ruta tornant al depòsit i iniciem una nova ruta amb el següent vèrtex de la llista. Acabem quan tots els vèrtexs han sigut afegits a una ruta. En altres paraules, l'algorisme consisteix a traçar una línia des del depòsit que passe pel vèrtex inicial i anar fent girar aquesta línia (en sentit horari o antihorari, és igual). A mesura que la línia va "agranant" els vèrtexs, els incorporem a la ruta mentre càpien en el vehicle. Una vegada construïdes les rutes, aquestes es poden intentar millorar aplicant algun tipus de cerca local. A més, es pot executar l'algorisme diverses vegades, triant un vèrtex inicial diferent cada vegada.

Algorisme *route-first cluster-second*

La idea d'aquest algorisme és construir primer una gran ruta que visite tots els vèrtexs (*route-first*) i després partir-la en rutes més xicotetes que no sobrepassen la capacitat dels vehicles (*cluster-second*). Per a construir la ruta inicial podem aplicar qualsevol algorisme, exacte o heurístic, per al TSP. A continuació, triem un vèrtex qualsevol com a inicial i anem afegint més vèrtexs a la ruta en el mateix ordre en què es visiten en la solució del TSP que hem trobat inicialment. Quan ja no es poden afegir més vèrtexs perquè ens passaríem de la capacitat, tanquem la ruta tornant al depòsit i iniciem una nova amb el següent vèrtex de la ruta. A partir d'una mateixa ruta inicial, podem generar diferents solucions del CVRP triant cada vegada un vèrtex inicial diferent o recorrent la ruta del TSP en cadascuna de les dues possibles direccions.

Algorisme de Fisher i Jaikumar (*cluster-first route-second*)

En aquest algorisme procedirem de manera inversa a l'anterior, és a dir, primer decidirem quins vèrtexs incloure en cada ruta i després l'ordre en què es visiten dins de cada ruta. L'algorisme de Fisher-Jaikumar consta dels passos següents:

1. Seleccionar m clients com a llavor (tants com vehicles tinguem). Encara que qualsevol selecció valdria, és recomanable triar vèrtexs que estiguen allunyats entre si i, si pot ser, també del depòsit. Anomenem $i_1, i_2, \ldots, i_m$ aquests clients llavor, que seran els vèrtexs a partir dels quals construirem cada ruta.
2. Per a cada vèrtex i que no siga llavor i cada llavor i_r, calculem l'anomenat cost d'assignació $a_{ii_r} = c_{01} + c_{ii_r} - c_{0i_r}$. Aquest cost d'assignació és una manera d'avaluar quant ens costaria incorporar el vèrtex i a la ruta corresponent a la llavor i_r. Si inicialment la ruta consisteix només a anar i tornar a la llavor, en afegir el vèrtex i a la ruta, ens estalviem un dels viatges (l'anada o la tornada) entre el depòsit i la llavor, però hem d'afegir les arestes que uneixen el vèrtex i amb el depòsit i la llavor (més o menys el que fèiem en els algorismes d'inserció).
3. Resolem el problema d'assignació generalitzada amb aquests costos d'assignació i la capacitat dels vehicles. D'aquesta manera assignem cada vèrtex a una ruta minimitzant els costos d'assignació i garantint que no se sobrepassa la capacitat dels vehicles.
4. Per a cada ruta ja tenim els vèrtexs que la componen, així que resolem un TSP amb el depòsit i els vèrtexs que hem assignat a aquesta ruta.

Exemple (Ghiani, Laporte i Musmanno, 2013)

El mateix exemple anterior s'ha resolt mitjançant l'algorisme de Fisher-Jaikumar en el fitxer *Tema 4 – Bengalur FJ.xlsx.*

Amb els algorismes vistos anteriorment, a excepció de l'algorisme de Fisher i Jaikumar, no és possible determinar *a priori* quants vehicles utilitzarem. Una vegada conclòs l'algorisme sabrem quants vehicles usa la solució, però si aquest és limitat, podria ser que s'utilitzaren més dels disponibles, de manera que la solució proporcionada no seria vàlida.

El problema de rutes de vehicles amb finestres temporals (*Vehicle Routing Problem with Time Windows*, VRP-TW)

En aquest problema considerarem que, a més de tenir diversos vehicles amb capacitat limitada, cada client té un horari de servei, és a dir, una finestra horària fora de la qual no se li pot servir. El vehicle no pot arribar després d'aquest horari i, si arriba abans, haurà d'esperar que aquest comence.

Com que hem de tenir en compte també els temps de viatge per a saber si el vehicle arriba a temps al client, cada aresta $(i, j) \in E$ tindrà, a més del cost c_{ij}, un temps de viatge t_{ij}. Cada vèrtex (client) $i \in V$ té una finestra temporal associada $[e_i, l_i]$, on e_i és l'inici de la finestra (el client no pot ser servit abans d'aquest instant) i l_i el final (el client no pot ser servit després d'aquest instant). El depòsit, anomenat vèrtex 0, també tindrà una finestra de servei, que representa l'hora d'obertura i tancament d'aquest. A més d'una demanda d_i, cada vèrtex tindrà un temps de servei s_i (el temps de descarregar i entregar la mercaderia).

Per a formular el VRP-TW, necessitarem dos tipus de variables:

$$x_{ij}^k = \begin{cases} 1 \text{ si la ruta } k \text{ utilitza l'aresta } (i, j) \\ 0 \text{ si no} \end{cases}$$
$$y_i^k = \text{hora en la qual el vehicle } k \text{ comença a servir la demanda del client } i$$

Si n és el nombre de clients, per a simplificar la formulació, en el model per al VRP-TW representarem el depòsit mitjançant dos vèrtexs, denotats 0 i $n + 1$. V' serà el conjunt de vèrtexs que representen clients, mentre que $V = V' \cup \{0, n + 1\}$. La flota de vehicles estarà representada pel conjunt K. El model serà el següent:

$$Min \qquad \sum_{k\in K} \sum_{i\in V} \sum_{j\in V} c_{ij} x_{ij}^k$$

$$\begin{aligned}
s.a: \sum_{k\in K} \sum_{j\in V} x_{ij}^k &= 1 & \forall i \in V' \qquad & (1)\\
\sum_{i\in V'} d_i \sum_{j\in V} x_{ij}^k &\le C & \forall k \in K \qquad & (2)\\
\sum_{j\in V} x_{0j}^k &= 1 & \forall k \in K \qquad & (3)\\
\sum_{i\in V} x_{ih}^k - \sum_{j\in V} x_{hj}^k &= 0 & \forall h \in V', \forall k \in K \qquad & (4)\\
\sum_{i\in V} x_{i,n+1}^k &= 1 & \forall k \in K \qquad & (5)\\
x_{ij}^k (y_i^k + s_i + t_{ij} - y_j^k) &\le 0 & \forall i, j \in V, \forall k \in K \qquad & (6)\\
e_i \le y_i^k &\le l_i & \forall i \in V, \forall k \in K \qquad & (7)\\
x_{ij}^k &\in \{0, 1\} & \forall i, j \in V, \forall k \in K \qquad & (8)
\end{aligned}$$

La funció objectiu minimitza el cost total de les rutes. Les equacions (1) garanteixen que tots els clients seran visitats. Les restriccions (2) serveixen perquè les rutes no excedisquen la capacitat dels vehicles. Les equacions (3) obliguen a eixir tots els vehicles del depòsit, mentre que les (4) forcen al fet que el nombre de vegades que cada ruta entra en un client siga igual al nombre de vegades que ix (entra i ix una vegada), i les (5) fan que les rutes tornen al depòsit. Les restriccions

(6) són les més complexes, ja que estableixen la relació entre les variables x_{ij}^k i y_i^k. Si la ruta k no passa per l'aresta (i, j), la variable x_{ij}^k valdrà 0 i, en aquest cas, la desigualtat es compleix trivialment. Però si la ruta passa per aquesta aresta, vol dir que la ruta k servirà els dos clients i i j. En aquest cas, la desigualtat obliga al fet que el terme entre parèntesis siga menor o igual que 0, és a dir, $y_j^k \geq y_i^k + s_i + t_{ij}$, la qual cosa vol dir que el temps d'inici del servei del client j serà major o igual que l'inici del servei del vèrtex i, y_i^k, més el temps que coste servir aquest client, s_i, més el que es tarde a viatjar del client i al j, t_{ij}. Finalment, les restriccions (7) obliguen al fet que l'inici del servei de cada client estiga dins de la seua finestra de temps.

Aquesta formulació té un gran inconvenient: les restriccions (7) no són lineals, ja que involucren el producte de les variables x_{ij}^k i y_i^k. Per a evitar aquest problema, es poden substituir aquestes restriccions per les següents, que sí que són lineals:

$$y_i^k + s_i + t_{ij} - M(1 - x_{ij}^k) \leq y_j^k \quad \forall i, j \in V \; \forall k \in K$$

on M és un valor molt gran (pot ser, per exemple, l'hora de tancament del depòsit). Amb aquestes restriccions, si la ruta k passa per l'aresta (i, j), el terme amb la M desapareix, amb el que tenim la mateixa desigualtat d'abans. I si la ruta no passa per aquesta aresta, com que M és molt gran, la desigualtat es compleix trivialment, ja que la part de l'esquerra serà negativa valga el que valga la variable y_i^k. Aquesta desigualtat té l'inconvenient que introduir aquest tipus de paràmetres M complica la resolució del problema, ja que les solucions obtingudes en relaxar la condició d'integritat de les variables solen ser dolentes, però sempre és millor que tenir restriccions no lineals.

Algorismes heurístics per al VRP-TW

El fet d'haver de tenir en compte les finestres temporals complica notablement el disseny d'algorismes heurístics. Alguns algorismes que, sense ser excessivament complexos, han mostrat obtenir bons resultats per a aquest problema són els algorismes d'inserció, com l'algorisme de Solomon. Aquest algorisme és similar als algorismes d'inserció estudiats anteriorment. Quan s'estudia la inserció d'un client en una ruta, hem de calcular el temps d'arribada a aquest client i recalcular els de tots els clients posteriors en aquesta ruta per a comprovar si la inserció és possible. Si no ho és, es descarta. A més, per a afavorir insercions que no retarden molt les comandes posteriors, el cost d'inserció es modifica sumant un terme que avalua el retard que pateix el client immediatament posterior en la ruta. D'aquesta manera, s'afavoreix la inserció de clients que no retarden molt el servei dels clients que ja estan en la ruta. Donada la complexitat d'aquests algorismes, no els estudiarem amb més detall.

Problemes de rutes per arcs

Com s'ha esmentat el principi del tema, els problemes de rutes per arcs són aquells en els quals el servei es fa recorrent les arestes o arcs del graf. Aquest tipus de problemes són més comuns quan parlem de serveis com recollida de fem, neteja de carrers, vigilància…, però no tant quan es tracta de lliurament o recollida de mercaderies. Els problemes de rutes per arcs tracten de trobar una o diverses rutes de cost mínim que recórreguen, almenys una vegada, un determinat subconjunt d'arestes d'un graf.

El problema del carter xinès (*Chinese Postman Problem*, CPP)

Donat un graf no dirigit $G = (V, E)$ i un cost c_e associat a recórrer cada aresta $e \in E$, el problema del carter xinès consisteix a trobar una ruta de cost total mínim que recórrega totes les arestes del graf almenys una vegada. El problema del carter xinès va ser estudiat per primera vegada per Guan (1962), i representa la situació en la qual un carter vol recórrer tots els carrers d'un districte o ciutat per a repartir les cartes, recorrent per a això la menor distància possible.

Es diu que un graf és eulerià si tots els seus vèrtexs tenen grau parell, és a dir, són incidents amb un nombre parell d'arestes. Se sap que, si un graf és eulerià, aquest pot ser recorregut passant per cada aresta exactament una vegada, sense repetir-ne cap. Òbviament, el cost d'aquesta ruta serà igual a la suma dels costos de totes les arestes. Habitualment, el graf sobre el qual voldrem resoldre el CPP no serà eulerià, però podem convertir-lo en eulerià duplicant algunes de les seues arestes (duplicar una aresta vol dir que haurem de recórrer-la dues vegades en la nostra ruta). Per tant, resoldre el CPP és equivalent a trobar quines arestes hem de duplicar per a convertir el graf en eulerià, de manera que l'increment del cost siga mínim. Això es pot fer resolent un problema *d'emparellament perfecte de cost mínim* (vegeu tema 1) sobre el graf complet format pels vèrtexs de grau imparell del graf original, on els costos d'emparellament entre cada parell de vèrtexs són iguals al cost del camí més curt entre aquests. Com que existeixen algorismes amb temps polinòmic per a resoldre el problema d'emparellament, el CPP es pot resoldre també en temps polinòmic, per la qual cosa no és un problema NP-difícil.

Exemple

Troba la ruta que recorre totes les arestes del graf següent amb cost mínim.

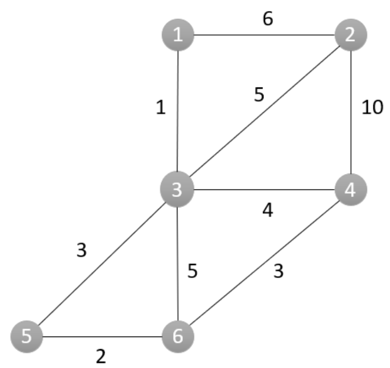


Figura 8: Graf per al CPP

El graf en qüestió té 4 vèrtexs de grau imparell, els vèrtexs 2, 3, 4 i 6. Hem de calcular tots els camins més curts entre aquests quatre vèrtexs i construir el graf següent:

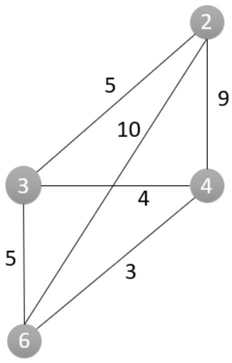


Figura 9: Graf complet amb els vèrtexs de grau imparell

Ara calculem l'emparellament perfecte de cost mínim sobre aquest graf, que ens dona la solució següent:

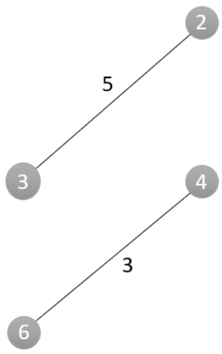


Figura 10: Solució de l'emparellament

En el graf original, dupliquem els camins més curts corresponents a les arestes de la solució de l'emparellament per a convertir-lo en un graf eulerià:

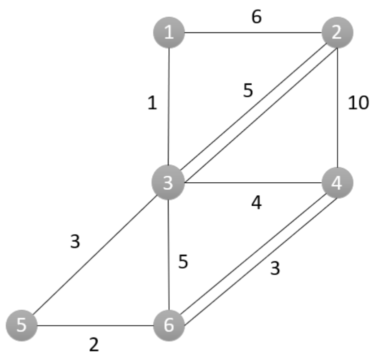


Figura 11: Graf eulerià solució del CPP

Només falta trobar una manera de recórrer aquest graf passant una vegada per cada aresta, però això és trivial.

El problema del carter rural (*Rural Postman Problem*, RPP)

Donat un graf no dirigit $G = (V, E)$, un cost c_e associat a recórrer cada aresta $e \in E$ i un subconjunt d'arestes $E_R \subseteq E$ anomenades *arestes requerides*, el problema del carter rural consisteix a trobar una ruta de cost total mínim que recórrega totes les arestes requerides del graf almenys una vegada. Les arestes que no pertanyen a E_R, és a dir, $E_{NR} = E \setminus E_R$, es denominen arestes no requerides. El RPP és un problema NP-difícil i pot formular-se definint les variables següents per a cada aresta:

$$x_e = \text{ nombre de vegades que l'aresta } e \text{ es recorreguda sense servir-la}$$

Com que les arestes requerides s'han de recórrer exactament una vegada (per a fer-hi algun servei) podem definir les variables com el nombre de vegades que es recorre cada aresta sense fer servei, tenint en compte que les arestes requerides seran sempre recorregudes una vegada més del que diga la variable. La formulació, llavors, és la següent:

$$Min \qquad \sum_{e \in E} c_e x_e$$

$$\begin{array}{llll} s.a: & \displaystyle\sum_{e \in \delta(v)} x_e \equiv |\delta_R(v)| \bmod 2 & v \in V_R & (1) \\ & \displaystyle\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 2 & S \subset V_R, \delta_R(S) = \emptyset & (2) \\ & x_e \geq 0 \text{ entera} & e \in E & (3) \end{array}$$

on $\delta(v)$ són les arestes incidents amb el vèrtex v, $\delta_R(v)$ són les arestes requerides incidents amb v, $\delta(S)$ són les arestes en el tall definit pel conjunt de vèrtexs S i V_R és el conjunt de vèrtexs incident amb almenys una aresta requerida. La funció objectiu minimitza el cost total de les arestes utilitzades (atenció, les arestes requerides només estan comptades quan es recorren sense servir, així que, per a calcular el cost total real, caldria sumar el cost de totes les arestes requerides una vegada). Les restriccions (1) diuen que, si un vèrtex és incident amb un nombre imparell d'arestes requerides, caldrà recórrer sense servir un nombre imparell addicional d'arestes incidents amb aquest vèrtex (perquè tots els vèrtexs han d'acabar sent incidents amb un nombre parell d'arestes), i, si el nombre d'arestes requerides incidents és 0 o parell, el nombre d'arestes addicionals utilitzades haurà de ser parell també. Les restriccions (2) són restriccions de connectivitat, que obliguen al fet que qualsevol tall haja de ser travessat almenys dues vegades si a l'altre costat hi ha un vèrtex incident amb una aresta requerida.

Les restriccions (1) no són restriccions que puguen ser expressades de manera lineal, però poden ser reemplaçades afegint les restriccions i variables següents:

$$\sum_{e \in \delta(v)} x_e + |\delta_R(v)| = 2z_v \quad \forall v \in V$$

$$z_v \geq 0 \text{ entera} \quad \forall v \in V$$

Això augmenta les dimensions del problema, ja que tenim més variables enteres. A més, les restriccions de connectivitat (2) ja sabem que no podem incloure-les totes en el model per a garantir que la solució obtinguda siga connexa. Per això, hem de relaxar aquestes restriccions (eliminar-les de la formulació) i afegir-les en un algorisme de plans de tall tal com hem vist en problemes anteriors.

El problema de rutes per arcs amb capacitats (*Capacitated Arc Routing Problem*, CARP)

El CARP pot considerar-se com l'equivalent al CVRP en problemes de rutes per arcs. Considerem un graf no dirigit $G = (V, E)$, un cost c_e associat a recórrer cada aresta $e \in E$ i un subconjunt d'arestes requerides $E_R \subseteq E$, cadascuna de les quals té una demanda d_e. Disposem d'un conjunt de K vehicles idèntics, cadascun dels quals té capacitat C. El CARP consisteix a trobar K rutes, una per a cada vehicle, amb cost total mínim, de manera que se servisca la demanda de totes les arestes sense sobrepassar la capacitat dels vehicles.

Per a formular aquest problema, utilitzarem les variables següents:

$$x_e^k = \text{ nombre de vegades que la ruta } k \text{ travessa l'aresta } e \text{ sense servir-la}$$
$$y_e^k = \begin{cases} 1 \text{ si la ruta } k \text{ serveix l'aresta } e \\ 0 \text{ si no} \end{cases}$$

La formulació és:

$$Min \qquad \sum_{k=1}^{K} \sum_{e \in E} c_e x_e^k + \sum_{k=1}^{K} \sum_{e \in E_R} c_e y_e^k$$

$$\sum_{k=1}^{K} y_e^k = 1 \qquad \forall e \in E_R \tag{1}$$

$$\sum_{e \in E_R} d_e y_e^k \leq C \qquad k = 1, \ldots, K \tag{2}$$

$$\sum_{e \in \delta(S)} x_e^k + \sum_{e \in \delta_R(S)} y_e^k \geq 2 y_f^k \qquad \forall S \subseteq V \setminus \{1\}, \forall f \in E_R(S), k = 1 \ldots, K \tag{3}$$

$$\sum_{e \in \delta(S)} x_e^k + \sum_{e \in \delta_R(S)} y_e^k \equiv 0 \bmod 2 \quad \forall S \subseteq V \setminus \{1\}, k = 1 \ldots, K \tag{4}$$

$$x_e^k \geq 0 \qquad \forall e \in E, k = 1, \ldots, K \tag{5}$$

$$y_e^k \in \{0, 1\} \qquad \forall e \in E_R, k = 1, \ldots, K \tag{6}$$

La funció objectiu minimitza el cost total de les rutes (cal sumar el cost de recórrer l'aresta quan la servim i quan només hi passem). Les igualtats (1) garanteixen que totes les arestes requerides seran servides per una ruta. Les desigualtats (2) serveixen per a evitar que se sobrepasse la capacitat dels vehicles. Les restriccions (3) garanteixen la connectivitat de les rutes: la part de l'esquerra representa el nombre de vegades que la ruta k travessa el tall corresponent al conjunt de vèrtexs S. Si hi ha alguna aresta f entre les arestes requerides amb tots dos extrems en el conjunt S que siga servida per la ruta k, és a dir $y_f^k = 1$, la part de la dreta valdrà 2 en la desigualtat amb aquesta aresta, la qual cosa obliga a travessar el tall dues vegades (anada i tornada), ja que, si no, no es podria servir l'aresta. Si no existeix cap aresta servida en aquest conjunt, la part de la dreta és 0 i la restricció no obliga a travessar el tall. Les restriccions (4) garanteixen que cada vèrtex és incident amb un nombre parell (o zero) d'arestes dins de cada ruta.

Les restriccions (3) i (4) presenten els mateixos inconvenients que hem vist en altres problemes. Hi ha un nombre exponencial de totes dues i, a més, les (4) no són lineals. En el cas d'aquestes últimes, es poden substituir per les següents:

$$\sum_{e\in\delta(S)} x_e^k + \sum_{e\in\delta_R(S)\setminus F} x_e^k \geq \sum_{e\in F} y_e^k - |F| + 1 \qquad k = 1,\ldots,K,\ S \subset V\setminus\{1\},\ F \subseteq \delta_R(S), |F| \text{ imparell}$$

F ha de ser un conjunt imparell d'arestes requerides del tall. En eixe cas, si la ruta k serveix totes les arestes de F, la part de la dreta val 1, la qual cosa vol dir que la ruta ha d'utilitzar una aresta més del tall (perquè sempre ha de ser un nombre parell per a poder anar i tornar) que no siga de F. Si la ruta no serveix totes les arestes de F, la part de la dreta és zero o negativa, per la qual cosa la desigualtat no implica res. En qualsevol cas, aquestes desigualtats, encara que lineals, suposen també un nombre exponencial, per la qual cosa, tant les (3) com aquestes últimes, hauran de ser relaxades i afegides dins d'un algorisme de plans de tall.

Transformació de problemes de rutes per arcs en problemes de rutes per vèrtexs

Quan tenim un problema de rutes per arcs, és possible transformar-lo en un problema de rutes per vèrtexs equivalent aplicant algunes modificacions al graf. Una vegada transformat el problema, podem aplicar algun dels algorismes existents per a problemes de rutes per vèrtexs pera resoldre'l. No obstant això, aquesta transformació té un cost computacional, ja que la grandària del graf en el qual haurem de resoldre el problema per vèrtexs serà bastant major que la del graf original. La transformació inversa, de problema per vèrtexs a problema per arcs, també és possible, encara que no l'estudiarem en aquest curs.

Veurem com funciona la transformació per al cas del RPP. A partir del graf original (amb un conjunt d'arestes requerides), construirem un nou graf. El procediment consta dels passos següents:

1. Per cada vèrtex del graf original, posarem tantes còpies d'aquest com arestes requerides incidents tinga.
2. Entre cada parell de vèrtexs del nou graf que es corresponguen amb el mateix vèrtex original, posarem arestes de cost 0.
3. Entre cada parell de vèrtexs del nou graf associats amb la mateixa aresta requerida original, posarem una aresta amb cost -*M* (on *M* és un valor molt gran).
4. Entre tots els parells de vèrtexs entre els quals no hi haja encara una aresta, afegim una aresta el cost de la qual serà el del camí més curt en el graf original entre els dos vèrtexs corresponents.

Una vegada construït el nou graf d'aquesta manera, hi resoldrem un TSP, la solució òptima del qual ens donarà el recorregut de la solució òptima del RPP original.

Exemple

Resol el RPP corresponent al graf de la figura 12, on les arestes en roig són les arestes requerides i el vèrtex quadrat és el depòsit.

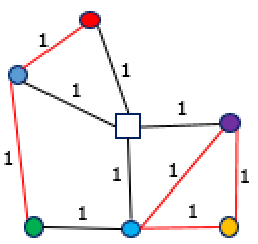


Figura 12: Graf per al RPP

En primer lloc, posem els vèrtexs del nou graf, tants com arestes requerides incidents amb els vèrtexs originals. En la figura 13 (pas 1) els vèrtexs estan identificats per colors per a saber a quin vèrtex original corresponen. A continuació, posem les arestes de cost 0 unint els vèrtexs corresponents al mateix vèrtex original, en aquest cas els del mateix color (pas 2). Després, posem una aresta de cost -*M* per cada aresta requerida del graf original (pas 3). Aquestes noves arestes han d'unir els mateixos colors que unien les arestes requerides originals, i no pot haver-hi dues arestes de cost -*M* tocant el mateix vèrtex. Finalment, completem el graf posant arestes el cost de les quals siga el del camí més curt en el vèrtex original (pas 4). Per exemple, entre el vèrtex blau clar i el blau fosc es posa una aresta de cost 2, ja que el camí més curt entre aquests vèrtexs del graf original té cost 2 (passant pel vèrtex verd o pel blanc). El graf del pas 4 de la figura 13 no està complet (perquè no quede molt confusa la il·lustració), caldria posar totes les arestes possibles que hi falten.

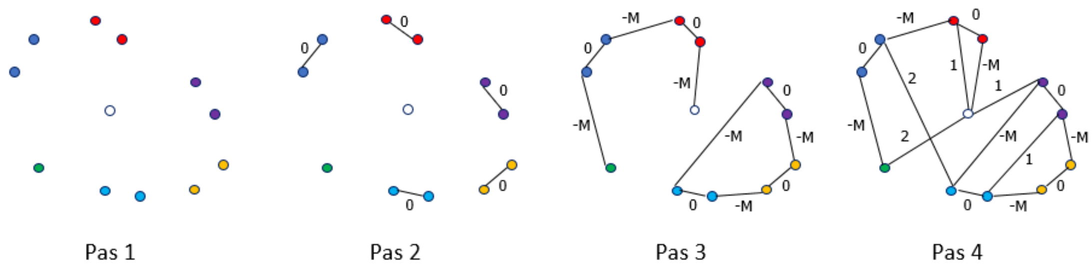


Figura 13: Transformació del RPP en TSP

Una vegada hem completat el nou graf, hi resolem un TSP. Com que el TSP tracta de minimitzar el cost total, passarà per totes les arestes amb cost -*M* si *M* és prou gran, així que la solució del RPP passarà per totes les arestes requerides. La solució òptima del TSP pot veure's en la figura 14a, i correspon a la ruta de la figura 14b en el graf original, que és la solució òptima del RPP.

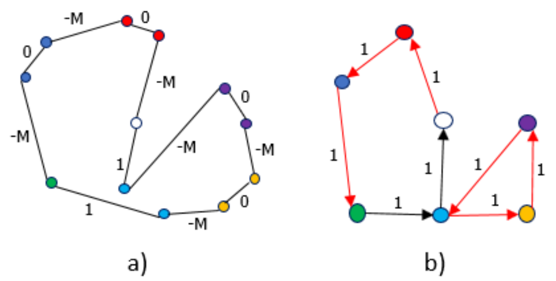


Figura 14: Solucions del TSP i el RPP

Bibliografia

M. Dror (2000). *Arc Routing: Theory, Solutions and Applications.* Kluwer Academic.

G. Ghiani, G. Laporte i R. Musmanno (2013). *Introduction to Logistics Systems Management*. 2a ed. Wiley.

P. Toth i D. Vigo (2002). *The Vehicle Routing Problem*. SIAM.

Tema 10 – Transport de mercaderies en llargues distàncies

En aquest tema tractarem el transport de mercaderies en llargues distàncies. En aquests casos, els mitjans de transport utilitzats poden ser camions, ferrocarrils, vaixells, avions o una combinació d'aquests, la duració dels viatges sol ser llarga (més d'un dia), i cada trajecte inclou poques parades (o cap).

Introducció

En els transports de mercaderies en llargues distàncies, els productes es desplacen generalment entre terminals i/o instal·lacions (plantes, magatzems…). Aquests moviments de mercaderies poden produir-se directament des de l'origen fins a la destinació o utilitzar una seqüència de viatges a través de diversos punts de transbord, en els quals es pot canviar de tipus de transport si és necessari. Per a això, és possible utilitzar els recursos d'una xarxa de transport ja existent (*problemes d'assignació de trànsit de mercaderies*) o, si aquesta xarxa fins i tot no existeix o és inadequada, dissenyar una nova xarxa de transport (*problemes de disseny de xarxes*). Un altre tipus de problemes en aquest context són els d'*assignació de vehicles*, en els quals hem de planificar la localització i moviment d'una sèrie de vehicles en una xarxa de transport. En aquest tema estudiarem problemes d'assignació de trànsit de mercaderies i d'assignació de vehicles.

Problemes d'assignació de trànsit de mercaderies

En els problemes d'assignació de trànsit de mercaderies (*Freight Traffic Assignment Problems*, TAP), l'objectiu és trobar la manera de fer arribar una sèrie de productes, a través d'una xarxa de transport ja existent, d'uns punts d'origen a uns altres de destinació amb el menor cost possible.

Els TAP poden classificar-se en *estàtics* o *dinàmics*. En els models estàtics, el factor temps no es té en compte, mentre que en els dinàmics sí, ja que la disponibilitat de recursos de transport pot canviar segons el dia. Representarem els TAP mitjançant un graf dirigit $G = (V, A)$, on el conjunt de vèrtexs V representa una sèrie d'instal·lacions (plantes, magatzems, terminals…) i els arcs A, els possibles serveis de transport entre aquestes instal·lacions. Dins dels vèrtexs, podem distingir-ne de tres tipus, els punts d'*origen*, els de *destinació* i els de *transbord*. Cada arc tindrà associat un cost de transport i una capacitat màxima.

El problema de flux de cost mínim

Considerem un graf dirigit $G = (V, A)$, on el conjunt de vèrtexs està dividit en vèrtexs d'origen, O, vèrtexs de destinació, D, i vèrtexs de transbord, T, $V = O \cup D \cup T$. Cada vèrtex d'origen $i \in O$ té associada una oferta o_i (quantitat de producte que ha d'eixir d'aquest vèrtex), i cada vèrtex de destí $i \in D$ té una demanda d_i (quantitat de producte que ha d'arribar a aquest vèrtex). Cada arc $(i, j) \in A$ des d'un vèrtex i a un altre vèrtex j té associats un cost c_{ij} per unitat transportada, una capacitat màxima u_{ij} (quantitat màxima de producte que pot viatjar per aquest arc) i, pot ser, una cota inferior l_{ij} (quantitat mínima de producte que ha de viatjar per aquest arc).

L'objectiu és trobar la quantitat de producte que ha de viatjar per cada arc perquè tota la mercaderia dels vèrtexs d'origen siga transportada fins als vèrtexs destinació, respectant la capacitat i la cota inferior dels arcs, amb cost total mínim.

Per a resoldre aquest problema, plantejarem un model amb les variables següents:

$$x_{ij} = \text{ quantitat de flux (producte) que viatja per l'arc } (i, j)$$

El model de programació matemàtica a resoldre és el següent:

$$Min \qquad \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}$$

$$s.a: \qquad \sum_{(i,j)\in\delta^+(i)} x_{ij} - \sum_{(j,i)\in\delta^-(i)} x_{ji} = \begin{cases} o_i & \text{si } i \in O \\ -d_i & \text{si } i \in D \\ 0 & \text{si } i \in T \end{cases} \qquad i \in V \qquad (1)$$

$$l_{ij} \le x_{ij} \le u_{ij} \qquad (i, j) \in A \qquad (2)$$

on $\delta^+(i)$ i $\delta^-(i)$ representen el conjunt d'arcs que ixen i entren del / en el vèrtex i, respectivament. La funció objectiu representa el cost total de transport. Les restriccions (1) garanteixen que de cada vèrtex origen eixirà una quantitat de producte igual a la seua oferta, en els de destinació entrarà una quantitat igual a la seua demanda, i en els de transbord no quedarà res de producte. Les desigualtats (2) asseguren que es respecten la capacitat i la cota inferior de cada arc.

Aquest model suposa que la suma de totes les ofertes és igual a la suma de totes les demandes. Si l'oferta total fora superior a la demanda total, és a dir, $\sum_{i\in O} o_i > \sum_{i\in D} d_i$, les restriccions (1) per als vèrtexs d'origen haurien de transformar-se en desigualtats $\le$.

Es tracta d'un model molt similar al que vam veure en el tema 1 per al problema del camí més curt. De fet, el problema del camí més curt es pot considerar un cas particular del problema de flux de cost mínim en el qual només cal transportar una unitat de producte d'un vèrtex d'origen a un altre de destinació.

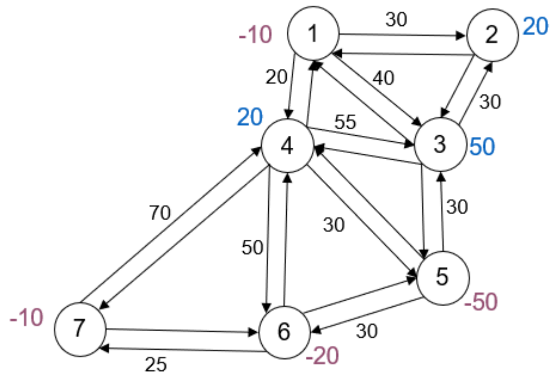
Si les cotes inferiors i les capacitats són valors enters, existeix una solució òptima d'aquest problema en la qual totes les variables prenen valors enters, per la qual cosa no és necessari imposar la restricció que les variables siguen enteres.

Encara que el problema de flux de cost mínim pot resoldre's amb aquest model, existeixen algorismes que funcionen en temps polinòmic i són més eficients per a resoldre'l, com el de Ford-Fulkerson (no ho estudiarem en aquest curs).

Existeixen variants més complexes d'aquest problema que consideren funcions objectiu no lineals o múltiples productes.

Exemple (Ghiani, Laporte i Musmanno, 2013)

NTN és una companyia de transport intermodal de Lausanne. Quan un client vol transportar un producte entre un origen i una destinació, NTN proporciona un o més contenidors buits per a transportar-lo. Una vegada en la seua destinació, el producte és descarregat i els contenidors buits han de ser transportats al punt d'origen d'un nou client. Setmanalment l'empresa ha de redistribuir els contenidors buits, la qual cosa suposa al voltant del 35% del cost total d'operació de la companyia. En aquest moment té diversos contenidors buits que han de ser redistribuïts entre les terminals d'Amsterdam, Berlín, Munic, París, Milà, Barcelona i Madrid. Cada vèrtex del graf següent representa una d'aquestes ciutats. Els valors al costat de cada vèrtex representen la quantitat de contenidors disponibles (positiu) o necessaris (negatiu) en cada ciutat, i els valors al costat dels arcs són el cost de transportar cada contenidor entre aquestes ciutats.



El problema de flux de cost mínim amb múltiples productes

Aquest problema generalitza l'anterior considerant que existeix un conjunt K de productes diferents i que cada arc té una capacitat màxima u_{ij}^k per a cada tipus de producte $k \in K$ que limita les unitats de producte k que poden passar per aquest arc, i una capacitat conjunta u_{ij} que limita les unitats totals de producte que poden passar. Si no existira la capacitat conjunta, podria resoldre's un problema individual de flux de cost mínim per a cada producte per separat.

Per a cada producte $k \in K$ existeix un conjunt de vèrtexs origen $O(k)$, cadascun amb una oferta de producte o_i^k, un conjunt de vèrtexs destinació $D(k)$ amb una demanda d_i^k, i un conjunt de vèrtexs de transbord $T(k)$.

Per a formular el problema, utilitzem les variables següents:

$$x_{ij}^k = \text{ quantitat de producte } k \text{ que viatja per l'arc } (i, j)$$

I el model resultant és:

$$Min \qquad \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A} c_{ij}^k x_{ij}^k$$

$$s.a: \quad \sum_{(i,j)\in\delta^+(i)} x_{ij}^k - \sum_{(j,i)\in\delta^-(i)} x_{ji}^k = \begin{cases} o_i^k & \text{si } i \in O(k) \\ -d_i^k & \text{si } i \in D(k) \\ 0 & \text{si } i \in T(k) \end{cases} \qquad i \in V,\ k \in K \qquad (1)$$

$$0 \le x_{ij}^k \le u_{ij}^k \qquad (i,j) \in A,\ k \in K \quad (2)$$

$$\sum_{k \in K} x_{ij}^k \le u_{ij} \qquad (i,j) \in A \qquad (3)$$

Problemes d'assignació de vehicles

Els problemes d'assignació de vehicles (*Vehicle Allocation Problems*, VAP) es plantegen en empreses de transport que es dediquen al transport de càrregues completes (per a cada enviament s'utilitza un camió) a llargues distàncies. Amb una certa antelació, l'empresa coneix les comandes de transport en els dies següents i ha de decidir quines comandes accepta tenint en compte les disponibilitats de vehicles i els possibles beneficis per fer cada comanda, a més de tenir en compte possibles moviments de vehicles buits. Estudiarem el cas en el qual tots els vehicles de la nostra flota són iguals, encara que es podria estendre al cas de flotes heterogènies.

L'horitzó de planificació es divideix en T períodes, i disposem de les dades següents:

- N: conjunt de punts d'arreplegada i/o lliurament de les comandes.
- d_{ij}^t: nombre de càrregues completes a transportar des d'i fins a j en el període t.
- t_{ij}: temps de viatge des d'i fins a j (en nombre de períodes).
- p_{ij}: benefici net obtingut al transportar una càrrega des d'i fins a j.
- c_{ij}: cost de moure un vehicle buit des d'i fins a j.
- m_i^t: nombre de vehicles disponibles al període t en el punt i.

L'objectiu del problema consisteix a decidir el nombre de vehicles carregats i/o buits que han de viatjar de cada punt i a cada punt j durant cada període t de manera que es maximitze el benefici total (es poden deixar comandes sense servir).

Aquest problema es pot resoldre com un problema de flux de cost mínim plantejant una xarxa (graf) adequada de la manera següent:

<u>Vèrtexs:</u>

- Per a cada punt $i \in N$ posem T vèrtexs, un per cada període.
- Posem un vèrtex més, s, al qual anomenarem *embornal*.

<u>Arcs:</u>

- Per a cada comanda en el període t per a transportar d_{ij}^t càrregues des del punt i al punt j, posem un arc des del vèrtex i corresponent al període t al vèrtex j corresponent al període $t + t_{ij}$ amb capacitat d_{ij}^t i cost $-p_{ij}$ (aquests arcs representen moviments de vehicles carregats que fan una comanda).
- Per a cada parell de punts i i j i cada període t, si $t + t_{ij} \leq T$ posem un arc des del vèrtex i del període t al vèrtex j del període $t + t_{ij}$ amb cost c_{ij} i capacitat infinita (aquests arcs representen moviments de vehicles en buit que poden fer-se durant l'horitzó de planificació).
- Per a cada punt i i cada període $t < T$ posem un arc del vèrtex i en el període t al vèrtex j en el període $t + 1$ amb cost 0 i capacitat infinita (aquests arcs representen vehicles que no es mouen del punt d'un període al següent).
- Per a cada punt i posem un arc des del vèrtex i del període T a l'embornal s amb cost 0 i capacitat infinita.

<u>Ofertes i demandes:</u>

- Cada vèrtex i del període t té una oferta igual al nombre de vehicles disponibles (*a priori*) en aquest punt i aquest període, és a dir, m_i^t.
- L'embornal s tindrà una demanda igual a la suma de tots els vehicles disponibles (en negatiu), és a dir, $d_s = -\sum_{t\in T}\sum_{i\in N} m_i^t$.

En aquest graf que hem construït resoldrem un problema de flux de cost mínim la solució del qual ens dirà quins moviments han de fer els nostres camions i quines comandes ens convé servir.

Exemple (Ghiani, Laporte i Musmanno, 2013)

Murty és una empresa de transport que opera en una regió de l'Índia amb 5 ciutats, a les quals anomenarem A, B, C, D i E. De l'11 al 13 de juliol té les següents demandes de transport:

- 11 de juliol una càrrega de B a D i una càrrega de E a C.
- 13 de juliol, 2 càrregues d'A a B.

L'11 de juliol es disposa d'un vehicle en B i un altre en D, i el 12 de juliol un altre vehicle més estarà disponible en B.

Els temps de viatge, en dies, entre cada parell de ciutats venen donats en la taula següent:

	A	**B**	**C**	**D**	**E**
A	0	1	2	2	2
B	1	0	2	2	2
C	2	2	0	2	1
D	2	2	2	0	2
E	2	2	1	2	0

El benefici que proporciona el viatge d'un vehicle carregat és 1,8 vegades el cost del viatge en buit. Suposem que el cost del viatge en buit és proporcional a la duració del viatge, per exemple, el cost del viatge en buit de A a C és $2\times$P.

Construeix el graf apropiat per a resoldre el problema com un problema de flux de cost mínim.

Bibliografia

G. Ghiani, G. Laporte i R. Musmanno (2013). *Introduction to Logistics Systems Management*. 2a ed. Wiley.