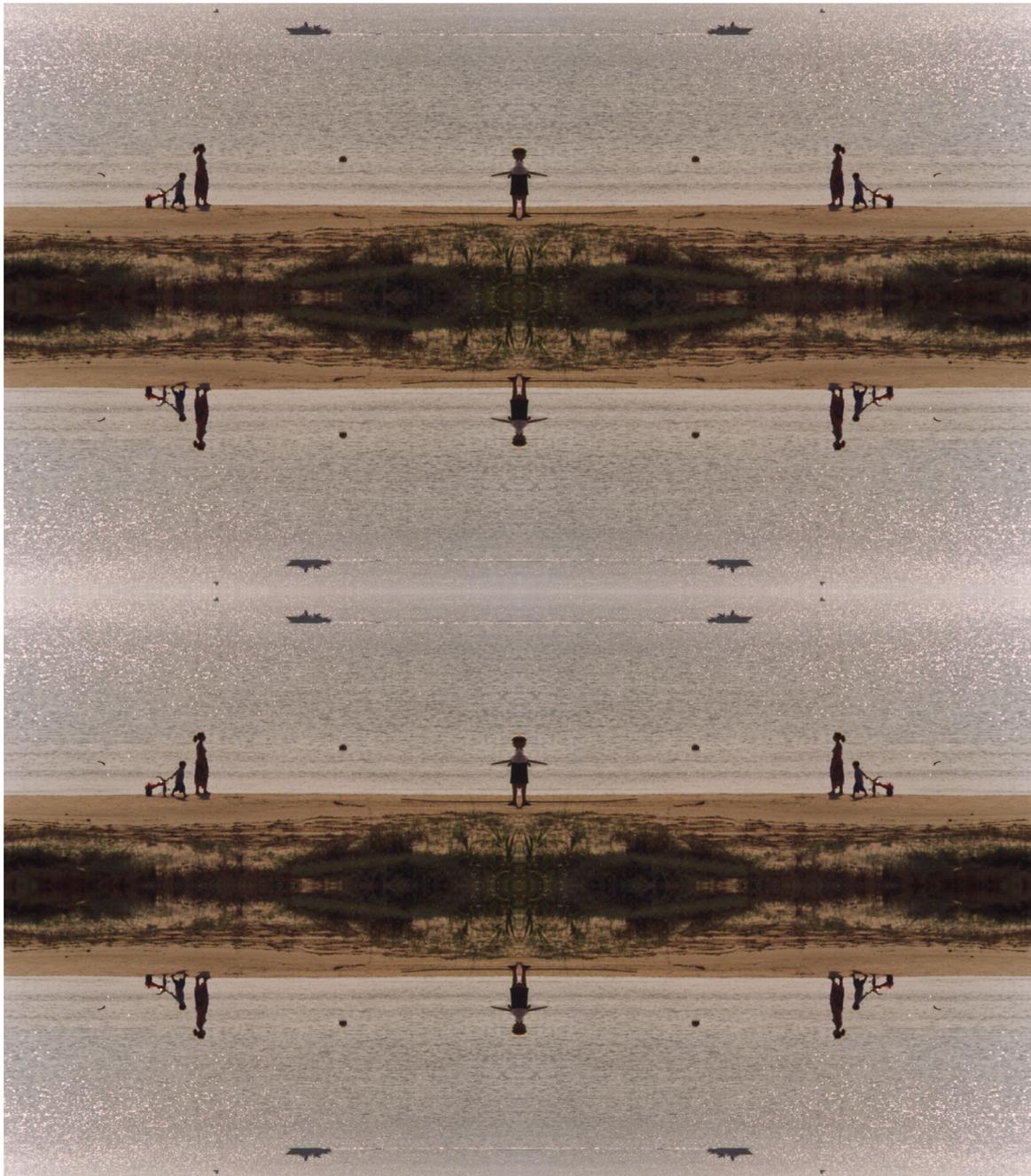


Gravedad Métrico - Afín y Escenarios Asociados:

ROTACIÓN, TERMODINÁMICA, HOLOGRAFÍA Y CAMPOS DE MATERIA

TESIS DOCTORAL

Gerardo Mora Pérez



DIRECTORES:
Gonzalo Olmo Alba
Diego Rubiera García

DEPARTAMENT DE FÍSICA TEÒRICA
Universitat de València
3126 - Programa Oficial de Doctorat en Física
Enero 2023

*A mi padre,
el primero en contarme
que los números
podían devenir imaginarios.*

Publicaciones

Esta tesis ha dado lugar a las siguientes publicaciones:

1. V. I. Afonso, G. Mora-Pérez, G. J. Olmo, E. Orazi and D. Rubiera-Garcia, “An infinite class of exact rotating black hole metrics of modified gravity”, JCAP **03**, 052 (2022)
doi:10.1088/1475-7516/2022/03/052
arXiv: 2111.12381 [gr-qc].
2. M. Guerrero, G. Mora-Pérez, G. J. Olmo, E. Orazi and D. Rubiera-Garcia, “Charged BTZ-type solutions in Eddington-inspired Born-Infeld gravity”, JCAP **11**, 025 (2021)
doi:10.1088/1475-7516/2021/11/025
arXiv:2108.09594 [gr-qc].
3. M. Guerrero, G. Mora-Pérez, G. J. Olmo, E. Orazi and D. Rubiera-Garcia, “Rotating black holes in Eddington-inspired Born-Infeld gravity: an exact solution”, JCAP **07**, 058 (2020)
doi:10.1088/1475-7516/2020/07/058
arXiv:2006.00761 [gr-qc].

GERARDO MORA PÉREZ

Enero de 2023

Tan pronto vi el mañana inalcanzable como un paseo la cima inexpugnable.

Antonio Vega.

Resumen

Las teorías de gravedad modificada formuladas *à la Palatini*, es decir, partiendo del principio de que métrica y conexión son objetos que deben ser tratados en pie de igualdad en la deducción de las ecuaciones generales de movimiento, han abierto en los últimos años un considerable espacio de interés al corregir con éxito ciertas patologías de la gravedad en su formulación original riemanniana, basada únicamente en la curvatura de la métrica como motor de la acción. Siguiendo ese planteamiento, esta tesis estudia el acoplamiento de la gravedad de Born-Infeld *à la Palatini* a diversas formas de electromagnetismo y a campos escalares, tanto en $(2 + 1)$ como en $(3 + 1)$ dimensiones.

Los resultados principales que se obtienen en esta tesis son: soluciones exactas con rotación en $2 + 1$ y $3 + 1$ dimensiones, los términos de superficie de la teoría, análisis de la termodinámica, y de acciones “on shell”. También se estudia la ecuación de Dirac en el caso $2 + 1$ con el objetivo de buscar correlaciones con otros campos de la Física de gran relevancia actual, como son la materia condensada y la holografía asociada a teorías gauge definidas en la frontera de un espacio-tiempo curvo.

Tabla de Contenidos

Lista de Figuras xvii

I	Introducción y conceptos básicos.	1
1	Introducción	3
1.1	La gravedad de Einstein	3
1.2	Otras teorías de la gravedad	4
1.3	Estructura de la materia y geometrías no riemannianas	7
1.4	La correspondencia AdS/CFT	8
1.5	Objetos compactos en rotación	10
1.6	Estructura general de la tesis	11
2	Bases de la Relatividad General	13
2.1	Aspectos básicos de la geometría riemanniana	13
2.1.1	Variedades, cartas y espacio tangente	13
2.1.2	La conexión de Levi-Civita	16
2.1.3	La curvatura y los tensores de Riemann y Ricci	19
2.2	Las ecuaciones de Einstein	20
2.3	Geodésicas y principio de equivalencia	22
2.4	Transporte paralelo	25
3	Geometrías no riemannianas	27
3.1	Espacios de Cartan	27
3.1.1	Transformaciones de Einstein	27
3.1.2	Torsión	29
3.1.3	Curvatura	30
3.1.4	Transformaciones singulares de coordenadas	30
3.2	Dislocaciones y disclinaciones	32

3.3	Defectos en cristales y propiedades del espacio afín	34
3.3.1	Paralelismo local	34
3.3.2	Transporte paralelo en un circuito cerrado	35
3.3.3	Transporte paralelo en un circuito abierto. Vector de Burgers	36
3.3.4	Representaciones integrales en el espacio afín	38
3.3.5	Cristal bidimensional con línea de dislocación	40
3.3.6	Cristal con disclinación	41
3.4	No metricidad	43
4	Algunos escenarios sugerentes	47
4.1	Fermiones en espacios curvos	47
4.1.1	Introducción	47
4.1.2	Ecuación de Dirac en el marco de la Relatividad Especial	48
4.1.3	Espín y torsión: la conexión de espinor	51
4.2	El grafeno	57
4.2.1	Hibridación de orbitales en el átomo de carbono	58
4.2.2	El grafito y sus derivados. El grafeno	60
4.2.3	Variedades 2- dimensionales derivadas del grafeno	66
4.2.4	Nanotubos y agujeros de gusano	67
4.3	Densidad local de estados, (LDOS)	74
4.4	La correspondencia AdS/CFT	76
4.4.1	Conceptos fundamentales	76
4.4.2	Agujeros negros y leyes de la termodinámica	76
4.4.3	Simetrías conformes: el diccionario AdS/CFT	78
4.4.4	Función de partición y acción “on Shell”	80
5	La propuesta métrico-afín	83
5.1	Introducción	83
5.2	Ecuaciones del movimiento. Esquema general	85
5.3	Teorías RBG e invariancia proyectiva	87
5.4	Gravedad GBI	89
5.4.1	Ecuaciones de movimiento	90
5.4.2	La matriz de deformación	92
5.5	El “mapping” entre “frames”	94
5.5.1	Relaciones fundamentales	94
5.5.2	“Mapping” y fluidos anisótropos	96
5.6	Otras teorías RBG	98

II	Resultados publicados.	101
6	Agujeros negros con rotación en GBI: una solución exacta	103
6.1	Introducción	103
6.2	El procedimiento de “mapping”	106
6.2.1	Gravedad RBG	106
6.2.2	“Mapping” con fluidos anisótropos	107
6.2.3	Ejemplo: GBI con campos electromagnéticos	109
6.3	Soluciones con simetría esférica de la gravedad GBI acoplada a Born-Infeld NED	112
6.3.1	Generando las soluciones mediante cálculo directo	112
6.3.2	Generando las soluciones via “mapping”	115
6.3.3	Propiedades de las soluciones	116
6.3.4	Horizontes	118
6.3.5	Curvaturas	121
6.3.6	Gravedad superficial	123
6.3.7	Geodésicas	123
6.4	Solución de agujero negro en rotación	126
6.4.1	Desarrollo de la solución	126
6.4.2	Propiedades de las soluciones	132
6.5	Conclusión	137
7	Agujeros negros con rotación en GBI: un conjunto infinito de soluciones exactas	139
7.1	Introducción	139
7.2	Los dos marcos RBG y el método de mapeo	140
7.3	Agujeros negros en rotación	143
7.4	Conclusion	150
8	Rotación en 2+1: BTZ en GBI	153
8.1	Introducción	153
8.2	El “mapping” electromagnético en $2+1$	155
8.2.1	Compatibilidad métrica de las teorías RBG	155
8.2.2	RBGs vistas como RG	156
8.2.3	El “mapping“ para la gravedad de Born-infeld	158
8.2.4	Enfoque alternativo: representación con fluidos anisótropos	161
8.3	Soluciones tipo BTZ en gravedad GBI	162
8.3.1	La solución BTZ en RG	162

8.3.2	Generando la solución GBI-BTZ: enfoque electromagnético	164
8.3.3	Generación de la solución GBI-BTZ: enfoque mediante fluidos anisótropos	165
8.4	Estructura de la solución GBI-BTZ	167
8.4.1	Función radial y estructuras de agujero de gusano	167
8.4.2	Estructura del elemento de línea: ergosferas y horizontes	168
8.4.3	Complejidad y regularidad geodésica	169
8.5	Conclusión	173
III	Más allá.	175
9	Términos de superficie y acciones “on shell”	177
9.1	Gravedad GBI y términos de superficie	177
9.2	Acción on-shell y función de partición	182
9.3	Cálculo de las acciones “on shell” en diferentes escenarios GBI	187
9.3.1	Electromagnetismo de Maxwell en d dimensiones	187
9.3.2	Electromagnetismo de Maxwell ($d=3$)	191
9.3.3	GBI + electromagnetismo de Born-Infeld ($d=3$)	192
9.3.4	GBI + electromagnetismo de Born-Infeld ($d=4$)	194
9.4	Cuestiones abiertas	200
10	Termodinámica en GBI	203
10.1	Introducción	203
10.2	GBI + electromagnetismo de Maxwell en $2+1$	205
10.2.1	Soluciones en el contexto de la RG	205
10.2.2	Corrección de la entropía en GBI	207
10.2.3	Potencial electrostático y primera ley de la termodinámica	209
10.2.4	Calor específico a carga eléctrica constante	210
10.3	GBI + $(3+1)$ electromagnetismo de Maxwell	211
10.3.1	Correspondencia entre “frames”	211
10.3.2	Comportamiento asintótico y central	216
10.3.3	Termodinámica asociada	219
11	Resolución de la ecuación de Dirac en GBI $2+1$	225
11.1	Introducción	225
11.2	Estructura de la ecuación de Dirac asociada	226
11.3	Limites asintóticos	229

11.3.1	Resolución a grandes distancias	229
11.3.2	Forma de la ecuación de Dirac cerca del agujero de gusano	230
11.3.3	Integración numérica y estimación de la densidad local de estados cerca del agujero de gusano	231
12	Gravedad GBI y holografía	233
12.1	Introducción	233
12.2	Loops de Wilson	234
12.2.1	Teorías Gauge y confinamiento	234
12.2.2	Soluciones exactas	238
12.2.3	Loop de Wilson en GBI	241
12.3	Operadores duales	244
12.3.1	Respuesta lineal	244
12.3.2	Relación GKP-Witten	245
12.3.3	Función de Green en GBI	247
13	GBI con campo escalar en 2+1	253
13.1	Introducción	253
13.2	Acción, ecuaciones de campo y soluciones	254
13.3	Geodésicas e invariantes de curvatura	258
13.4	Accion, ecuaciones de campo y soluciones en GBI	260
13.5	Estructura de agujero de gusano asociada	263
13.6	Geodésicas e invariantes de curvatura	265
13.7	Conclusiones	268
14	Conclusión y cuestiones abiertas	269
	Referencias	271
	Apéndice A Algunos cálculos destacables	293

Lista de Figuras

3.1	Trayectorias no equivalentes en una red dislocada, (Tagüeña Parga,1983). . .	33
3.2	Ilustración del transporte paralelo de un vector alrededor de un circuito cerrado [ABCD] [219].	36
3.3	Posiciones atómicas en un cristal con y sin una dislocación “edge type” [219].	37
3.4	Paralelogramo no cerrado tras insertar una dislocación “edge type” [219]. .	37
3.5	Disclinación en cuña para ángulos $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ y $\alpha = -\pi$ formadas mediante el procedimiento de Volterra [219].	41
3.6	Ilustración de los diferentes tipos de defectos en redes cristalinas [244]. . .	43
3.7	Diferentes tipos de defectos puntuales [225].	44
4.1	Isómeros del carbono [321].	59
4.2	Hibridación sp . El área sombreada denota la amplitud de probabilidad de presencia del electrón [321].	60
4.3	Hibridación sp^2 (poliacetileno): los átomos de carbono forman una cadena en zig-zag caracterizada por un ángulo de 120 grados. Todos los enlaces σ están contenidos en el plano X-Y, y un enlace de tipo π por carbono se establece perpendicularmente a dicho plano [321].	60
4.4	La red hexagonal en el grafeno [159]	61
4.5	Representación energía-momento de la relación de dispersión (4.39) con $\gamma = -1$ [159].	64
4.6	Primera zona de Brillouin para la red del grafeno. Los puntos de las esquinas del hexágono corresponden a los puntos de Fermi, para los que se tiene $E_k = 0$ [159]	65
4.7	Construcción de un anillo pentagonal en la red del grafeno [161]	67
4.8	Construcción de la junta entre el nanotubo y la lámina de grafeno [161] . . .	68

- 4.9 Nanotubo conectado a una lámina de grafeno. El prisma hexagonal que constituye el nanotubo está constituido por triángulos elementales. Dependiendo de la orientación de las estructuras hexagonales en el interior del triangulo elemental podemos tener nanotubos tipo “armchair” (b) o de tipo “Zig-Zag”(c) [154]. 68
- 4.10 Sección del agujero de gusano. Las líneas orientadas corresponden al flujo gauge ficticio atravesando los anillos heptagonales [161]. 71
- 6.1 Función radial $r(x)$ para el caso $s = +1$. De izquierda a derecha, las curvas representan $r_c = 0$ (caso RG , $r = x$, negro punteado) $r_c = 0.3$ (azul sólido), $r_c = 0.5$ (naranja sólido) y $r_c = 0.7$ (verde sólido). En cada caso, cuando $x = r_c$, la función radial $r(x)$ se anula, y las soluciones no pueden extenderse más allá de este punto. . 117
- 6.2 Función radial $r(x)$ para el caso $s = -1$. Con la misma notación que en la figura 6.1. En este caso se produce un rebote en $x = r_c$ y para cada valor de r_c se señala la presencia de la garganta del agujero de gusano. 119
- 6.3 Componente $g_{tt}(r)$, de la métrica. Para el caso $s = +1$ y $r_c = 0,5$. Encontramos i) soluciones tipo Reissner-Nordström con dos horizontes (azul sólido , $r_q = 1$, $r_s = 1.5$), un solo horizonte degenerado (azul discontinuo, $r_q = 1$, $r_s = \sqrt{2}$) y sin horizontes (azul punteado, $r_q = 3$, $r_s = 2$); ii) Soluciones tipo Schwarzschild con un solo horizonte (rojo, $r_q = 1$, $r_s = 2$); iii) soluciones sin horizontes (verde, $r_q = 0,5$, $r_s = 1,3$). Todas las soluciones son asintóticamente planas, $g_{tt} \rightarrow -1$ cuando $r \rightarrow \infty$ 120
- 6.4 Componente $g_{tt}(r)$ de la métrica para el caso $s = -1$, $r_c = 0.5$ y valores de $r_q = \sqrt{3}, r_s = 2.5$ (azul sólido); $r_q = \sqrt{1.5}, r_s = 2$ (azul discontinuo); $r_q = \sqrt{2}, r_s = 2$ (rojo sólido); $r_q = 1/\sqrt{2}, r_s = 1$ (rojo discontinuo) y $r_q = 3/2, r_s = 1/2$ (verde). 121
- 6.5 Representación de la gravedad superficial cuando la ecuación (6.68) se cumple. La curva verde representa la temperatura del horizonte interno, κ_- , mientras que la roja corresponde al horizonte externo, κ_+ . Nótese que para $\kappa_+ = \kappa_- = 0$ tenemos el caso extremal ($r_q = \sqrt{2|\epsilon|}$). Recordemos que para esta elección de r_s el horizonte interno está fijado en la posición $x = r_c$. . . 124
- 6.6 Representación del parámetro afín $E \cdot u$ versus la coordenada radial x para geodésicas radiales nulas entrantes (azul) y salientes (naranja) en el caso $s = +1$ con $r_c = 0.5$ y $u_0 = 0$. Estas geodésicas alcanzan la superficie $x = r_c$ en un tiempo afín finito y acaban allí, al no haber un espacio-tiempo por el que puedan extenderse. La línea negra discontinua corresponde a las geodésicas radiales nulas, que son asimismo incompletas. 125

6.7	El parámetro afín $E \cdot u$ versus la coordenada radial x para geodésicas radiales nulas entrantes (azul) y salientes (naranja) en el caso $s = -1$, con $r_c = 0.5$ y $u_0 = 0$. Como el rango de $u(x)$ cubre todo el eje real, estas geodésicas son completas. El resultado para RG se representa también (negro discontinuo) para compararlo con los resultados de nuestra geometría.	127
8.1	Comportamiento de la función radial $r(x)$ en la Ec. (8.59) para los casos $s = -1$ (izquierda) y $s = +1$ (derecha). En este gráfico hemos tomado $Q = l^2 = 1$ y cuatro valores de $ \varepsilon = 1/500$ (púrpura), $ \varepsilon = 1/10$ (naranja), $ \varepsilon = 1/4$ (rojo), and $ \varepsilon = 0.4$ (azul).	168
8.2	El comportamiento de la componente g_{tt} para los parámetros $\{l = 1, M = 1, Q = 2.5, J = 0.2\}$ en los casos $s = -1$ con $\varepsilon = -0.3$ (azul), $\varepsilon = -0.47$ (verde), $\varepsilon = -0.5$ (púrpura), $\varepsilon = +1$ (naranja) y su comparación con el caso RG $\varepsilon = 0$ (negro discontinuo). Aunque estos números no son muy razonables, ya que la carga no debería ser tan grande comparada con la masa mientras que la longitud cuadrada l^2 debería ser mayor comparada con M para evitar tener un universo demasiado pequeño, estos números se han elegido para remarcar la existencia de configuraciones adicionales en términos de ergosferas en comparación con las soluciones usuales BTZ en RG.	170
10.1	Las funciones $f_\Lambda(z)$ y $A(z)$ para $M = Q = \lambda = 1, \varepsilon = -0.01, r_c = r_m = 0.31$	219
10.2	Potencial eléctrico en el horizonte	222
12.1	Representación esquemática del par quark-antiquark interactuando en el Wilson Loop [268].	236
12.2	Cuerda y separación entre quarks. Separación menor cerca del origen, $r = 0$ [268].	237
13.1	$\rho(z) = \frac{r(z)}{R_0}, \delta = 0.2$	264
13.2	Geodésicas nulas, ($\delta = 0.2$)	266
13.3	Geodésicas radiales temporales: $F(z) = E^2(1 + \frac{1}{z^2}) - 1 - \delta (1 + \frac{1}{z^2})^2$ ($E = 1.1, \delta = 0.2$) . . .	267

Parte I

Introducción y conceptos básicos.

Capítulo 1

Introducción

1.1 La gravedad de Einstein

Desde hace más de cien años, la teoría de la Relatividad General (RG) en la formulación debida a Albert Einstein ha resultado ser la descripción más consolidada de la gravedad, entendida ésta como campo clásico sin cuantizar. Además de los bien conocidos tests clásicos [357], ha demostrado describir correctamente la interacción gravitacional en un amplio rango de escalas espaciales y densidades de materia y energía, y sus predicciones más aventuradas, como la existencia de ondas gravitacionales generadas tras la fusión de agujeros negros propagándose a la misma velocidad que la radiación electromagnética, han sido confirmadas recientemente [1, 2].

No obstante, desde el punto de vista de la observación cosmológica, la teoría de Einstein requiere la presencia de ciertos componentes “exóticos” adicionales. En ese sentido, las observaciones de la anisotropía presente en el fondo cósmico de microondas (“Cosmic Microwave Background”, CMB en su original en inglés), así como la información ofrecida por los catálogos de galaxias refuerzan la idea de un universo que, a grandes escalas, parece gobernado por la teoría de Einstein suplementada por la presencia de una constante cosmológica y la existencia de materia oscura [75] cuya distribución alrededor de las galaxias espirales resulta necesaria para explicar las curvas de rotación observadas [115]. Por otra parte, ciertas medidas de distribución de materia y radiación a muy grandes escalas sugieren la existencia de un tipo de energía gravitacionalmente repulsiva [107, 319, 290, 297, 90, 320]. Dichos modelos necesitan en cualquier caso ser asimismo reforzados por un modelo inflacionario que explique cómo puntos desconectados causalmente por la propia edad estimada del universo, esto es, que no han podido ser puestos en contacto mediante la llegada de información viajando a la velocidad de la luz, habida cuenta de la magnitud de dicha

velocidad, de la distancia entre dichos puntos y de la edad estimada del universo, muestran correlaciones mutuas [22, 353].

Además de lo que la cosmología y la astrofísica observacional tienen que decir al respecto, desde el punto de vista puramente matemático la RG presenta también algunas características especiales que llaman poderosamente la atención: nos referimos, por supuesto, a la inevitable presencia de singularidades espacio-temporales en la teoría; regiones del espacio-tiempo en las que la capacidad predictiva de la teoría se detiene. Esta característica no deseada de la RG puede ilustrarse con la descripción de la formación de un agujero negro a partir del colapso gravitacional de una estrella que ha agotado su combustible nuclear [207] o en la propia evolución inicial del universo [142]. Si admitimos la máxima dictada por la lógica de que “las cosas no deben desaparecer en la nada o surgir repentinamente de ella” o dicho en términos newtonianos: que la teoría debe ser capaz de predecir en cada instante las propiedades que caracterizan los campos de materia y energía, entonces la existencia de singularidades es decididamente una característica no deseada. Una forma elegante de dar cabida a dichas singularidades en el marco de la RG es su clasificación entre las llamadas singularidades desnudas y aquellas recubiertas por un horizonte de sucesos que las desconecta causalmente del resto del universo, gobernado sin problemas por Física bien conocida. En este sentido, la hipótesis de la censura cósmica resulta especialmente sugerente [357, 299, 332]. Un tratamiento de las singularidades desnudas desde el punto de vista mecanocuántico puede encontrarse asimismo en [184].

Si en el juego de las grandes escalas o de los tiempos lejanos la RG se ve sometida a duras pruebas, no lo es menos en el ámbito de grandes energías o de las escalas del orden de la escala de Planck. La existencia de singularidades a dicha escala es un indicio de que la teoría ha sido llevada más allá de su límite y de que tal vez debemos considerar la RG a modo de teoría de campos efectiva que funciona bien hasta la longitud de Planck [77]. La dificultad, de momento no superada, para cuantizar la teoría de la gravedad está, por supuesto, directamente implicada en esta visión de la RG como teoría de campo efectivo. En el modelo estándar, la gravedad se describe como una teoría clásica, mientras que el resto de fuerzas fundamentales se describen por teorías de campo gauge, siendo las teorías gauge cuantizables. La llamada *teoría de cuerdas* [307, 215] permite reconciliar ambos marcos conceptuales y dar una descripción cuántica de la gravedad, pero al precio de mostrarnos un universo más allá de las cuatro dimensiones espacio-temporales conocidas y con grandes problemas abiertos a la hora de definir los parámetros de la teoría.

1.2 Otras teorías de la gravedad

Las anteriormente mencionadas dificultades relacionadas con los escenarios en los que las densidades de energía implicadas se acercan a la escala de Planck nos ponen sobre la pista de que una visión cuántica de la gravedad parece ser necesaria. Si consideramos la gravedad como una teoría de campos débilmente acoplada e intentamos cuantizarla, la renormalización de la teoría pronto se desvela como no viable, (la gravedad es una teoría cuya constante de acoplamiento tiene dimensiones de inversa de la masa) [301]. En la escala de Planck, la propia estructura del espacio-tiempo debe presentar una naturaleza cuántica. Esto es, el espacio-tiempo que en nuestra escala vital aparece como un continuo, debe comportarse como una estructura organizada alrededor de celdas de dimensión mínima, asociada a nuevos fenómenos físicos. Es lo que Wheeler describió poéticamente como “la espuma del espacio-tiempo” [365, 262].

En ausencia de una teoría cuántica de la gravedad, cuyo despegar definitivo probablemente necesitará de nuevos datos observacionales que permitan relanzar su discurso [89], una gran variedad de modificaciones clásicas a la gravedad de Einstein han sido propuestas para tratar de solucionar las patologías observadas en ella, a saber: la existencia de divergencias en la curvatura asociadas a las grandes densidades de energía y la presencia de singularidades espacio-temporales en las que la teoría pierde su capacidad predictiva. Dichas modificaciones actúan principalmente a nivel de la acción, modificando la sencilla expresión de la acción de Einstein-Hilbert para añadir términos en la expansión en función de invariantes de curvatura [231]. Otras modificaciones a la gravedad de Einstein que podemos citar son por ejemplo la gravedad de Lovelock [246], teorías $f(R)$ y gravedad *rainbow* [186, 377], teleparalelismo y teorías $f(T)$ [158], o gravedad de dilatones y teorías no conmutativas [122, 264, 355, 47], por citar algunas.

En nuestro trabajo nos vamos a centrar en un tipo muy concreto de teorías: vamos a trabajar con modelos de gravedad cuya acción se basa en diversas formas del tensor de Ricci, formuladas “à la Palatini” [278] y, en particular, en la gravedad de Born-Infeld conocida generalmente como EiBI, por su versión en inglés : “Eddington-Inspired Born-Infeld Gravity”, a la que nos referiremos en adelante simplemente como “gravedad de Born-Infeld”, (GBI)[58].

La RG establece una profunda conexión entre gravedad y geometría: la materia y la energía curvan el espacio-tiempo y generan una geometría con propiedades muy diferentes de aquellas propias de la euclidiana o de su extensión al espacio de Minkowski. Asumido entonces el hecho de que la gravedad genera una geometría no euclidiana para la estructura

del espacio-tiempo, la pregunta de a qué geometría asociar los efectos gravitatorios surge de forma natural.

Einstein desarrolló su trabajo original [133] que combinaba gravitación con geometría utilizando no la geometría de Euclides, sino la geometría de Riemann [287], en la cual la métrica, entendida como el tensor simétrico de segundo orden que dota al espacio de los conceptos de distancia y ángulo, es la única variable dinámica responsable de toda la estructura geométrica. Sin embargo, ya desde los tiempos de Euclides sabemos que es posible describir una geometría mediante los conceptos de punto, línea y plano, de incidencia y paralelismo, sin necesidad de introducir el concepto de métrica. La conexión es el objeto matemático que describe en última instancia la estructura afín de la geometría, especifica la forma en que los vectores base cambian de un punto a otro de la variedad y permite definir el concepto de transporte paralelo. Vemos por tanto que conexión y métrica describen aspectos bien diferenciados de la geometría. Sin embargo, en el enfoque riemanniano, métrica y conexión no son tratadas como entidades geométricas independientes, sino que la conexión queda subordinada a la métrica por la exigencia de que el producto escalar de dos vectores que son transportados paralelamente a lo largo de una curva permanezca covariantemente constante. Dicha exigencia conlleva que la derivada covariante del tensor métrico sea idénticamente nula, y fija la conexión como la conexión de Levi-Civita, unívocamente determinada a partir del tensor métrico. Sin embargo, es posible relajar esta condición matemática para dar lugar a geometrías de tipo métrico-afín, en las que métrica y conexión son tratadas a priori como grados de libertad independientes sobre los que considerar variaciones asimismo independientes al aplicar el principio de acción estacionaria, y sus posibles relaciones deben establecerse “on shell” al resolver las ecuaciones de campo, (formulación “à la Palatini”) [278]. En condiciones de metricidad, ($\nabla_{\alpha}g_{\mu\nu} = 0$) la conexión puede descomponerse en una parte simétrica (símbolos de Christoffel) y otra antisimétrica, relacionada con el tensor de torsión. De acuerdo con el principio de equivalencia [133], la materia sigue geodésicas determinadas solo por la parte simétrica de la conexión [219]. Como los símbolos de Christoffel son generados exclusivamente a partir de la métrica via derivadas de la misma, el principio de equivalencia establece que la materia solamente ve la parte métrica de la conexión, lo que es otra de las razones por las que la RG se desarrolló en el marco de una geometría puramente métrica.

Tenemos, pues, que elementos matemáticos asociados a la conexión, como son la torsión y la no metricidad, nos llevan a estructuras geométricas que van más allá de la geometría de Riemann. Los espacios dotados de una torsión no nula reciben el nombre de espacios de Riemann-Cartan [130]. La torsión, como veremos, puede relacionarse con los defectos

translacionales generados por transformaciones de coordenadas singulares [219, 225], lo cual tiene especial relevancia en escenarios de materia condensada.

1.3 Estructura de la materia y geometrías no riemannianas

Si consideramos entonces que la gravedad se manifiesta como un fenómeno geométrico en escalas de longitud por encima de la escala de Planck, los efectos asociados a la “espuma del espacio-tiempo” descrita por Wheeler, podrían exigir una formulación geométrica en los términos no riemannianos que acabamos de indicar en la anterior sección. Ninguna evidencia experimental u observacional nos da información de cómo puede ser semejante estructura espacio-temporal, pero sí existen en la naturaleza configuraciones de sistemas físicos que pueden ilustrar la transición de un espacio-tiempo discreto a uno continuo: la transición de una red cristalina discreta y con defectos a una geometría continua emergente no riemanniana [219, 244, 225]. Un ejemplo concreto lo ofrecen los cristales de Bravais [244, 225, 226], susceptibles de ser descritos en términos de una geometría diferencial efectiva en el límite del continuo, la cual puede considerarse riemanniana cuando no existen defectos estructurales (cristal perfecto), pero que responde a modelos no métricos cuando existen huecos o impurezas en la estructura atómica de la red. Esto es así porque sin defectos, la estructura de la red es simplemente una deformación continua de un espacio Euclídeo, en el que las distancias se miden por simple contage de átomos, por lo que una se puede relacionar con la otra mediante transformaciones de coordenadas curvilíneas infinitamente diferenciables. Sin embargo, la presencia de defectos en la red, como la falta de átomos o la presencia de impurezas, puede exigir una correspondencia entre la estructura Euclídea idealizada y la real que implique cambios de coordenadas singulares, en los que puntos del espacio inicial no tienen su contrapartida en el espacio imagen. De este tipo de cambios de coordenadas hablaremos en detalle más adelante. Vemos, de esta manera, que la naturaleza discreta de las estructuras materiales nos remite directamente a la hipótesis de Wheeler sobre la naturaleza cuántica o discretizada del espacio-tiempo.

Además de los defectos de naturaleza puntual, la existencia de defectos distribuidos linealmente conducen a líneas de dislocación, las cuales pueden ser asociadas con el concepto de torsión cuando se considera el límite al continuo, por lo que fenómenos puramente no métricos, como la existencia de impurezas o átomos intersticiales, conviven e interactúan con las geometrías de Cartan, caracterizadas por poseer torsión. El ámbito de ciertas estructuras

de tipo cristalino, por tanto, exige una descripción en el continuo que supera la original propuesta riemanniana.

Un segundo ejemplo, sugerido en el contexto de la materia condensada, es el grafeno [94]: estructura plana formada por una capa individual de átomos de carbono, en la que la introducción de impurezas en la red genera efectos de curvatura, permitiendo modelizar variedades diferenciables como las trompetas de Beltrami [196] o estructuras tipo “agujero de gusano” [161]. Este último resultado es especialmente interesante, ya que, como veremos, dichas estructuras surgen de forma natural en el contexto de una gravedad de Born-Infeld formulada “à la Palatini”. El grafeno también es un banco de pruebas para testear las propiedades de las estructuras surgidas a partir de las soluciones de las ecuaciones de Einstein, en el contexto de la RG [196, 109]. Una introducción al grafeno y sus propiedades especialmente pedagógica puede encontrarse en [321].

1.4 La correspondencia AdS/CFT

La correspondencia AdS/CFT [251] establece una relación dual entre una teoría cuántica de campos dotada de invariancia conforme (“Conformal Field Theory”, CFT en su original en inglés) definida en la frontera $(d - 1)$ -dimensional de un espacio-tiempo Anti-de Sitter (AdS) en d dimensiones, y una teoría de la gravedad que vive en el interior, (“bulk”) de esta superficie frontera, de tal manera que los observables físicos de la teoría conforme pueden calcularse a partir de los de la teoría de la gravedad dual, y es esta gravedad en un espacio-tiempo curvo la que determina la naturaleza de la teoría gauge que vive en su frontera, en lo que supone una aplicación directa del llamado principio holográfico [342, 368].

Originalmente, la correspondencia se planteó en el marco de una teoría de supercuerdas [164, 306] en la que la gravedad tiene un comportamiento cuántico y está unificada con el resto de fuerzas (interacciones electromagnéticas, débiles y fuertes) mientras que la teoría gauge que vive en la frontera no describe tal unificación de la gravedad, lo que la asemeja más a una descripción de nuestra Física familiar en el contexto del modelo estándar.

Otra de las características de la teoría gauge considerada es que es una teoría fuertemente acoplada, lo que dificulta mucho su análisis en los términos perturbativos habituales en la teorías cuánticas de campos [301]. La correspondencia AdS/CFT nos dice que es posible analizar la teoría fuertemente acoplada usando las variables de la teoría de la gravedad dual, que inversamente, tiene un acoplamiento débil [268]. La correspondencia entre ambas teorías duales se justifica matemáticamente en el sentido de que se puede establecer un diccionario que relacione las variables físicas de una teoría con las variables físicas de la otra, de tal forma que resolver las ecuaciones de la gravedad nos proporciona información sobre la teoría

gauge asociada. Como sabemos bien, la teoría gauge que describe la materia en la escala del quark es la Cromodinámica Cúantica (“Quantum ChromoDynamics”, QCD en su original en inglés) [303], con un número de colores $N_c = 3$, pero es posible estudiar ciertos aspectos del confinamiento hadrónico y del plasma quark-gluón, (“Quark-Gluon Plasma”, QGP en su original en inglés) utilizando la correspondencia, que se demuestra también una herramienta útil en el campo de la materia condensada: (estudio de la transición de fluidos, líquidos de Luttinger, fenómenos disipativos, viscosidad, etc) de forma que las ecuaciones de campo para la teoría de la gravedad nos dan información sobre la Física de la teoría gauge asociada. Como ejemplo paradigmático de la correspondencia tenemos la equivalencia entre una teoría de cuerdas de tipo *IIIb* en un espacio $AdS_5 \times S^5$ (en el lado de la gravedad) y una teoría supersimétrica fuertemente acoplada, de tipo Yang-Mills $SU(4)$ definida en su frontera [251]. Si en lugar de considerar la teoría gauge para un número de colores $N_c = 4$ se estudia el límite $N_c \rightarrow \infty$ se encuentra que la teoría de gravedad asociada puede dejar de describirse como una teoría cuántica y tratarse clásicamente, lo que facilita mucho los cálculos ya que se puede trabajar en el “bulk” con la teoría de la RG, o como se ilustrará en el presente trabajo, con una teoría de la gravedad “à la Palatini”.

Otro de los puntos de conexión importantes entre la teoría de la gravedad y la teoría gauge asociada tiene que ver con el concepto de temperatura y entropía del agujero negro [164, 358], ya que de acuerdo con el diccionario de la correspondencia, existe una relación directa entre las funciones de partición de ambas teorías [149], lo que permite extraer información acerca de la termodinámica asociada a la teoría conforme mediante el estudio de la acción de la gravedad que vive en el “bulk”. El diccionario AdS/CFT establece, asimismo, una correlación entre los sectores de materia en ambas teorías, de tal forma que la resolución de las ecuaciones de movimiento para campos gauge, fermiones o escalares en el “bulk” se corresponde con el comportamiento de ciertos operadores duales de ellos en la teoría gauge asociada [250].

A pesar de que la correspondencia utiliza una teoría gauge de tipo Yang-Mills [355] supersimétrica $SU(4)$ que presenta importantes diferencias con QCD, teoría ésta que describe de manera realista la interacción nuclear fuerte, la correspondencia ha resultado ser una herramienta útil para analizar el mundo real. Ejemplos de ello son su tratamiento del mencionado plasma quark-gluon o problemas asociados a la física de la materia condensada, la hidrodinámica de fluidos [31] y las transiciones entre estados de no equilibrio [176].

En la mayor parte de las anteriormente mencionadas referencias, la correspondencia AdS/CFT se construye utilizando como teoría de la gravedad en el “bulk” la Relatividad General acoplada a diferentes fuentes de materia. A este respecto, un objetivo de mis tesis es desarrollar algunos ejemplos característicos de la correspondencia usando, en su lugar, la gravedad GBI en 2+1 dimensiones acoplada al electromagnetismo de Maxwell. En los

resultados analíticos aquí obtenidos encontramos los efectos característicos de la gravedad GBI descritos por la presencia de estructuras adicionales a las de la RG en la forma de términos dependientes del parámetro ϵ propio de dicha teoría de gravedad modificada. Si las modificaciones en la topología del espacio-tiempo asociadas a la gravedad GBI, (ya bien establecidas y analizadas en los artículos de investigación publicados por el grupo en el que participo) pueden tener repercusiones en la estructura de la teoría gauge en la frontera, entonces nuevos efectos y desviaciones en los observables de dicha teoría relacionados con los campos anteriormente mencionados pueden manifestarse, aportando nueva información en otros campos relevantes de la Física actual. Esta es en la actualidad una cuestión completamente abierta y además de los desarrollos analíticos presentados aquí, es necesario una importante labor de carácter numérico, a llevar a cabo en futuros trabajos, para poder cuantificar los efectos de dichas posibles desviaciones.

1.5 Objetos compactos en rotación

La detección de ondas gravitacionales en el año 2015 [1, 2] ha sido una de las noticias más esperadas en el campo de la gravitación desde la concepción de la RG por Einstein. La confirmación de que pueden existir objetos ultracompactos que moviéndose a velocidades próximas a la de la luz pueden chocar con otros de características similares en un proceso cataclísmico que perturba la estructura misma del espacio-tiempo parece un concepto surgido de la ciencia ficción, aunque es ampliamente superado por la realidad. Las ondas gravitacionales observadas por los laboratorios LIGO y VIRGO confirman que estos fenómenos ocurren con relativa frecuencia, lo que ofrece nuevas oportunidades para explorar las propiedades de la interacción gravitatoria a energías e intensidades imposibles en laboratorio.

La información que proporcionan las ondas gravitacionales se complementa con la obtenida por otras vías, como la electromagnética. En este sentido, en abril de 2019 se hicieron públicas las primeras imágenes que reconstruían la emisión de ondas de radio procedentes del disco de acreción de un objeto supermasivo y compacto en el corazón de la galaxia M87. En 2022, se publicaron imágenes similares del objeto central de nuestra propia galaxia, conocido como Sagittarius A*. En ambos casos, las imágenes parecen compatibles con lo esperado de acuerdo con la RG para un agujero negro con rotación. Evidencias similares se observan en los detectores de ondas gravitacionales, donde la mayoría de colisiones se interpretan como debidas a agujeros negros en rotación. No obstante, la precisión de las observaciones no es suficiente para concluir con firmeza que efectivamente esos objetos compactos poseen todas las características atribuidas a los agujeros negros, pues podría tratarse de objetos ultracompactos similares pero no estrictamente iguales que los

agujeros negros. Además, la necesidad física de evitar la existencia de singularidades exige que los objetos compactos que observamos deban ser, al menos, ligeramente distintos de los agujeros negros de la RG. Por ello, existen grandes esfuerzos teóricos a nivel mundial por construir soluciones alternativas capaces de capturar la esencia de los agujeros negros mediante otros tipos de objetos compactos que no posean las patologías de éstos. Esta no es una tarea sencilla dentro de la RG, siendo aún más exigente en teorías alternativas, donde las ecuaciones suelen ser aún más complicadas.

En esta tesis haremos un esfuerzo significativo por progresar en esta dirección, mostrando que es posible generar soluciones de objetos compactos con rotación en teorías alternativas de la gravedad de tipo métrico-afín. Para ello haremos uso de un método desarrollado a lo largo de los últimos cinco años por el grupo en el que se ha llevado a cabo esta tesis doctoral. La secuencia en la que mostramos la aplicación de esta técnica ilustra el proceso evolutivo de la misma, pues primero obtenemos una solución explícita que no resulta óptima desde el punto de vista físico pero posteriormente mostramos que es posible aplicarla de manera general, abriendo así una vía sólida para explorar otras configuraciones con mayores opciones de representar objetos reales.

En este proceso de aprendizaje en el uso de esta técnica, también nos adentraremos en modelos gravitacionales en $2 + 1$ dimensiones, pues ese es el punto de contacto que buscamos con la física de la materia condensada y el grafeno. Así, estudiaremos la solución conocida como agujero negro de BTZ, introducida por Bañados, Teitelboim y Zanelli [257, 41, 40], y mediante la técnica de *mapping* conseguiremos generar nuevas soluciones de este tipo dentro de la teoría de gravitación de Born-Infeld. Estas soluciones, y otras similares, nos servirán para llevar a cabo diferentes estudios sobre fermiones y holografía, entre otros.

1.6 Estructura general de la tesis

El contenido de esta tesis doctoral se ha dividido en tres partes principales, siendo la primera de introducción a ciertos conocimientos básicos, la segunda sobre resultados nuevos publicados en revistas de prestigio internacional, y la tercera dedicada a nuevos desarrollos y cuestiones abiertas. En la primera parte, en el capítulo 2 resumimos algunos aspectos especialmente significativos sobre la teoría de la RG así como sus límites. En los capítulos 3 y 4 abordaremos las extensiones a la RG que introducen la torsión y los espacios de Cartan, así como sistemas y teorías físicas con las que vamos a intentar establecer algún tipo de conexión desde el punto de vista de una teoría de la gravedad modificada “à la Palatini”. En el capítulo 5 desarrollamos los fundamentos de una teoría de la gravedad de acuerdo a la mencionada propuesta, así como el resto de herramientas que van a ser habituales en el resto

del trabajo. La segunda parte está formada por los capítulos 6, 7 y 8, donde se presentan los artículos desarrollados con el grupo de investigación en el que se ha llevado a cabo esta tesis doctoral y en los que he participado en calidad de doctorando. Los resultados de dichos artículos se utilizan ampliamente en la tercera parte, que presenta asimismo las aportaciones más originales que he realizado, desarrolladas en los capítulos 9 a 13. El capítulo 14 expone nuestras conclusiones, y el anexo A da detalles de cálculos que hemos considerado de especial interés.

Capítulo 2

Bases de la Relatividad General

2.1 Aspectos básicos de la geometría riemanniana

2.1.1 Variedades, cartas y espacio tangente

Para este breve repaso de los conceptos básicos de la RG consideremos bien conocido el espacio-tiempo de Minkowski habitual en la teoría de la Relatividad Especial (RE) [132] y en prácticamente toda la teoría cuántica de campos de nuestro tiempo [301], y estudiemos cómo debe transformarse matemáticamente ese espacio-tiempo plano para ser coherente con los postulados fundamentales de la RG:

1. La densidad de masa y energía tiene la capacidad de curvar el espacio-tiempo. Las partículas libres en el seno de un campo gravitatorio siguen trayectorias que coinciden con las geodésicas de dicho espacio-tiempo.
2. En cualquier punto del espacio-tiempo en un campo gravitacional dado, siempre es posible elegir un sistema de coordenadas localmente inercial (sistema de referencia en caída libre) de manera tal que, en una región lo suficientemente pequeña alrededor de ese punto, las leyes de la naturaleza toman la misma forma que en un sistema de coordenadas cartesianas e inercial en ausencia de gravedad.

La primera afirmación nos dice que la gravedad puede entenderse como una deformación del espacio-tiempo plano causada por las densidades de masa y energía, e introduce una relación directa entre gravedad y geometría. La segunda, conocida como el principio de equivalencia, (PE) nos dice que siempre es posible encontrar un sistema de coordenadas en el que, localmente, el espacio-tiempo tiene las características del espacio de Minkowski. En la siguiente sección analizaremos con más detalle el papel del principio de equivalencia y el concepto de geodésica.

El objeto matemático básico necesario para la formulación de la RG es el de variedad diferenciable. Cuando la RG fue establecida como teoría de la gravedad el estudio de las variedades diferenciables y de geometrías no euclideas estaba limitado a la formulación riemanniana. En dicha formulación, toda la información sobre la geometría está contenida en el tensor métrico. No fue hasta poco después del advenimiento de la RG cuando los conceptos de torsión y de no metricidad fueron introducidos en el estudio de geometrías diferenciales. Teniendo en cuenta además que los efectos de ambas desviaciones de la geometría de Riemann solo son susceptibles de manifestarse en el régimen de altas densidades de energía [2], la aproximación riemanniana sigue siendo totalmente válida en un amplio rango de escenarios.

En este rápido repaso por la geometría de Riemann, se recomiendan los textos clásicos en geometría diferencial: [241, 232, 266], así como referencias más modernas, que desarrollan la RG desde un nivel más básico [202, Lorente].

De acuerdo con el principio de equivalencia, si queremos que el espacio-tiempo sea localmente semejante a un espacio-tiempo plano en m dimensiones R^m , parece lógico pedir que una de las propiedades de las variedades (M) sea que en cada punto p de un determinado entorno de la misma, exista una aplicación que mapee los puntos contenidos en dicho entorno a R^m . Definimos entonces la variedad (M) como un espacio topológico sobre el que se ha definido un conjunto de pares $\{U_i, \varphi_i\}$, donde U_i es un abierto en M y $\varphi_i : U_i \rightarrow Y$ es un homeomorfismo con Y abierto en R^m . Cada uno de los pares así definidos recibe el nombre de mapa o carta [202].

Por tanto, para construir una variedad completa con adecuadas propiedades de continuidad y diferenciabilidad, lo que hacemos es pegar las suficientes cartas así definidas para recubrir nuestro espacio topológico M . Si dos mapas se solapan en una determinada región, en dicha zona de solapamiento debe existir un cambio de coordenadas que nos permita relacionar las expresiones escritas en un sistema de coordenadas con las expresiones escritas en el otro, es decir, las coordenadas inducidas asociadas a cada carta deben asimismo poder relacionarse mediante una función invertible.

Las variedades se definen intrínsecamente, es decir, el espacio M de referencia solo necesita tener propiedades topológicas bien definidas, pero es habitual trabajar siempre con variedades incluidas en un cierto R^n que reciben el nombre de subvariedades. Por ejemplo, la esfera de radio unidad es una subvariedad ($m = 2$) inmersa en R^3 . En este caso, llamaremos parametrizaciones a las funciones inversas de las cartas, es decir, la parametrización será una función $\sigma : R^m \rightarrow R^n$. Así, el plano definido mediante $\pi \equiv x + y + z = 1$ es un segundo ejemplo de subvariedad 2-dimensional, una superficie inmersa en el espacio tridimensional. La carta será en este caso una función de 3 variables, definida sobre los puntos

p pertenecientes a la subvariedad y su imagen, será una función con 2 componentes a las que se las nombra habitualmente como "funciones coordenadas". Consideremos la coordenada i -ésima: introducimos a partir de ella el vector en R^3 definido como $\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial \sigma}{\partial x^i}$, donde σ es la correspondiente parametrización. Tanto si trabajamos con subvariedades o en el caso particular en que los espacios inicial y final son de la misma dimensión, la anterior definición nos permite introducir una base de vectores sobre la variedad. Dada entonces una variedad n -dimensional M y un punto $p \in M$, se denomina espacio tangente de M en p , y se denota con $T_p(M)$, al espacio generado por $B = \{\partial_1|_p, \dots, \partial_m|_p\}$. La base dual se suele denotar mediante $B^* = \{dx^1|_p, \dots, dx^m|_p\}$ esto es, por definición dx^i es en cada punto una aplicación líneal tal que $dx^i(\partial_j) = \delta_j^i$. Al espacio vectorial generado por B^* se le denomina espacio cotangente de M en p y se denota con $T_p(M)^*$, dual de $T_p(M)$. Los elementos de $T_p(M)$ se llaman 1-formas (o covectores)[266].

La introducción de los espacios tangente y cotangente así como sus correspondientes bases nos permite definir los tensores r -contravariantes, s -covariantes sobre nuestra variedad. Así, un campo tensorial (C^∞) de tipo (r, s) en M o simplemente un tensor de tipo (r, s) en M es una aplicación que asigna a cada punto $p \in M$ un tensor (r, s) con $V = T_p(M)$ $V^* = T_p(M)^*$ y que en cada carta tiene componentes C^∞ . Consideremos ahora que tenemos dos cartas, $(\phi = (x_1, \dots, x_m), U)$ y $(\phi' = (x'_1, \dots, x'_m), U')$, de tal forma que $(U \cap U' \neq \emptyset)$. En la región en que ambas cartas se superponen la función $\phi \circ \phi'^{-1}$ pasa de (x'_1, \dots, x'_m) a (x_1, \dots, x_m) : la matriz de su diferencial vendrá dada por $\frac{\partial x_i}{\partial x'_j}$ y su inversa por $\frac{\partial x'_i}{\partial x_j}$, de manera que las componentes de un tensor $T(r, s)$ en la carta $(\phi = (x_1, \dots, x_m), U)$ se relacionarán con las correspondientes en la carta $(\phi' = (x'_1, \dots, x'_m), U')$ mediante las bien conocidas formulas de tensorialidad [Lorente]:

$$T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{k_1}} \times \dots \times \frac{\partial x^{i_r}}{\partial x^{k_r}} \right) \times \left(\frac{\partial x^{l_1}}{\partial x'^{j_1}} \times \dots \times \frac{\partial x^{l_s}}{\partial x'^{j_s}} \right) T_{l_1, \dots, l_s}^{k_1, \dots, k_r} \quad (2.1)$$

Un tipo de tensor de especial relevancia que podemos definir sobre nuestra variedad es el llamado tensor métrico, que nos permite introducir el concepto de distancia. Se dice que G es un tensor métrico si es un tensor dos veces covariante y sus componentes g_{ij} forman una matriz simétrica no singular. La introducción de un tensor métrico en la variedad lleva directamente a la definición de variedad de Riemann como aquella variedad en la que se ha definido un campo de tensores métricos (la métrica). Dos comentarios son pertinentes al respecto de esta definición. En primer lugar, se reserva el calificativo de variedad riemanniana a aquellas variedades en las que la métrica es definida positiva. El concepto de variedad

semi-riemanniana permite introducir también aquellas métricas no necesariamente definidas positivas como es el caso de la métrica de Minkowski, (variedades lorentzianas). Por otro lado, la anterior definición declara implícitamente el hecho de que la geometría de Riemann está asociada a la presencia de una métrica. Como veremos a en la siguiente sección, la presencia de una métrica definida sobre la variedad, junto con la exigencia de que las funciones coordenadas sean continuas y diferenciables, (esto es, que todos los puntos del espacio origen tengan imagen y viceversa), implica, (como analizaremos en el siguiente capítulo) que la cantidad tensorial conocida como torsión se anule, y va a determinar la forma en que los vectores se transportan a lo largo de la variedad, y cómo definir entonces la propia operación de derivación en la misma [266].

2.1.2 La conexión de Levi-Civita

Consideremos una carta $(\phi = (x_1, \dots, x_n), U)$ y V un campo de vectores definido en la carta. Consideremos también que el espacio U en la definición de la carta coincide con R^n . De acuerdo a nuestra anterior definición de espacio tangente y definiendo el vector base $e_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}$ en cada punto p de la variedad, el campo de vectores se podrá escribir como $V = V^i e_i$. A partir de aquí nos planteamos qué forma adopta la derivada de nuestro campo vectorial. Algunas reflexiones previas al respecto son pertinentes: la derivación es una operación matemática que implica siempre la evaluación de las diferencias de una función entre determinados puntos. En el caso de la derivación de funciones reales de variable real, esto no representa ningún problema, pero cuando tratamos con derivadas de vectores definidos sobre variedades, necesitamos referir explícitamente ambos vectores a un mismo sistema de referencia para poder restarlos, esto es, hemos de “transportar” el vector original a la posición del vector final, dicha operación, en la que uno de los vectores conservando su orientación original, es aplicado al mismo punto de la variedad en la que se define el otro, recibe el nombre de transporte paralelo y no está definida “a priori” la forma en que hemos de llevar a cabo dicho procedimiento sobre la variedad. Si pedimos a dicha diferencia que sea coherente con las propiedades naturales de la derivada, esto es, que se anule en el límite $\Delta x \rightarrow 0$ y que sea lineal (que la diferencia de la suma de dos vectores sea igual a la suma de las diferencias) es fácil ver que dicha diferencia debe venir caracterizada por ciertos coeficientes Γ_{ij}^k que reciben el nombre de coeficientes de la conexión [266]. Teniendo esto en cuenta, consideremos la derivada j -ésima del vector V :

$$\frac{\partial V}{\partial x^j} = \left(\frac{\partial V^k}{\partial x^j} + \Gamma_{ij}^k V^i \right) e_k \quad (2.2)$$

El objeto Γ_{ji}^k se corresponde entonces con la componente k -ésima del vector $\frac{\partial e_i}{\partial x^j}$ cuando lo desarrollamos como una combinación lineal en la base natural del espacio tangente. Tenemos entonces que en un espacio que va más allá de Euclides, se cumple

$$\frac{\partial V}{\partial x^j} = \left(\frac{\partial V^k}{\partial x^j} + \Gamma_{ij}^k V^i \right) e_k. \quad (2.3)$$

A diferencia de lo que ocurre en el espacio euclideo R^n donde la base canónica $\{e_i\}$ no cambia de un punto a otro del espacio, en una variedad dichos vectores base no son constantes en dirección ya que la orientación espacial del espacio tangente varía de un punto p a otro de la variedad. Cuando en la anterior expresión se considera que las funciones características de la carta y su inversa son de clase C^∞ , la conexión queda fijada en la llamada conexión de Levi-Civita, cuyos coeficientes reciben el nombre de símbolos de Christoffel, cumpliendo la propiedad de simetría en los índices inferiores $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. Dicha propiedad puede verse fácilmente si consideramos que $\frac{\partial e_i}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^j \partial x^i} = \Gamma_{ji}^k e_k$ y $\frac{\partial e_j}{\partial x^i} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^i \partial x^j} = \Gamma_{ij}^k e_k$. Si la función σ es de clase C^∞ , se tendrá la igualdad de las derivadas cruzadas, y de ahí la mencionada propiedad de simetría en los índices inferiores. En tal situación, como analizaremos a continuación, la conexión queda unívocamente determinada por la métrica, y la parte no simétrica en los índices inferiores, que tiene que ver con el llamado tensor de torsión, se anula. Los espacios dotados de torsión reciben el nombre de espacios de Cartan [130] y los analizaremos con detalle en el siguiente capítulo, mientras que los espacios en los que dicha cantidad tensorial es nula, reciben el nombre de espacios de Riemann, y cuya geometría asociada viene descrita por la mencionada conexión de Levi-Civita, cuyos coeficientes cumplen la anterior propiedad de simetría, y es la geometría (métrica) en la que nos centraremos en este capítulo.

Vamos a comprobar ahora que el término entre paréntesis en (2.2), que recibe el nombre de derivada covariante :

$$\nabla_j V^k \equiv V_{;j}^k = \frac{\partial V^k}{\partial x^j} + \Gamma_{ij}^k V^i \quad (2.4)$$

se va a transformar como un tensor (1, 1) bajo un cambio de coordenadas. De la forma general de la derivada en las coordenadas $\{x'\}$:

$$\frac{\partial V}{\partial x'^j} = V'^k_{;j} \frac{\partial}{\partial x'^k} \quad (2.5)$$

aplicando la regla de la cadena a la anterior expresión es inmediato encontrar:

$$\frac{\partial V}{\partial x^l} = \frac{\partial x'^j}{\partial x^l} \frac{\partial x'^m}{\partial x'^k} V'^k_{;j} \frac{\partial}{\partial x'^m} \quad (2.6)$$

es decir:

$$V_{:l}^m = \frac{\partial x'^j}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial x'^k} V'^k_{:j} \quad (2.7)$$

resultado que justifica su denominación de derivada covariante. Si consideramos la carta identidad, los coeficientes de Christoffel son idénticamente nulos y la derivada covariante se reduce a la derivada habitual.

Los símbolos de Christoffel pueden ponerse en relación directa con el tensor métrico. Consideremos la cantidad $g_{ij} = e_i \otimes e_j$: tomando su derivada respecto de x^j y utilizando la definición de los símbolos de Christoffel tenemos directamente:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{ik} g_{lj} + \Gamma_{jk} g_{il} \quad (2.8)$$

si a partir de esta igualdad permutamos los índices i, j y k y usamos la propiedad de simetría de los símbolos de Christoffel un cálculo directo nos lleva a:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{g^{mk}}{2} (g_{mi,j} + g_{jm,i} - g_{ij,m}) \quad (2.9)$$

siendo g^{mj} la inversa del tensor métrico. La anterior expresión nos dice que en una geometría riemanniana la parte de la derivada total de un campo vectorial que se separa del comportamiento euclídeo viene determinada por unos coeficientes que dependen inequívocamente de la métrica. En siguientes apartados veremos como el hecho de relajar las restricciones impuestas inicialmente sobre nuestra geometría dará lugar a que la conexión incorpore nuevas componentes que la independizarán progresivamente de la métrica, para dar lugar a geometrías conocidas como métrico-afines.

Una generalización de todo este razonamiento al caso de las subvariedades ($n \neq m$) puede encontrarse en [340]. Para una definición más rigurosa del concepto de variedad puede consultarse asimismo [357]. Nosotros consideraremos a partir de aquí la ecuación (2.4) como el punto de partida para definir derivadas sobre un espacio-tiempo no minkowskiano y en particular como definición del papel que derivada covariante y conexión física van a tener en dicho proceso de derivación. Dicha ecuación nos describe asimismo el paso de la derivada usual, asociada a las coordenadas cartesianas en R^n a la derivada covariante asociada a coordenadas curvilíneas generales dadas por relaciones del tipo $y^\mu(x_i)$ [219]. Además, la definición de derivada covariante puede extenderse fácilmente a tensores de orden superior, sin más que considerar dichos tensores contruidos a partir de vectores covariantes y contravariantes, y aplicar la regla de la derivada del producto. Por ejemplo, podemos deducir la forma que debe tomar la derivada covariante de un tensor de tipo $(0, 1)$ simplemente teniendo en cuenta que la actuación de una 1-forma sobre un vector nos da un escalar, objeto que no está caracterizado por índices (tensor de orden cero) y cuya derivada covariante debe

coincidir con la derivada convencional. A partir de ese razonamiento es sencillo comprobar expresiones de la forma:

$$\begin{aligned}\nabla_k V_j &= \partial_k V_j - \Gamma_{jk}^l V_l \\ \nabla_k T_{ij} &= \partial_k T_{ij} - \Gamma_{jk}^l T_{il} - \Gamma_{ik}^l T_{lj} \\ \nabla_k T_j^i &= \partial_k T_j^i - \Gamma_{jk}^l T_l^i + \Gamma_{lk}^i T_j^l\end{aligned}\quad (2.10)$$

usando la segunda de estas relaciones aplicada al propio tensor métrico, un cálculo directo nos lleva al resultado $\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$, que se suele conocer como condición de metricidad asociada a la geometría de Riemann.

2.1.3 La curvatura y los tensores de Riemann y Ricci

Como ya hemos comentado previamente, una de las ideas clave en el pensamiento de Einstein a la hora de formular su teoría de la RG fue interpretar la gravedad no como una interacción a grandes distancias causada por la materia, sino como una deformación de la propia geometría espacio-temporal. El espacio-tiempo dejaba de ser “plano” (bien sea en la interpretación euclídea, ceñida a las dimensiones espaciales, bien sea el espacio-tiempo de Minkowski, donde espacio y tiempo son tratados totalmente en pie de igualdad) y pasaba a tener una curvatura intrínseca en cada uno de sus puntos, causada por la acción de la materia y la energía. Una vez establecido este principio la siguiente cuestión a abordar es cómo determinar cantidades (en general de naturaleza tensorial) que nos informen de dicha curvatura en nuestra geometría riemanniana.

Tomemos como ejemplo el caso de R^n con la métrica plana, $g_{ij} = \delta_{ij}$: es claro entonces, a la vista de (2.9) que la conexión es nula idénticamente y la derivada covariante coincide con la derivada usual. Consideremos un campo vectorial V de clase C^∞ : en esas condiciones, es claro que las derivadas cruzadas van a ser iguales, es decir, se tendrá: $0 = \frac{\partial^2 V}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^j \partial x^i}$. La situación cambia necesariamente cuando tenemos una conexión no nula definida sobre una variedad, tendremos que $\nabla_j \nabla_k V^i - \nabla_k \nabla_j V^i$ es una cantidad en general no nula. Queremos encontrar entonces alguna expresión tensorial que nos informe de “cuán diferente de cero” resulta ser esta cantidad. Cuanto menos “plana” sea la variedad, más diferirá de cero esta cantidad y más intensamente se manifestará dicha cantidad tensorial. Dicho tensor a construir recibe el nombre de tensor de Riemann. Para calcular su forma explícita, sólo tenemos pues que aplicar la definición de derivada covariante:

$$\begin{aligned}\nabla_{jk}V^i &= \nabla_k(\nabla_jV^i) = \partial_k(\partial_jV^i) + \partial_k(\Gamma_{mj}^i)V^m + \\ &+ \Gamma_{mj}^i\partial_kV^m - \Gamma_{jk}^l\partial_lV^i + \Gamma_{mk}^i\partial_jV^m + \Gamma_{lk}^i\Gamma_{mj}^lV^m - \Gamma_{jk}^l\Gamma_{ml}^iV^m\end{aligned}\quad (2.11)$$

lo que implica:

$$\nabla_{jk}V^i - \nabla_{kj}V^i = [\partial_k(\Gamma_{mj}^i) - \partial_j(\Gamma_{mk}^i) + \Gamma_{lk}^i\Gamma_{mj}^l - \Gamma_{lj}^i\Gamma_{mk}^l]V^m = R_{mkj}^iV^m \quad (2.12)$$

donde hemos definido el tensor de Riemann como:

$$R_{mkj}^i = \partial_k(\Gamma_{mj}^i) - \partial_j(\Gamma_{mk}^i) + \Gamma_{lk}^i\Gamma_{mj}^l - \Gamma_{lj}^i\Gamma_{mk}^l \quad (2.13)$$

y hemos asumido ya por completo que nos movemos en una geometría riemanniana en la que la conexión es simétrica en los índices inferiores. A partir del tensor de Riemann sucesivas contracciones nos llevan a un tensor $(1, 1)$, el tensor de Ricci:

$$R_{ij} = R_{ikj}^k \quad (2.14)$$

y a un escalar, la curvatura R , que jugarán un papel fundamental en el desarrollo de la acción de la gravedad:

$$R = g^{ij}R_{ij} \quad (2.15)$$

2.2 Las ecuaciones de Einstein

La idea fundamental de Einstein al formular su teoría de la gravedad es que la materia y la energía curvan el espacio-tiempo: matemáticamente hablando, una parte de las ecuaciones, la que tiene que ver con la densidad de energía y momento, debe equilibrarse con la otra, que tendrá que ver con la curvatura:

DENSIDADES DE MATERÍA Y ENERGÍA \leftrightarrow CURVATURA DE LA GEOMETRÍA
ESPACIO-TEMPORAL

De tal forma que cuanto mayor sean las densidades de energía-momento, más se va a curvar la geometría espacio-temporal, y más nos vamos a separar del espacio-tiempo plano minkowskiano.

Para deducir la forma exacta de las ecuaciones de Einstein, traslademos esta idea a los términos de un principio de acción estacionaria: la acción total del sistema debe tener una parte relacionada con la gravedad, esto es, con la parte geométrica y otra parte que encapsule el efecto de todas las fuentes de materia-energía presentes, de forma que tendremos $S_T = S_{GR} + S_M$. En el lado de la materia podremos tener campos electromagnéticos, escalares, fermiones, materia fuertemente acoplada de acuerdo a una teoría gauge de Yang Mills... etc. Los detalles no son importantes ahora. La idea fundamental es que, de acuerdo al principio de acción estacionaria, al tomar variaciones en la acción respecto de las variables dinámicas, las variaciones de la materia deben compensarse con las de la parte gravitatoria, y esta condición nos generará las ecuaciones de campo para dichas variables:

$$\text{(Principio de acción estacionaria): } 0 = \delta S = \delta S_{GR} + \delta S_M$$

En el marco de una geometría riemanniana, como ya hemos destacado, toda característica de la geometría viene determinada por la métrica, luego ésta será nuestro único campo fundamental, es decir, consideraremos las variaciones de la acción obtenidas a partir de las variaciones de la métrica, $\delta g_{\mu\nu}$. La siguiente cuestión que tendremos que abordar es la de definir una forma para la acción de la gravedad. Si consideramos que dicha acción tiene que reflejar de alguna forma la posible curvatura del espacio tiempo y que esta debe ser nula en ausencia de fuentes de materia y energía, la acción construida con escalares de la curvatura más sencilla posible será sencillamente:

$$S_{GR} = \frac{1}{2k^2} \int d^d x \sqrt{-g} R[g_{\mu\nu}] \quad (2.16)$$

con $R[g_{\mu\nu}]$ el escalar de Ricci introducido en (2.15), que en el enfoque riemanniano es una función exclusiva del tensor métrico. El factor $k^2 = 8\pi l_p^{d-2}$ nos asegura que la acción es adimensional en el sistema de unidades naturales, ($\hbar/2\pi = 1 = c$). Para el caso $d = 4$ y en el S.I. tenemos que $k^2 = 8\pi \frac{G}{c^3}$ con G la constante de gravitación universal de Newton, lo que permite recuperar el límite newtoniano [Lorente]. Por su parte, el factor $\sqrt{-g}$ (donde g es el determinante de la métrica) asegura que el elemento de volumen se transforma correctamente desde el punto de vista covariante bajo cambios generales de coordenadas [219], asegurando además que la acción tiene siempre las dimensiones correctas bajo dichos cambios de coordenadas, (en coordenadas cartesianas el factor $\sqrt{-g}$ es adimensional, no así en coordenadas polares o esféricas).

Se define el tensor energía-momento de la materia como:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (2.17)$$

donde $S_m = \int d^d x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m$ es la acción de la materia. Tomando variaciones, (ver anexo, A) obtenemos las ecuaciones de movimiento que debe seguir la métrica:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = k^2 T_{\mu\nu} \quad (2.18)$$

siendo $G_{\mu\nu}$ el tensor de Einstein.

2.3 Geodésicas y principio de equivalencia

La igualdad entre masa gravitatoria y masa inercial es una realidad puramente experimental que se ha visto refrendada por multitud de experimentos: además de las experiencias [171] de Galileo, (quien realmente se valió de péndulos, planos inclinados y relojes de agua, parece que el experimento desde la torre de Pisa tiene más de legendario que de otra cosa). Newton, Huygens y Bessel, entre otros, estudiaron dicha equivalencia, siendo los experimentos del barón Von Eötvös los que reportaron una precisión mayor [Blau]. Dicha equivalencia no es ni mucho menos intuitiva: nuestra intuición nos dice que, a mayor masa, mayor debería ser la aceleración producida por la fuerza de la gravedad. Nada parece a priori prohibir que, al igual que pasa con el electromagnetismo, la fuerza gravitatoria experimentada por la materia dependiera de cierta constante de acoplamiento particular del campo, (la carga eléctrica en el caso electromagnético). Sin embargo, para la fuerza de la gravedad dicha carga coincide al parecer de manera exacta (hasta donde la evidencia experimental nos lleva) con la propia masa inercial que aparece en las leyes de Newton. Dicha igualdad sorprendente, que parece claramente no responder a una casualidad, fue la que inspiró a Einstein para reformular la teoría de la gravedad newtoniana y constituye el núcleo del principio de equivalencia, pieza fundamental, a su vez de toda la teoría de la RG.

Son asimismo conocidos los experimentos hipotéticos ([171, Blau]) con ascensores en caída libre y sometidos a aceleraciones externas en ausencia de gravedad, de los que Einstein se sirvió para formular el principio de equivalencia. Resumamos a continuación las diferentes formulaciones del principio, así como algunas de sus implicaciones:

1. En cualquier punto del espacio-tiempo en un campo gravitacional dado, siempre es posible elegir un sistema de coordenadas localmente inercial (sistema de referencia en caída libre) de manera que, en una región lo suficientemente pequeña alrededor de ese punto, las leyes de la naturaleza toman la misma forma que en un sistema de coordenadas cartesianas e inercial en ausencia de gravedad [362].

Si por “leyes de la naturaleza” nos restringimos a las leyes de Newton, esta formulación conlleva directamente a la equivalencia entre masa gravitatoria y masa inercial, pero si ampliamos el ámbito de estudio al electromagnetismo de Maxwell o a la mecánica cuántica, el principio puede ser reformulado en su versión “fuerte”.

2. Ningún experimento puede distinguir los efectos de una aceleración uniforme de los de un campo gravitacional uniforme [174].

Una discusión de las relaciones lógicas que se establecen entre ambas formulaciones del principio de equivalencia puede encontrarse en [121]. Un resumen de los diferentes experimentos realizados a lo largo de las pasadas décadas para testear en profundidad el PE puede asimismo encontrarse en [366]. Para continuar nuestra reflexión sobre el principio de equivalencia, veamos con algún detalle la forma en la que se mueven las partículas materiales libres en un espacio-tiempo curvo. En el espacio-tiempo euclídeo o minkowskiano, sabemos que las trayectorias de dichos puntos materiales siguen trayectorias rectas, generalicemos esta idea al espacio-tiempo curvo estudiando la forma que en él toman estas trayectorias, que denominaremos como geodésicas [273] y veremos que la forma de las geodésicas está íntimamente relacionada con los símbolos de Christoffel. Dicha relación guarda, asimismo, una profunda conexión con el principio de equivalencia.

Para encontrar la forma de las geodésicas en un espacio-tiempo curvo, recurramos de nuevo al principio de acción estacionaria, (posiblemente una de las ideas más fértiles y fascinantes [Taylor] de la Física), pero ahora, en lugar de aplicarlo para determinar la ecuación del tensor métrico, lo usaremos para estudiar como se mueve una partícula material en el seno de un campo gravitatorio. Para ello, partamos de la forma de la acción minkowskiana de la relatividad especial [232, 153]:

$$L = -mc \int_{s_1}^{s_2} ds \quad (2.19)$$

siendo $ds = \sqrt{\eta_{ab} dx^a dx^b}$ el intervalo de longitud invariante y η_{ab} la métrica minkowskiana. El siguiente paso es promover esta expresión al espacio-tiempo curvo mediante la sustitución $ds = \sqrt{g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu}$ y tomar variaciones en la expresión integral. Para ello parametrizamos la curva mediante el parámetro natural s , de forma que tendremos [219]:

$$\begin{aligned}
\delta \int_{x_1}^{x_2} ds &= \delta \int_{s_1}^{s_2} ds \left[g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu(s)}{ds} \frac{dx^\nu(s)}{ds} \right]^{\frac{1}{2}} = \\
&= \frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} ds \left[\partial_\lambda g_{\mu\nu} \delta x^\lambda \frac{dx^\mu(s)}{ds} \frac{dx^\nu(s)}{ds} + 2g_{\lambda\nu} \frac{d\delta x^\lambda}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right] \quad (2.20)
\end{aligned}$$

integrando parcialmente el último término y teniendo en cuenta que la primera parte de dicha integración no nos contribuye a la variación pues δx^μ debe ser nulo en los extremos de la trayectoria, nos queda:

$$0 = \delta \int_{x_1}^{x_2} ds = \frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} ds \left[(\partial_\lambda g_{\mu\nu} - 2\partial_\mu g_{\lambda\nu}) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - 2g_{\lambda\nu} \frac{d^2 x^\nu}{ds^2} \right] \delta x^\lambda \quad (2.21)$$

y la ecuación de las geodésicas es directa a partir de aquí:

$$\frac{d^2 x^\rho}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0 \quad (2.22)$$

donde hemos usado la definición de los símbolos de Christoffel (2.9) y la inversa de la métrica $g_{\mu\nu}$. Esta ecuación tiene importantes implicaciones, analicémoslas con detalle: en primer lugar, de acuerdo con el principio de equivalencia, siempre es posible encontrar un sistema de referencia localmente inercial en el que los símbolos de Christoffel se anulen y por tanto, en un espacio localmente minkowskiano (2.22) nos devuelva a la primera ley de Newton [346]. Segundo: la ecuación de las geodésicas nos dice que el movimiento de las partículas materiales está completamente determinado por el tensor métrico de la geometría. Nos referiremos a este hecho en las aplicaciones del principio de acción estacionaria indicando que “la materia se acopla de manera exclusiva a la métrica”. Esta observación cobrará su sentido pleno en las siguientes secciones, cuando veremos que los coeficientes que definen la derivada covariante pueden incorporar contribuciones más allá de los símbolos de Christoffel. Dichas contribuciones independientes de la métrica tendrán que ver con los conceptos de torsión y no metricidad, dando su identidad plena al concepto de conexión. Si quisieramos entonces considerar que en la ecuación de las geodésicas la materia se acopla a la conexión en su totalidad y no únicamente a la parte que está totalmente determinada por la métrica, entonces, en condiciones minkowskianas, dichas contribuciones no métricas deberían alejarnos del comportamiento predicho por las leyes de Newton, incorporando nuevas dinámicas esperables bajo la escala de no metricidad [236, 116]. Pero por encima de posibles efectos debidos a no metricidad o torsión el principio de equivalencia mantiene su evidencia experimental [366],

por lo que en todo este trabajo consideraremos que la materia solo “ve” la parte métrica de la conexión en lo que se refiere al principio de acción estacionaria.

2.4 Transporte paralelo

Consideremos ahora una curva diferenciable en una variedad semiriemanniana, es decir una función γ definida en el intervalo $[a, b] \in \mathbb{R}$ y cuya imagen está en la variedad y un campo vectorial V definido en la imagen de γ . Una forma natural de definir la derivada de V sobre la curva viene dada por [266]:

$$\frac{DV}{d\lambda} = \left(\frac{dV^\alpha}{d\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha V^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right) e_\alpha \quad (2.23)$$

definiendo el vector tangente a la curva como $T^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$, la anterior ecuación podrá escribirse como:

$$\frac{DV}{d\lambda} \equiv \nabla_T V = T^\rho (\partial_\rho V^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha V^\mu \partial_\rho x^\nu) e_\alpha \quad (2.24)$$

si se cumple la condición $\frac{DV}{d\lambda} = 0$ diremos que el vector V se transporta paralelamente a lo largo de la curva γ . El concepto de transporte paralelo va a cobrar una especial relevancia en el ámbito de la geometría en espacios curvos. Dos ejemplos ilustrarán esta afirmación; en primer lugar, si consideramos que el campo vectorial es el campo de velocidades $V^k = \frac{dx^k}{d\lambda}$ entonces, de acuerdo a (2.22) podemos decir que a lo largo de una curva geodésica (esto es a lo largo de la curva que siguen las partículas en caída libre en un espacio-tiempo curvo), la velocidad es transportada paralelamente. Un segundo ejemplo interesante lo constituye la relación existente entre el concepto de transporte paralelo y la condición de metricidad: relajemos por un momento la imposición métrica sobre la conexión, si recordamos la definición de los coeficientes que determinaban la conexión como objeto geométrico (??), y (2.2), dichas ecuaciones sugieren que podemos interpretar la conexión como un objeto que nos informa de como cambian los vectores base de un punto a otro de la variedad, esto es:

$$\nabla_\mu e_\nu = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha e_\alpha \quad (2.25)$$

introduzcamos por primera vez la idea de que los coeficientes que van a definir la derivación covariante y la variación de un punto a otro del espacio tangente no dependen necesariamente de la métrica, esto es, que la geometría de la variedad, entendiendo ésta como totalmente caracterizada por la forma en que cambia el espacio tangente a lo largo y ancho de la misma, no depende completamente de la métrica. Vamos a comprobar, no obstante, que dicha

dependencia métrica queda fijada en el momento en que pedimos que el producto escalar de dos vectores transportados paralelamente a lo largo de una curva sea asimismo una cantidad paralelamente transportada:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_T(UV) = \nabla_T(U^\alpha g_{\alpha\beta} V^\beta) = \\ &= \nabla_T(U^\alpha V^\beta) g_{\alpha\beta} + U^\alpha V^\beta \nabla_T(g_{\alpha\beta}) = U^\alpha V^\beta \nabla_T(g_{\alpha\beta}) \end{aligned} \quad (2.26)$$

donde el primer sumando se anula, ya que por hipótesis los vectores U y V se transportan paralelamente. La condición $\nabla_T(g_{\alpha\beta}) = 0$ implica directamente la condición de metricidad $\nabla_\mu(g_{\alpha\beta}) = 0$ esto es:

$$0 = \nabla_\mu(g_{\alpha\beta}) = \partial_\mu g_{\alpha\beta} - \Gamma_{\mu\alpha}^\rho g_{\rho\beta} - \Gamma_{\mu\beta}^\rho g_{\alpha\rho} \quad (2.27)$$

lo que impone restricciones sobre los coeficientes de la conexión. Es inmediato comprobar que la conexión de Levi-Civita definida en (2.9) es solución de la anterior ecuación para los coeficientes $\Gamma_{\mu\alpha}^\rho$:

$$0 = \nabla_\mu(g_{\alpha\beta}) \Rightarrow \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{g^{\rho\lambda}}{2} (g_{\rho\mu,\nu} + g_{\nu\rho,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}) \quad (2.28)$$

vemos entonces que es posible introducir el concepto de conexión sin hacer referencia a la métrica, pero que la condición de que el producto escalar de dos vectores transportados paralelamente a lo largo de una curva se conserve asimismo en el transporte paralelo sí implica la condición de metricidad y, junto con la exigencia de que las funciones características de la carta presenten naturaleza biyectiva y sean de clase C^∞ , fija la conexión a su realización mediante los coeficientes de Christoffel. Estos conceptos serán de gran importancia en el siguiente capítulo, donde exploraremos geometrías no riemannianas introducidas por la separación paulatina de conexión y métrica.

Capítulo 3

Geometrías no riemannianas

3.1 Espacios de Cartan

3.1.1 Transformaciones de Einstein

La referencia principal de todo este capítulo es el libro de Kleinert [219], del que tomaremos la mayor parte de las citas y de la notación, además de los históricos trabajos de Kröner [228, 225, 226] y de Bilby [29], entre otros.

Definimos las transformaciones de Einstein como transformaciones de coordenadas en un sentido amplio, definidas en el espacio de Minkowski. Estas transformaciones pueden pasar, por ejemplo, de las coordenadas cartesianas definidas por la base canónica $\{e_a\}$ a cualesquiera otras coordenadas curvilíneas en las que los vectores de la base no sean constantes sino que dependan del punto del espacio. Las transformaciones de Lorentz, asimismo, pueden verse como un caso especial de las transformaciones de Einstein. Supongamos definido un sistema de coordenadas curvilíneas por una relación funcional con las coordenadas cartesianas¹ $x^\mu = x^\mu(x^a)$. Los vectores de la base en el sistema de coordenadas curvilíneas se relacionan con los de la base canónica mediante:

$$e_\mu(x) = e_\mu^a(x)e_a \quad (3.1)$$

siendo $e_a^\mu(x) \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial x^a}$ las componentes de la matriz jacobiana de la transformación $x^\mu = x^\mu(x^a)$. Si ahora realizamos una transformación de Einstein que nos pase a unas nuevas coordenadas curvilíneas $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ las nuevas componentes $e_a'^\mu(x')$ se relacionarán con las anteriores como:

¹Lo que Kleinert denomina coordenadas cartesianas debe entenderse como la base Lorentziana, con índices latinos. Las coordenadas curvilíneas, son la base de coordenadas, con índices griegos.

$$\begin{aligned}
e'^a{}_\mu(x') &\equiv \frac{\partial x^a}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^v}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^a}{\partial x^v} = \alpha_\mu^v e^a{}_v(x) \\
e'^\mu{}_a(x') &\equiv \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^a} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^v} \frac{\partial x^v}{\partial x^a} = \alpha_v^\mu e_a{}^v(x)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

podemos representar la transformación entre ambos sistemas de coordenadas curvilíneas mediante una función $\xi^\mu(x)$ de manera que si la transformación es de carácter infinitesimal se tendrá $x'^\mu = x^\mu - \xi^\mu(x)$ y las matrices que representan a esta transformación serán:

$$\begin{aligned}
\alpha_\mu^v &\approx \delta_\mu^v + \partial_\mu \xi^v(x) \\
\alpha_v^\lambda &\approx \delta_v^\lambda - \partial_v \xi^\lambda(x)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

En una transformación de coordenadas arbitraria se habla de cambio sustancial (o cambio funcional) en una cantidad escalar, vectorial o tensorial, como la diferencia entre dicha cantidad antes y después de sufrir la transformación, calculada en un mismo punto espacio-temporal [219]. Este concepto es importante a la hora de definir criterios de tensorialidad bajo transformaciones de coordenadas. Así, las variaciones sustanciales de los elementos e_a^μ y las de un campo vectorial arbitrario $V^\mu(x)$ vendrán dadas por [219]:

$$\begin{aligned}
\delta e_a^\mu &= e'^\mu{}_a(x) - e_a^\mu(x) = \xi^\lambda \partial_\lambda e_a^\mu(x) - \partial_\lambda \xi^\mu e_a^\lambda(x) \\
\delta e_\mu^a &= e'^a{}_\mu(x) - e_\mu^a(x) = \xi^\lambda \partial_\lambda e_\mu^a(x) + \partial_\mu \xi^\lambda e_\lambda^a(x) \\
\delta V^\mu(x) &= V'^\mu(x) - V^\mu(x) = \xi^\lambda \partial_\lambda V^\mu(x) - \partial_\lambda \xi^\mu V^\lambda(x) \\
\delta V_\mu(x) &= V'_\mu(x) - V_\mu(x) = \xi^\lambda \partial_\lambda V_\mu(x) + \partial_\mu \xi^\lambda V_\lambda(x)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

cualquier campo que siga estas leyes de transformación diremos que es un vector de Einstein [219] contravariante o covariante. Podemos generalizar este concepto a tensores de orden superior, en particular, para las componentes del tensor métrico vamos a tener que se cumple:

$$\begin{aligned}
\delta g^{\mu\nu} &= \xi^\lambda \partial_\lambda g^{\mu\nu} - \partial_\lambda \xi^\mu g^{\lambda\nu} - \partial_\lambda \xi^\nu g^{\mu\lambda} \\
\delta g_{\mu\nu} &= \xi^\lambda \partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi^\lambda g_{\lambda\nu} + \partial_\nu \xi^\lambda g_{\mu\lambda}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

en adelante y mientras no se diga lo contrario asumiremos que la función que caracteriza a la transformación $\xi^\mu(x)$ tiene inversa, es decir, que dicha función cumple la condición de integrabilidad dada por la igualdad de las derivadas cruzadas de Schwarz, $[\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu] \xi^\lambda(x) = 0$.

En un lenguaje más próximo a los textos de gravitación y geometría, podemos decir que el campo vectorial ξ^μ implementa difeomorfismos infinitesimales. Las variaciones así calculadas para los diferentes objetos se identifican con la derivada de Lie a lo largo de ese campo vectorial.

3.1.2 Torsión

Podemos introducir el concepto de espacio métrico-afín como aquel cuya conexión describe formalmente como cambia el espacio tangente de un punto a otro, pero sin referencia explícita a ninguna métrica, de manera que la relación entre conexión y métrica no venga determinada “a priori” por la conexión de Levi-Civita. Dicho de otra forma, los coeficientes que caracterizan la conexión tendrán una contribución púramente métrica (símbolos de Christoffel) y contribuciones no métricas que asociaremos a fenómenos físicos descritos por una geometría no riemanniana. Si partimos entonces de la expresión general de la conexión en un espacio métrico afín:

$$\Gamma_{\nu\mu}^\lambda = e_c^\lambda \partial_\nu e_\mu^c \quad (3.6)$$

y usamos (3.2) y la regla de la cadena, es inmediato comprobar que la conexión no se va a transformar como un tensor. Para una transformación de Einstein infinitesimal vamos a tener:

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) = \xi^\lambda \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) + \partial_\nu \xi^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda(x) + \partial_\mu \xi^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\lambda(x) + \partial_\mu \partial_\nu \xi^\lambda(x) \quad (3.7)$$

de aquí vemos que el último término rompe la ley de transformación tensorial (3.5) generalizada para un tensor de tercer orden. Sin embargo, si definimos la torsión como:

$$S_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} \left(\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \right) \quad (3.8)$$

es entonces inmediato comprobar que la torsión sí va a comportarse tensorialmente siempre que la función $\xi^\mu(x)$ cumpla la anteriormente citada relación de integrabilidad, es decir, que la transformación de coordenadas sea regular. **Transformaciones de coordenadas regulares** nos garantizan entonces que para cualquier punto del espacio base existe el transformado, y viceversa. La transformación mantiene entonces la totalidad del espacio base. Es en ese sentido en el que Kleinert dice que el espacio de Minkowski se caracteriza por ser de torsión nula. En el sistema de coordenadas canónico $\{e^a\}$ la conexión es trivialmente nula, lo será por tanto la torsión y al tener ésta carácter tensorial en transformaciones de coordenadas que respetan la integridad del espacio de Minkowski, se anulará necesariamente en cualquier otro sistema de coordenadas. Tenemos pues que transformaciones de coordenadas regulares en el espacio de Minkowski, (es decir, aquellas en las que cualquier punto del conjunto inicial existe imagen, y viceversa) no alteran el carácter nulo de la torsión.

3.1.3 Curvatura

En un espacio métrico-afin podemos introducir el tensor de Riemann como, [219] :

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\lambda}{}^\sigma &= \partial_\mu\Gamma_{\nu\lambda}^\sigma - \partial_\nu\Gamma_{\mu\lambda}^\sigma - \Gamma_{\mu\lambda}^\delta\Gamma_{\nu\delta}^\sigma + \Gamma_{\nu\lambda}^\delta\Gamma_{\mu\delta}^\sigma \\ &= e_a^\sigma(\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu)e_\lambda^a \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde la ultima igualdad se obtiene utilizando la forma de la conexión (3.6), donde queda explícito el hilo argumental de Kleinert y su interés en deformar un espacio idealizado (de tipo Minkowskiano) mediante transformaciones de coordenadas que no siempre serán regulares en todos los puntos, que es lo que necesitamos para describir en el continuo espacios generados a partir de estructuras discretas con defectos. Utilizando de nuevo (3.2) un cálculo directo lleva a que bajo una transformación de coordenadas la curvatura se va a transformar como:

$$\begin{aligned} R'_{\mu\nu\lambda}{}^\chi(x') &= \alpha_\mu^\alpha\alpha_\nu^\beta\alpha_\lambda^\gamma\alpha_\delta^\chi R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta(x) + \\ &+ \alpha_\mu^\alpha\alpha_\nu^\beta\alpha_\delta^\chi[(\partial_\alpha\partial_\beta - \partial_\beta\partial_\alpha)\alpha_\lambda^\delta] \end{aligned} \quad (3.10)$$

y por tanto tendrá caracter tensorial siempre que se anule el último término, es decir siempre que las matrices $\hat{\alpha}$ sean regulares, lo que ocurrirá cuando la transformación de coordenadas sea lo suficientemente suave. En ese caso, al igual que pasaba con la torsión, el espacio transformado va a tener curvatura cero. Las anteriores relaciones junto con sus homólogas para la torsión sugieren una forma natural de construir espacios afines que tengan torsión y curvatura no nulas: todo lo que tenemos que hacer para ello es trabajar con **transformaciones de coordenadas no regulares**, que dejen fuera puntos iniciales del espacio de Minkowski. Podemos buscar, al menos para la curvatura, una analogía recurriendo a la geometría riemanniana convencional en R^3 : allí, ciertas variedades diferenciables, como por ejemplo la esfera o el toroide van a presentar una curvatura no nula. Los puntos que pertenecen a la variedad han sido “seleccionados” de entre la totalidad del espacio euclideo, exigiendo que cumplan las condiciones de ligadura que definen la variedad como una función de dos variables. Vemos de esa forma que **una selección de determinados puntos dentro del espacio euclideo puede conllevar de forma natural la aparición de curvatura y torsión.**

3.1.4 Transformaciones singulares de coordenadas

La base canónica en el espacio de Minkowski viene dada por $e_a^\mu = \delta_a^\mu$. Bajo una transformación de coordenadas (3.3) la base y la métrica van a transformarse de acuerdo a :

$$\begin{aligned}
e_a^\mu &= \delta_a^\mu - \partial_a \xi^\mu \\
e_\mu^a &= \delta_\mu^a + \partial_\mu \xi^a \\
g_{\mu\nu} &= e_\mu^a e_{a\nu} = \eta_{\mu\nu} + (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

la conexión y la curvatura asociadas al nuevo sistema de coordenadas vendrán dadas respectivamente por $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \partial_\mu \partial_\nu \xi^\lambda$ y $R_{\mu\nu\lambda}^\chi = (\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu) \partial_\lambda \xi^\chi$. Consideremos ahora transformaciones de coordenadas singulares esto es, aquellas en las que no todos los puntos del conjunto origen tienen imagen bien definida mediante la transformación. Matemáticamente, como ya hemos comentado en secciones anteriores, dichas transformaciones vienen caracterizadas por el hecho de que la condición de Schwarz de igualdad de derivadas cruzadas deja de cumplirse [219]. La singularidad en la transformación de coordenadas tiene asimismo como consecuencia el hecho de que en general, la métrica y la conexión presentarán también singularidades, entendidas estas como puntos del espacio-tiempo en los cuales dichos objetos matemáticos dejan de estar bien definidos, lo que implica a su vez inconsistencias en los procesos de medida y transporte paralelo. Con el fin de evitar dichas inconsistencias Einstein postuló que la métrica y la conexión deben transformarse de tal forma que las derivadas parciales cruzadas conmuten entre sí, es decir han de satisfacer las condiciones [219]:

$$\begin{aligned}
(\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu) (\partial_\lambda \xi_\chi + \partial_\chi \xi_\lambda) &= 0 \\
(\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu) \Gamma_{\sigma\lambda}^\chi &= 0
\end{aligned} \tag{3.12}$$

a partir de la primera de las relaciones un cálculo directo nos muestra que el tensor de curvatura ha de ser antisimétrico en los dos últimos índices. Además, si antisimetrizamos los índices λ y σ en la segunda, vemos inmediatamente que implica una condición de integrabilidad para la torsión: $(\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu) S_{\sigma\lambda}^\chi = 0$.

En un espacio afín la conexión puede escribirse como la suma de una parte simétrica, formada por los símbolos de Christoffel y una parte antisimétrica construida a partir de permutaciones de la torsión. Introduciendo entonces la descomposición:

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda} \equiv \Gamma_{\mu\nu}^\chi g_{\chi\lambda} = e_{a\lambda} \partial_\mu e_\nu^a \tag{3.13}$$

podremos escribir, (ver anexo A) :

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu\nu\lambda} &= C_{\mu\nu\lambda} + S_{\mu\nu\lambda} - S_{\nu\lambda\mu} + S_{\lambda\mu\nu} = \\ &= C_{\mu\nu\lambda} + K_{\mu\nu\lambda}\end{aligned}\quad (3.14)$$

siendo $C_{\mu\nu\lambda}$ los símbolos de Christoffel y $S_{\mu\nu\lambda} = S_{\mu\nu}^{\chi} g_{\chi\lambda}$. El objeto $K_{\mu\nu\lambda} = S_{\mu\nu\lambda} - S_{\nu\lambda\mu} + S_{\lambda\mu\nu}$ recibe el nombre de tensor de contorsión. La anterior relación va a implicar asimismo la integrabilidad de los símbolos de Christoffel :

$$(\partial_{\mu}\partial_{\nu} - \partial_{\nu}\partial_{\mu})C_{\sigma\lambda}^{\chi} = 0 \quad (3.15)$$

y en consecuencia, la bien conocida relación de estos con la métrica [232]. Es inmediato comprobar que esta última relación va a implicar una condición de integrabilidad adicional sobre las derivadas de la métrica:

$$(\partial_{\mu}\partial_{\nu} - \partial_{\nu}\partial_{\mu})\partial_{\sigma}g_{\lambda\chi} = 0 \quad (3.16)$$

3.2 Dislocaciones y disclinaciones

Tenemos pues que los espacios de Cartan [130] se asocian a geometrías que además de curvatura presentan torsión. Es posible encontrar ejemplos en la naturaleza de sistemas físicos susceptibles de ser descritos por geometrías que van más allá de las características riemannianas. La Física del estado sólido nos sirve de inspiración al respecto. Los cristales reales se caracterizan por la presencia de defectos, impurezas y deformaciones que alejan su geometría del modelo cartesiano típico de los cristales ideales [373]. Los procesos de Volterra [162] son un método utilizado frecuentemente para para producir deformaciones en un cristal [219]. Dichos procesos consisten básicamente en el corte del cristal a lo largo de un determinado eje y su separación en dos superficies o “labios” entre las que se introduce un material cristalino adicional. Dos son las alteraciones que nos interesa ahora caracterizar: las dislocaciones, que suponen rupturas unidimensionales en la regularidad atómica y las disclinaciones, que se producen en procesos de Volterra en los que la superficies separadas dejan un espacio en forma de cuña caracterizado por un determinado ángulo en el que se introduce nuevo material. Son por tanto deformaciones de caracter rotacional, y como vamos a ver a continuación, están relacionadas con la aparición de curvatura en el cristal.

Las deformaciones del cristal respecto del caso ideal pueden caracterizarse por una transformación de coordenadas de la forma $x_i \rightarrow x'_i = x_i + u_i(x)$, siendo $u_i(x)$ una función que da cuenta del desplazamiento de los átomos respecto al cristal ideal es decir, caracteriza la deformación del cristal. Esta transformación de coordenadas es evidentemente del mismo tipo que las transformaciones de Einstein en el espacio de Minkowski que acabamos de

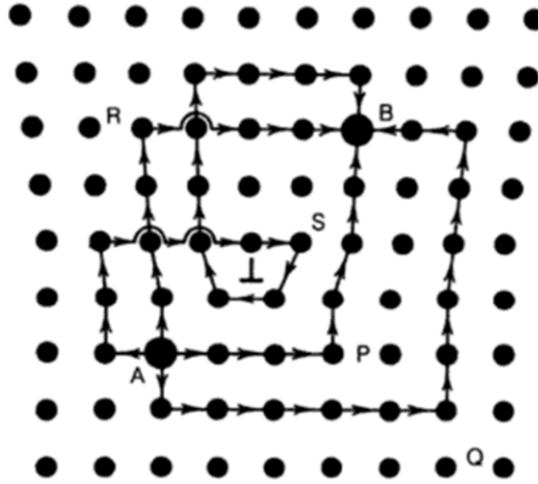


Fig. 3.1 Trayectorias no equivalentes en una red dislocada, (Tagüeña Parga,1983).

estudiar. En el estudio de las deformaciones en los cristales se introducen las densidades de dislocación:

$$\alpha_{ij} = \varepsilon_{ikl} \partial_k \partial_l u_j \quad (3.17)$$

y de disclinación :

$$\Theta_{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jmn} \partial_k \partial_l \partial_m u_n \quad (3.18)$$

calculos directos, aunque tediosos [219] nos llevan a que si desarrollamos las componentes espaciales del tensor de Einstein (2.18) y del tensor de contorsión, se obtienen relaciones directas entre dichos tensores y las anteriores densidades de disclinación y dislocación [219]:

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \varepsilon_{ikl} \Gamma_{klj} = \varepsilon_{ikl} S_{klj} \\ \Theta_{ij} &= G_{ij} \end{aligned} \quad (3.19)$$

de aquí vemos que las dislocaciones en un cristal van a estar relacionadas con la torsión mientras que las disclinaciones lo van a estar con la curvatura y son características en sólidos que poseen una estructura de tipo espinorial [211].

3.3 Defectos en cristales y propiedades del espacio afín

3.3.1 Paralelismo local

Consideremos un campo vectorial arbitrario $v(x)$. En la base canónica dicho campo se podrá expresar como $v(x) = v^a(x)e_a$. Intuitivamente, decimos que el campo vectorial tiene la propiedad del paralelismo en el sistema de referencia canónico si, en todos los puntos del espacio, el campo “apunta” en la misma dirección (como por ejemplo el caso de un campo magnético constante orientado en la dirección del eje z) es decir, en el sistema de coordenadas cartesianas se tiene la relación $\partial_b v^a = 0$. Si ahora pasamos a un sistema de coordenadas curvilíneo genérico, $\{x_\mu\}$, la anterior relación implica:

$$\partial_b v^a = \partial_b(e^a_\mu v^\mu) = e_b^\nu \partial_\nu(e^a_\mu v^\mu) = e_b^\nu e^a_\mu D_\nu v^\mu = 0 \quad (3.20)$$

siendo $D_\nu v^\mu = \partial_\nu v^\mu + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu v^\lambda$ la derivada covariante. Tenemos por tanto que la condición de paralelismo en el sistema cartesiano se traduce en el sistema de coordenadas curvilíneas en la anulación de la derivada covariante. Dada una conexión arbitraria, querríamos encontrar un criterio que nos informe sobre las condiciones en que es posible el transporte paralelo a lo largo de todo el espacio afín. Si $v^\mu(x)$ se transporta paralelamente, como ya hemos indicado, su derivada covariante se anulará y por tanto se tendrá la ecuación diferencial:

$$\partial_\nu v^\mu = -\Gamma_{\nu\chi}^\mu v^\chi \quad (3.21)$$

si el transporte paralelo ha de darse en todo el espacio afín, debe existir una solución para esta ecuación diferencial que sea válida en todo el espacio. Utilizando el lema de Schwarz junto a la anterior ecuación :

$$\begin{aligned} 0 &= (\partial_\lambda \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\lambda)v^\mu = \\ &= -\partial_\lambda(\Gamma_{\nu\chi}^\mu v^\chi) + \partial_\nu(\Gamma_{\lambda\chi}^\mu v^\chi) - \\ &- (\partial_\lambda \Gamma_{\nu\chi}^\mu - \partial_\nu \Gamma_{\lambda\chi}^\mu)v^\chi - \Gamma_{\nu\chi}^\mu \partial_\lambda v^\chi + \Gamma_{\lambda\chi}^\mu \partial_\nu v^\chi \end{aligned} \quad (3.22)$$

y usando (3.21) llegamos a una expresión que implica directamente al tensor de curvatura :

$$0 = (\partial_\lambda \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\lambda)v^\mu = -R_{\lambda\nu\chi}^\mu v^\chi \quad (3.23)$$

es decir, para que el campo sea transportado paralelamente en todo el espacio es necesario asimismo que la curvatura se anule en todo el espacio. Consecuentemente, no es posible el transporte paralelo global en espacios curvos. En el caso de los cristales, la curvatura está relacionada con las disclinaciones, por lo que podemos concluir que las disclinaciones van a

impedir el transporte paralelo a lo largo del cristal. A pesar de ello, es interesante definir el concepto de paralelismo local [219]: diremos que el campo vectorial es localmente paralelo en el punto x_0 si se cumple que en dicho punto la derivada covariante se anula, es decir, se tiene que $D_\nu v^\mu(x_0) = 0$.

3.3.2 Transporte paralelo en un circuito cerrado

Consideremos ahora un paralelogramo infinitesimal $[ABCD]$, y un campo vectorial $v^\mu(x)$ que cumple la anterior propiedad de paralelismo local en el punto $A = x_0$. En estas condiciones la variación del campo en un circuito cerrado va a ser del orden $(x - x_0)^2$ en lugar de $(x - x_0)$. Dicho de otra forma, en un entorno local de x_0 el campo tendrá la tendencia a transportarse paralelamente. Asimismo vamos a ver que esta diferencia está controlada por la curvatura, por lo que en espacios curvos (o en presencia de disclinaciones), tal como hemos comentado en el apartado anterior, no podremos hablar de transporte paralelo en distancias finitas. En el sistema de coordenadas dado por $\{x^\mu\}$ se tiene $AB = DC = dx_1^\mu$ y $BC = AD = dx_2^\mu$. Queremos evaluar el cambio total en la dirección de $v^\mu(x)$ tras recorrer el circuito completo. En el paso del punto A al punto B se va a tener:

$$\begin{aligned} v_A^\mu &= v^\mu(x_0) \\ v_B^\mu &= v^\mu(x_0 + dx_1) = \\ &= v_A^\mu + \partial_\nu v^\mu(x_0) dx_1^\nu = v_A^\mu - \Gamma_{\nu\lambda}^\mu(A) v_A^\lambda dx_1^\nu \end{aligned} \quad (3.24)$$

donde en la última igualdad hemos tenido en cuenta que en el punto A el campo es localmente paralelo y por tanto su derivada covariante es nula. Procediendo de la misma forma en el paso de B a C se tiene:

$$\begin{aligned} v_C^\mu &= v_B^\mu - \Gamma_{\tau\chi}^B{}^\mu v_B^\chi dx_2^\tau = \\ &= v_A^\mu - \Gamma_{\nu\lambda}^A{}^\mu v_A^\lambda dx_1^\nu - \Gamma_{\tau\chi}^B{}^\mu v_A^\chi dx_2^\tau + \Gamma_{\tau\chi}^B{}^\mu \Gamma_{\nu\lambda}^B{}^\chi v_A^\lambda dx_1^\nu dx_2^\tau = \\ &= v_A^\mu - \Gamma_{\nu\lambda}^A{}^\mu v_A^\lambda (dx_1^\nu + dx_2^\nu) - \partial_\nu \Gamma_{\tau\chi}^A{}^\mu v_A^\chi dx_1^\nu dx_2^\tau + \Gamma_{\tau\chi}^A{}^\mu \Gamma_{\nu\lambda}^A{}^\chi v_A^\lambda dx_1^\nu dx_2^\tau + \\ &+ O(dx^3) \end{aligned} \quad (3.25)$$

el cambio en el campo vectorial a lo largo del recorrido $[ADC]$ es directo simplemente intercambiando el papel de dx_1 y dx_2 en la anterior expresión, por lo que la variación total del campo a lo largo del circuito cerrado será:

$$v_{[ABC]}^\mu - v_{[ADC]}^\mu = -\frac{1}{2} R_{\nu\tau\chi}^\mu v_A^\chi (dx_1^\nu dx_2^\tau - dx_2^\nu dx_1^\tau) \quad (3.26)$$

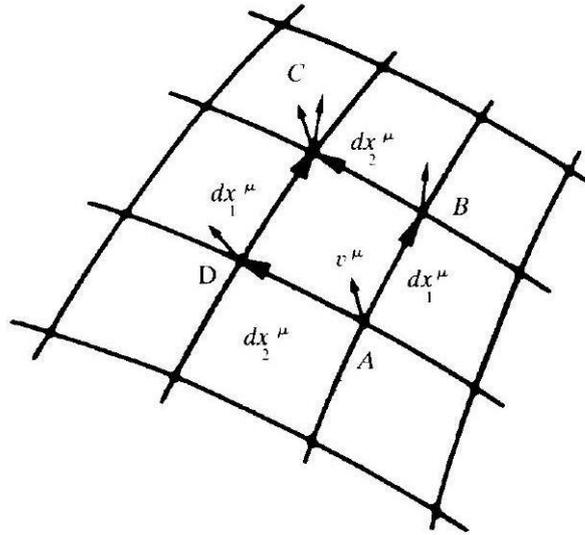


Fig. 3.2 Ilustración del transporte paralelo de un vector alrededor de un circuito cerrado [ABCD] [219].

resultado que nos dice que ambos vectores difieren en términos de segundo orden y superiores y esta diferencia de segundo orden está controlada por el tensor de curvatura. Para curvatura cero, la diferencia es de tercer orden.

3.3.3 Transporte paralelo en un circuito abierto. Vector de Burgers

Podemos asimismo dar una ilustración geométrica de la torsión [219, 29]. Consideremos un cristal dislocado, formado a partir de un cristal ideal que ha sido cortado mecánicamente para introducir en él una capa de átomos adicional. Como consecuencia del proceso de dislocación, el paralelogramo original también ha sido cortado, con lo que el cristal presenta ahora una línea de dislocación en el semieje negativo de la coordenada x^1 . La figura 3.3 ilustra muy bien una de las características fundamentales de las dislocaciones: transforman circuitos cerrados, bien delimitados por la posición regular de los átomos en la red, en circuitos abiertos (en el sentido que el circuito original ha sido “cortado” al introducir en el medio una capa atómica adicional). El parámetro que va a caracterizar la diferencia entre ambos circuitos va a ser el llamado vector de Burgers [216] b^μ . En el sistema de referencia del cristal no dislocado, descrito por un sistema cartesiano de coordenadas, vamos a tener $AB = DC = dx_1^a$, $BC = AD = dx_2^a$ mientras que en el cristal deformado estos vectores pasan a ser $AB = dx_1^\mu$, $AD = dx_2^\mu$, $D'C = dx_1'^\mu$, $BC = dx_2'^\mu$. En el cristal dislocado definimos el campo vectorial $v^\mu(x)$ como:

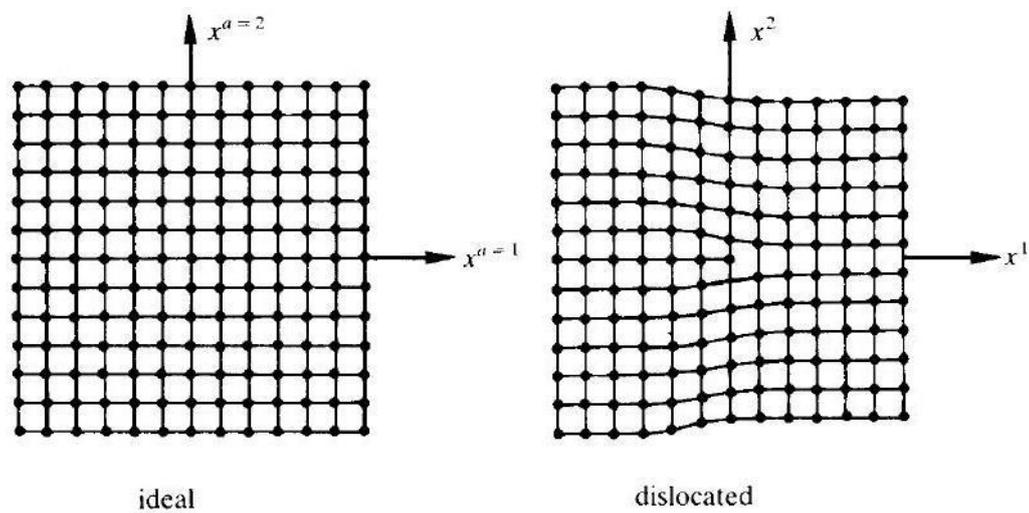


Fig. 3.3 Posiciones atómicas en un cristal con y sin una dislocación “edge type” [219].

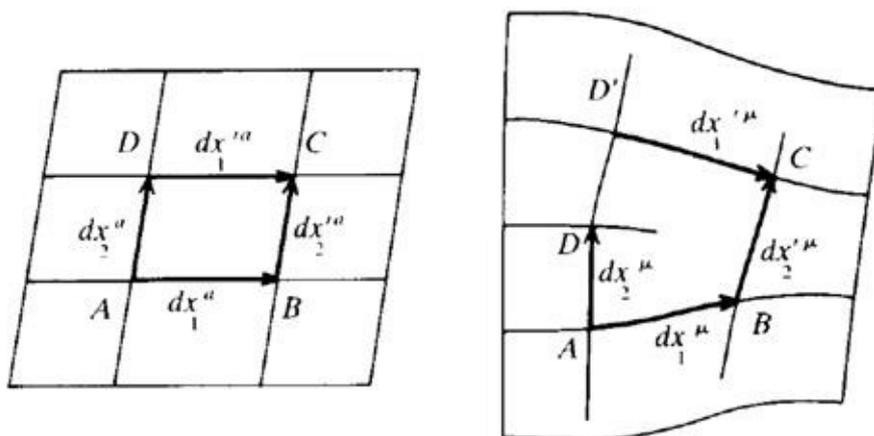


Fig. 3.4 Paralelogramo no cerrado tras insertar una dislocación “edge type” [219].

$$\begin{aligned} v^\mu(x) &= dx_2^\mu \\ v^\mu(x + dx_1) &= dx_2'^\mu \end{aligned} \quad (3.27)$$

al tratarse de un circuito elemental podemos asumir que dx_2^μ seguirá transportándose paralelamente, con lo que va a cumplir (3.21) y la anterior igualdad la podemos escribir como:

$$dx_2'^\mu = dx_2^\mu - \Gamma_{\nu\lambda}^\mu dx_1^\nu dx_2^\lambda \quad (3.28)$$

de la misma forma, los vectores dx_1^μ y $dx_1'^\mu$ eran paralelos originalmente en el cristal ideal, por lo que en el cristal dislocado se va a tener:

$$dx_1'^\mu = dx_1^\mu - \Gamma_{\nu\lambda}^\mu dx_2^\nu dx_1^\lambda \quad (3.29)$$

y a partir de aquí es inmediato calcular el vector de Burgers como:

$$\begin{aligned} b^\mu &= (dx_2'^\mu + dx_1'^\mu) - (dx_2^\mu + dx_1^\mu) = \\ &= -S_{\nu\lambda}^\mu (dx_1^\nu dx_2^\lambda - dx_2^\nu dx_1^\lambda) \end{aligned} \quad (3.30)$$

resultado que nos relaciona la dislocación del cristal caracterizada por el vector de Burgers, con la torsión [29]. En ausencia de dislocaciones el cristal seguirá descrito por una geometría de tipo cartesiana, de torsión cero, y circuitos cerrados se transformarán asimismo en circuitos cerrados. El vector de Burgers nos informa entonces de cuan lejos de ser cerrado está un circuito elemental en un cristal transformado por dislocación respecto al cristal ideal. Como acabamos de comprobar, dicha cuantificación puede ser puesta en relación directa con el concepto de torsión que caracteriza los espacios de Cartan. La torsión de Cartan puede entonces verse como la versión en el continuo del fenómeno de dislocación [226, 225]. Este fue el gran descubrimiento llevado por Kondo [220] y paralelamente, por Bilby, Bullough & Smith [29].

3.3.4 Representaciones integrales en el espacio afín

Es posible generalizar los anteriores resultados y dar una interpretación de las dislocaciones y las disclinaciones como integrales de contorno en el espacio afín [219]. Supongamos de nuevo un campo vectorial $v^\mu(x)$ localmente paralelo y calculemos el cambio que se produce en el campo cuando lo transportamos a lo largo de un contorno cerrado: descomponiendo el circuito en elementos diferenciales de superficie y aplicando (3.26) tenemos:

$$\Delta v^\mu = \oint_{C(x^\mu)} dx^\nu \partial_\nu v^\mu(x) = -\frac{1}{2} \int_{S(x)^\mu} ds^{\tau\nu} R_{\tau\nu\chi}^\mu(x) v^\chi(x) \quad (3.31)$$

con $ds^{\tau\nu} = (dx_1^\nu dx_2^\tau - dx_1^\tau dx_2^\nu)$. Tomando $v^\mu = e_a^\mu$, la anterior igualdad nos queda:

$$\begin{aligned} \Delta e_a^\mu &= \oint_{C(x^\mu)} dx^\nu \partial_\nu e_a^\mu(x) = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{S(x)^\mu} ds^{\tau\nu} R_{\tau\nu\chi}^\mu(x) e_a^\chi(x) \end{aligned} \quad (3.32)$$

y en un circuito infinitesimal podemos considerar que las funciones $\{e_a^\mu\}$ se mantienen prácticamente constantes, con lo que se pueden sacar de la integración y llegar al resultado final:

$$\Delta e_a^\mu \sim \left(-\frac{1}{2} \int_{S(x)^\mu} ds^{\tau\nu} R_{\tau\nu\chi}^\mu \right) e_a^\chi \quad (3.33)$$

este resultado es particularmente interesante, ya que si definimos la matriz $\widehat{\omega}$ como $\omega_{\mu\chi} = g_{\mu\lambda} \omega_\chi^\lambda$ vamos a encontrar que es antisimétrica como consecuencia de la antisimetría del tensor curvatura en los dos últimos índices. Podemos entonces interpretarla como representante de una transformación de Lorentz local e infinitesimal, lo cual tiene sentido: la curvatura es una manifestación de las disclinaciones y estas pueden interpretarse como defectos producidos en la red cristalina tras un corte y una separación angular de las distintas superficies generadas en el corte.

Podemos asimismo dar una caracterización integral de la torsión. Consideremos un contorno cerrado arbitrario $C(x^a)$ en el sistema de referencia canónico característico del cristal ideal. En el espacio transformado propio del cristal real este contorno tiene una imagen $C(x^\mu)$ que, como hemos discutido en la sección anterior, no es necesariamente cerrada, puesto que las capas de átomos adicionales introducidas en el material inducen un corte en el circuito original. Para evaluar la magnitud de este corte, calculemos el vector de Burgers como:

$$\oint_{C(x^\mu)} dx^\mu = \oint_{C(x^a)} dx^a \frac{\partial x^\mu}{\partial x^a} = \oint_{C(x^a)} dx^a e_a^\mu(x^a) \quad (3.34)$$

y usando el teorema de Stokes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{S(x^a)} ds^{ab} (\partial_a e_b^\mu - \partial_b e_a^\mu) &= \frac{1}{2} \int_{S(x^a)} ds^{ab} (e_a^\nu \partial_\nu e_b^\mu - e_b^\nu \partial_\nu e_a^\mu) = \\ &= - \int_{S(x^a)} ds^{ab} S_{ab}^\mu \end{aligned} \quad (3.35)$$

siendo $S_{ab}^{\mu} = -\frac{1}{2}(e_a^{\nu}\partial_{\nu}e_b^{\mu} - e_b^{\nu}\partial_{\nu}e_a^{\mu})$ una cantidad que mezcla índices en ambos sistemas de coordenadas y que va a dar una medida de la irregularidad de la transformación de coordenadas (encontraremos asimismo este tipo de construcciones mixtas cuando estudiemos el comportamiento de los fermiones en espacios curvos). Su relación con la torsión es inmediata y viene dada por $S_{ab}^{\mu} = e_a^{\lambda}e_b^{\chi}S_{\lambda\chi}^{\mu}$. En ausencia de torsión la integral en el circuito imagen va a ser nula, en caso contrario tendremos un valor no nulo del vector de Burgers.

3.3.5 Cristal bidimensional con línea de dislocación

Volvamos al ejemplo anterior e ilustremos los puntos anteriores con un par de aplicaciones numéricas recogidas por Kleinert [219]. El cristal ideal previo al proceso de dislocación puede modelizarse con sus átomos situados en un sistema de coordenadas cartesianas dado por $x^a = (n^1, n^2, n^3) * b$ siendo b una separación infinitesimal constante que caracteriza la red y n^i números enteros arbitrarios. La dislocación se produce al realizar un corte longitudinal en el cristal e introducir capas adicionales de átomos. Las posiciones de los átomos en el cristal dislocado pueden describirse con ayuda de un sistema de coordenadas $\{y^{\mu}\}$ relacionadas con las originales mediante una transformación $y^{\mu} = y^{\mu}(x^a)$. Es importante entender que esta transformación de coordenadas no va a ser unívoca entre los átomos iniciales y finales ya que en la zona de dislocación caracterizada por $x^1 < 0$ y $x^2 \simeq 0$ van a existir átomos adicionales que no van a tener su correspondencia en el cristal original. En el límite al continuo, con el vector de Burgers tendiendo a cero, podemos modelizar la transformación de coordenadas con una expresión de la forma:

$$\begin{aligned} x^1 &= y^1 \\ x^2 &= y^2 - \frac{b}{2\pi} \arctan \frac{y^2}{y^1} \end{aligned} \quad (3.36)$$

con la función arcotangente definida como $\pm\pi$ para $y^2 = \pm\varepsilon$, de forma que podemos pensar en los átomos adicionales situados a una distancia $\varepsilon = \frac{b}{2}$ por encima o por debajo del eje y^1 , mientras que para los átomos del cristal alejados de la línea de dislocación o en el semieje positivo ambos sistemas de coordenadas van a tender a coincidir. El cálculo de los componentes de la matriz de cambio de coordenadas $e^a_{\mu} = \frac{\partial x^a}{\partial y^{\mu}}$ nos lleva a :

$$e^a_{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{by^2}{2\pi[(y^1)^2+(y^2)^2]} & 1 - \frac{by^1}{2\pi[(y^1)^2+(y^2)^2]} \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

es a menudo conveniente calcular el vector de Burgers en el espacio original, para ello medimos la variación de las coordenadas originales a lo largo de un circuito cerrado alrededor

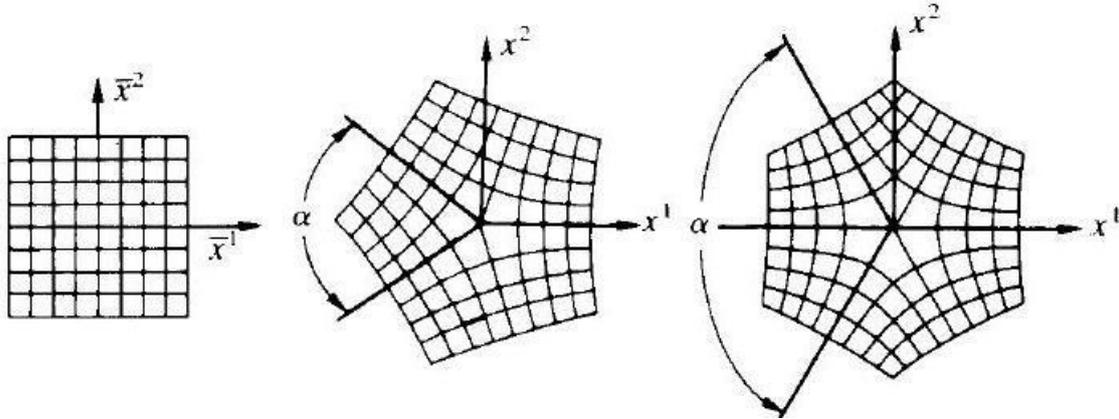


Fig. 3.5 Disclinación en cuña para ángulos $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ y $\alpha = -\pi$ formadas mediante el procedimiento de Volterra [219].

del defecto en el espacio final, procedimiento que se conoce como transporte de Cartan. En el caso de la torsión esto nos da una medida de cuanto diverge de ser cerrado el circuito así construido en el espacio original. En nuestro caso, integramos en un circuito alrededor del origen en el espacio $\{y^\mu\}$:

$$b^a = \oint_{c(y^\mu)} dx^a = \oint_{c(y^\mu)} dy^\mu \frac{\partial x^a}{\partial y^\mu} \quad (3.38)$$

utilizando la anterior matriz y el teorema de Cauchy es fácil comprobar $b^1 = 0$ y $b^2 = -b$. Podemos asimismo calcular trivialmente el valor del tensor de curvatura, $R_{\mu\nu\lambda}^\chi = e_a^\chi (\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu) e^a_\lambda$: las componentes de e^a_μ son funciones univaluadas y con buen comportamiento en el origen, con lo que las derivadas parciales van a conmutar, y en consecuencia la curvatura va a ser nula. Resultado importante, que ilustra el hecho de que una línea de dislocación produce torsión, pero no curvatura.

3.3.6 Cristal con disclinación

Consideremos ahora un cristal en el que se ha practicado corte a lo largo del semieje negativo de la coordenada x^2 , se han separado los labios resultantes un ángulo α y a continuación se ha introducido el nuevo material. Como consecuencia de ello los vectores $e_\mu = e_a e^a_\mu$ en el espacio imagen se han rotado con respecto a los del espacio original. En la zona de la cuña, para $x^2 < 0$, y $x^1 \simeq 0$ van a estar girados un ángulo $\pm \frac{\alpha}{2}$ para $x^1 = \pm \varepsilon$, mientras que para $x^2 > 0$ van a coincidir con los originales. Se puede modelizar este proceso definiendo el ángulo $\varphi = \arctan(\frac{y^2}{y^1})$, que tomará los valores $\pm \pi$ para $y^2 < 0$, $y^1 = \pm \varepsilon$. Las componentes de la matriz de transformación de coordenadas van a venir dadas entonces por:

$$\begin{aligned}
e^a{}_\lambda &= \begin{pmatrix} \cos(\frac{\varphi}{n}) & -\sin(\frac{\varphi}{n}) \\ \sin(\frac{\varphi}{n}) & \cos(\frac{\varphi}{n}) \end{pmatrix} \\
e_a{}^\lambda &= \begin{pmatrix} \cos(\frac{\varphi}{n}) & \sin(\frac{\varphi}{n}) \\ -\sin(\frac{\varphi}{n}) & \cos(\frac{\varphi}{n}) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.39}$$

con $n = \frac{2\pi}{\alpha}$. Es preciso hacer la observación de que la técnica utilizada en el proceso de introducción de nuevo material en la red cristalina implica que α debe ser múltiplo de $\frac{\pi}{4}$ mientras que el planteamiento en términos de geometría diferencial implica $n \rightarrow \infty$. Esta discrepancia supone una debilidad básica en el tratamiento de los defectos en la red cristalina con este tipo de disclinación mediante geometría diferencial. Derivando en las anteriores expresiones tenemos:

$$\partial_\nu e^a{}_\lambda = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} -\sin(\frac{\varphi}{n}) & -\cos(\frac{\varphi}{n}) \\ \cos(\frac{\varphi}{n}) & -\sin(\frac{\varphi}{n}) \end{pmatrix} \partial_\nu \varphi(x) \tag{3.40}$$

y un cálculo directo lleva a:

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu\lambda}{}^\chi &= e_a{}^\chi (\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu) e^a{}_\lambda \\
&= \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^\chi_\lambda (\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu) \varphi(x)
\end{aligned} \tag{3.41}$$

resultado que no va a ser nulo, ya que para puntos cercanos al origen, añadiendo una pequeña parte infinitesimal ε y derivando la función arcotangente tendremos:

$$(\partial_1 \partial_2 - \partial_2 \partial_1) \varphi(x) = \frac{2\varepsilon^2}{[(y^1)^2 + (y^2)^2 + \varepsilon^2]^2} \tag{3.42}$$

para $y^\mu \neq 0$ esta expresión tiende a cero, pero en puntos cercanos al origen, el denominador va como $\frac{1}{\varepsilon}$ lo que nos va a dar el comportamiento típico de una delta de Dirac. Tenemos, por tanto que, en la zona de disclinación, va a aparecer una curvatura no nula. La torsión puede entonces leerse como un campo tensorial que nos informa, en el paso al continuo, de los fenómenos de dislocación en la red cristalina cuantificables mediante el vector de Burgers [29, 145], mientras que la curvatura nos informa de los procesos de disclinación. Dichos campos en el continuo permiten estudiar la teoría de los defectos en sólidos y los procesos deformativos que dan cuenta de las propiedades plásticas y elásticas de los mismos en el marco de una teoría efectiva de campos gauge [218, 228, 229].

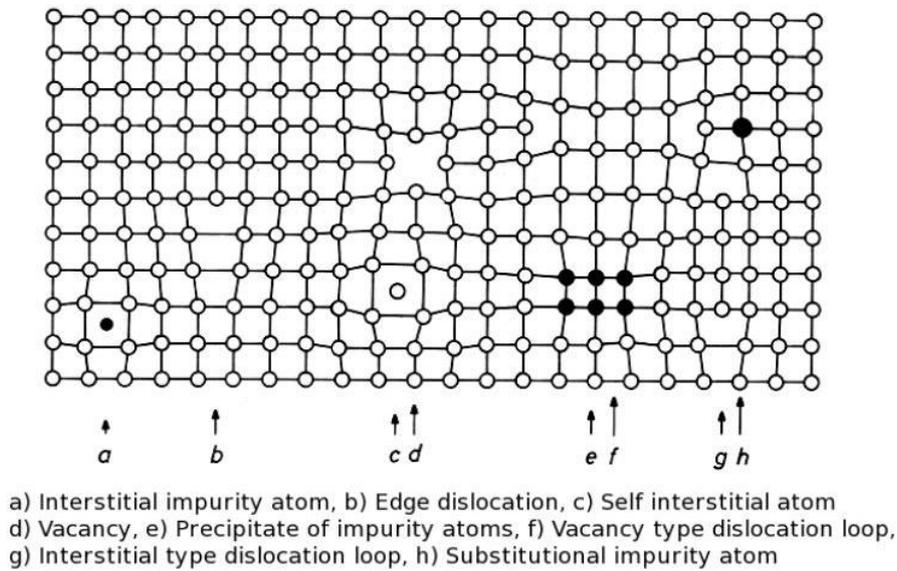


Fig. 3.6 Ilustración de los diferentes tipos de defectos en redes cristalinas [244].

3.4 No metricidad

Tanto si consideramos un marco de trabajo en términos de la anteriormente mencionada teoría efectiva de campos gauge, o desde el punto de vista de una geometría de variedades en que el espacio-tiempo asociado se aleja de la propuesta riemanniana, el fenómeno de no metricidad se traduce directamente en una derivada covariante no nula para el tensor métrico, es decir, un transporte paralelo no efectivo. Desde el punto de vista de los defectos en las estructuras cristalinas, esto se traduce en la aparición de defectos intersticiales, vacantes en la estructura cristalina, que interrumpen el proceso de medida de las distancias para un observador ligado a la estructura sólida. Dicho observador no puede medir las distancias de otra forma que no sea aplicando un conteo de los átomos presentes en las direcciones cristalográficas del sólido [226]. La ausencia de algunos átomos en dicha red distorsiona pues este proceso de medida. Sigamos a Kröner y consideremos de nuevo las estructuras conocidas como “cristales de Bravais” [225, 226]. Para fijar ideas consideremos los defectos de tipo puntual, ya que este tipo de defectos en la red del cristal son los que van a distorsionar el proceso de conteo por un observador en el cristal, y por tanto van a introducir la no metricidad. Los defectos puntuales, a su vez, pueden subdividirse en dos tipos: intersticiales, que corresponden a átomos que se han desplazado de su posición de equilibrio en la red y vacantes, correspondientes a los huecos dejados por dicho desplazamiento. El sólido cristalino macroscópico emerge desde la estructura microscópica como un paso al límite en el que la distancia entre átomos de la red y la masa de los mismos tienden a cero, mientras que la densidad se mantiene constante. Esta

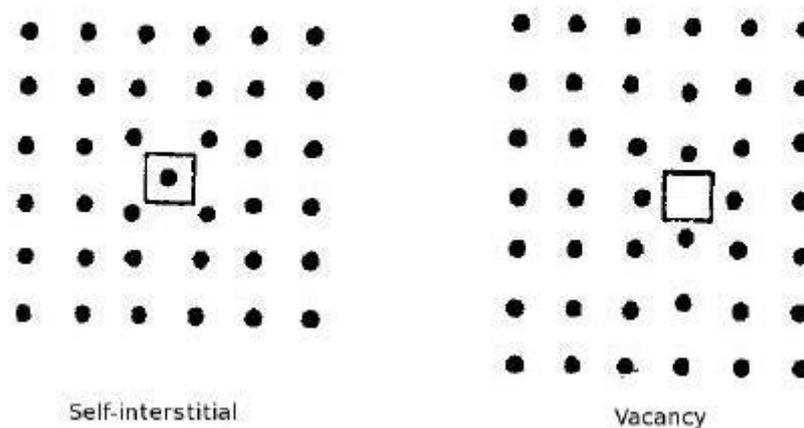


Fig. 3.7 Diferentes tipos de defectos puntuales [225].

prescripción nos proporciona una descripción funcional del cristal real. Los cristales con defectos también pueden extrapolarse al continuo de esta forma, siempre que el número de defectos por unidad de volumen puede considerarse constante. Para cada átomo del cristal, podemos definir una triada de vectores (direcciones cristalográficas) de tal forma que el transporte paralelo a lo largo de esas direcciones nos lleva de un átomo a otro. Dentro del cristal, las distancias pueden ser determinadas por un proceso de conteo de pasos a lo largo de las mencionadas direcciones cristalográficas [226].

Si estamos considerando un cristal ideal entonces las direcciones cristalográficas son cartesianas, la geometría es euclídea y consecuentemente los coeficientes que caracterizan la conexión se anulan. Como un cristal perfecto es una deformación de uno ideal, existirá una relación entre las distancias elementales en uno y otro caso, que será del tipo $dy^\mu = e^\mu_i dx^i$ donde los coeficientes e^μ_i dan cuenta de la deformación del cristal perfecto y satisfacen relaciones de ortogonalidad del tipo $e^\mu_i e^i_\nu = \delta^\mu_\nu$ y su inversa $e^i_\mu e^\mu_j = \delta^i_j$. Por otra parte y como ya hemos comentado, los coeficientes de la conexión y el elemento de línea en las coordenadas curvilíneas que describen el cristal perfecto cumplirán las relaciones, $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = e^\alpha_i \partial_\beta e^i_\gamma$ y $ds^2 = g_{\mu\nu} dy^\mu dy^\nu$, donde los elementos de la métrica $g_{\mu\nu}$ que describe el cristal perfecto se relacionarán con los de la métrica del cristal ideal (cartesiana) a través de la relación $g_{\mu\nu} = \delta_{ij} e^i_\mu e^j_\nu$. Tenemos entonces que en un cristal perfecto tanto la métrica como la conexión están totalmente determinadas mediante los coeficientes que describen la deformación, y la derivada covariante de la métrica $\nabla_\lambda^\Gamma g_{\mu\nu}$ es idénticamente nula:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\lambda}^{\Gamma} g_{\mu\nu} &= \partial_{\lambda} g_{\mu\nu} - \Gamma_{\lambda\mu}^{\rho} g_{\rho\nu} - \Gamma_{\lambda\nu}^{\rho} g_{\mu\rho} = \\
&= \partial_{\lambda} (\delta_{ij} e_{\mu}^i e_{\nu}^j) - e_{\mu}^{\rho} \partial_{\lambda} (e_{\rho}^k) \delta_{ij} e_{\nu}^j - e_{\nu}^{\rho} \partial_{\lambda} (e_{\rho}^k) \delta_{ij} e_{\mu}^j \\
&= \delta_{ij} \partial_{\lambda} (e_{\mu}^i) e_{\nu}^j + \delta_{ij} \partial_{\lambda} (e_{\nu}^j) e_{\mu}^i - \partial_{\lambda} (e_{\mu}^i) \delta_{ij} e_{\nu}^j - \partial_{\lambda} (e_{\nu}^j) \delta_{ij} e_{\mu}^i = \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.43}$$

en el caso de un cristal con defectos puntuales, tenemos que el anteriormente mencionado proceso de contaje por pasos para definir distancias deja de estar bien definido en las posiciones ocupadas por los defectos del cristal. La situación pasa a ser entonces “no métrica”. Es posible, no obstante, introducir un mecanismo alternativo de medida de longitudes que consiste, básicamente, en ignorar los defectos del cristal: la prescripción que se usa para ello consiste en llenar las vacantes con átomos y no contar en absoluto los defectos intersticiales. Esto supone, en la práctica, la introducción de una métrica auxiliar, $h_{\mu\nu}$ y un nuevo elemento de línea asociado a ella por la relación:

$$ds_h^2 = h_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \tag{3.44}$$

siendo $h_{\mu\nu} = \delta_{ij} C_{\mu}^i C_{\nu}^j$ y C_{μ}^i los vectores tangentes que nos van caracterizar el nuevo espacio deformado, $C_{\mu}^i \neq e_{\mu}^i$. Evidentemente este pseudo-tensor métrico no va a ser compatible con la conexión $\Gamma_{\lambda\nu}^{\rho}$ que describía el transporte paralelo en el cristal perfecto, pero sí podemos establecer una nueva conexión $L_{\lambda\nu}^{\rho}$ compatible con esta métrica. Tendremos entonces un nuevo juego de coeficientes $\{d^i_j\}$ que relacionarán la estructura auxiliar $\{C_{\mu}^i\}$ con la estructura física $\{e_{\mu}^i\}$ mediante relaciones del tipo: $e_{\mu}^i = d^i_j C_{\mu}^j$. Estos coeficientes $\{d^i_j\}$ forman una matriz que da cuenta de la deformación entre los espacios inicial y final, y vendrán determinados por el tipo de defectos presentes en el cristal, así como por su densidad. Evidentemente se tendrá $d^i_j = \delta^i_j$ si lo que tenemos es un cristal que no presenta defectos. Vemos entonces que la introducción de la métrica auxiliar $h_{\mu\nu}$ da una noción de distancia útil para cristales con defectos y permite construir la conexión física $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}(g)$ que no será, a priori, compatible con la métrica, (en un cristal con defectos se cumplirá, en general, $\nabla_{\lambda}^{\Gamma} h_{\mu\nu} \neq 0$ y también, $\nabla_{\lambda}^L g_{\mu\nu} \neq 0$ [244]). Esto nos lleva a pensar que el continuo macroscópico de la estructura cristalina sigue una geometría diferencial de tipo métrico-afín en la que conexión y métrica (física) son objetos en principio independientes.

Esta puesta en escena del juego entre diferentes tipos de geometría métrica y métrico-afín ilustrada aquí para los cristales de Bravais puede asimismo encontrar su correspondencia en el escenario de diferentes teorías de la gravedad [278]. Dicha descripción matemática en la que la conexión del espacio-tiempo pasa a ser independiente de la métrica física constituye

el fundamento de toda teoría de gravedad formulada “à la Palatini”, estudio que abordaremos en los siguientes apartados de este trabajo. La densidad de defectos presentes en el cristal va a jugar pues un papel clave en los detalles de muchas de las propiedades macroscópicas del sólido como por ejemplo su viscosidad o viscoelasticidad, (asociados a defectos puntuales) o su plasticidad, (que tendrá que ver con defectos a lo largo de una dirección espacial determinada). Estas propiedades serán de gran importancia para entender la naturaleza de determinados materiales, como es el caso del grafeno [94], del que hablaremos en la próxima sección.

El mismo análisis que hemos llevado a cabo para las estructuras cristalinas puede pues extrapolarse para estudiar la estructura del espacio-tiempo [244]. La existencia de una densidad no nula de defectos en la estructura microscópica del espacio-tiempo [365, 262] puede conducir a una geometría en el continuo que sea de tipo métrico-afín: si la densidad de defectos no es uniforme, la geometría puede ser de tipo riemanniano en aquellas regiones o aquellas escalas en las que la densidad de defectos es suficientemente baja. En ese sentido podemos interpretar la RG como una teoría efectiva en determinados rangos de densidad de la energía. Las teorías modificadas en las que la geometría es métrico-afín constituirían entonces un siguiente paso, de carácter clásico, para describir regiones en las que la densidad de energía es mayor. A densidades mayores aún, una teoría cuántica de la gravedad será necesaria. El gran éxito de la RG, basada en una geometría riemanniana, puede explicarse mediante la hipótesis de que la distribución de defectos en la microestructura del espacio-tiempo no es uniforme, y da como resultado una geometría riemanniana en las escalas a las que tenemos acceso en la actualidad. Descripciones efectivas de la gravedad a energías mayores, donde torsión y no metricidad cobran importancia, pueden necesitar ir más allá del marco riemanniano.

Capítulo 4

Algunos escenarios sugerentes

4.1 Fermiones en espacios curvos

4.1.1 Introducción

Bajo transformaciones de Lorentz, caracterizadas por rotaciones espaciales y *boosts espacio-temporales*, la descripción mecano-cuántica de una partícula precisa de un nuevo número cuántico, el espín o momento angular intrínseco, que da cuenta de como se transforma la función de onda asociada en el correspondiente espacio de Hilbert [126, 65]. Todas las partículas elementales conocidas responden a representaciones unitarias e irreducibles del grupo de Poincaré [182] y dichas representaciones vienen caracterizadas por el espín de la partícula elemental, por lo que la existencia del espín se convierte en un requisito necesario para construir una teoría cuántica de campos que cumpla los requisitos de covariancia Lorentz solicitados por la RE. Establecida entonces dicha conexión entre espín y Relatividad Especial, podemos extender nuestro análisis al marco de la RG y preguntarnos acerca de la posible relación entre espín y gravitación. Con el fin de aclarar los aspectos fundamentales de dicha relación es importante advertir del hecho de que se trata, en cierta forma, de una relación de “ida y vuelta”: por una parte, el fenómeno gravitatorio puede interpretarse geoméricamente mediante la introducción de un espacio-tiempo curvo, y un primer objetivo pasa por conocer como adaptar la ecuación de Dirac a un espacio-tiempo de estas características es decir, atender al problema de la propagación de partículas de espín distinto de cero en una solución de gravedad dada. Por otra parte, sabemos que la propia materia es responsable de la forma en que el espacio-tiempo se curva; de acuerdo con las ecuaciones de Einstein el tensor energía-momento de la materia determina la geometría del espacio-tiempo y es en ese sentido en el que surge la relación entre espín y torsión: la descripción de una gravedad originada por materia fermiónica pasa necesariamente por una geometría más allá de Riemann. Insistiendo

en este punto no debemos dejar de comentar, como ya hemos citado anteriormente, el hecho de que la RG fue formulada cuando la única geometría no euclidiana disponible “en el mercado” era la de Riemann, esto es, antes de que la torsión fuera enunciada inicialmente por Cartan [130]. Más aún: los primeros trabajos sobre torsión son contemporáneos exactamente a la introducción del espín en el contexto de la mecánica cuántica, y a sus primeras evidencias experimentales [126, 322]. Desde el punto de vista del estado sólido acabamos de comentar que la torsión está relacionada con las dislocaciones: desviaciones cuantificadas por el vector de Burgers acerca de como un circuito cerrado en una geometría perfecta pasa a ser abierto en un cristal que presenta defectos. Dicha circulación alrededor de un defecto supone, obviamente, una rotación y comparte con las rotaciones su naturaleza no abeliana [153, 322]. Es por tanto lógico pensar que la introducción de una fuente de materia de naturaleza espinorial va a producir, al nivel de la teoría de la gravedad asociada, una estructura en la que la torsión va a ser no nula. En ese sentido podemos decir entonces que en el contexto de la gravedad el espín dota al espacio-tiempo de estructuras análogas a la dislocación en cristales [219].

La masa y el espín como parámetros físicos que caracterizan la partícula se relacionan con transformaciones diferentes del grupo de Poincaré: la masa se relaciona con la parte traslacional, mientras que el espín lo hace con la parte rotacional. Distribuciones de masa y energía nos llevan a tensores energía-momento y distribuciones de espín, a las correspondientes densidades de momento angular asociadas [253]. No obstante, el carácter dipolar del espín frente al carácter monopolar de la masa marca las diferencias en el escenario macroscópico [182]: la masa es siempre aditiva, lo que da lugar a una curvatura del espacio-tiempo no nula. En la escala macroscópica, sin embargo, el espín promedia a cero, con lo cual los efectos observacionales de la torsión no son esperables en el rango de escalas macroscópicas.

Comencemos esta sección recuperando brevemente la forma de la ecuación de Dirac en el marco de la RE para concretar luego la forma matemática de la mencionada relación bidireccional entre espín y materia, estudiando por una parte como escribir la ecuación de Dirac en espacios curvos y por otra, cómo la introducción de partículas fermiónicas en el sector de materia supone una fuente de torsión en la descripción del espacio-tiempo asociado.

4.1.2 Ecuación de Dirac en el marco de la Relatividad Especial

Inicialmente Dirac introdujo su ecuación de onda para el electrón partiendo de la relación de dispersión relativista para la partícula libre [126, 65]:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (4.1)$$

con el objetivo de linealizar la anterior expresión y haciendo la sustitución de las variables clásicas por los operadores mecano-cuánticos $\{E, p_i\} \rightarrow \{-i\frac{\partial}{\partial t}, -i\frac{\partial}{\partial x^i}\}$, Dirac propuso para su ecuación la estructura:

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -i\alpha_i\frac{\partial\Psi}{\partial x^i} + \beta\Psi \quad (4.2)$$

donde hemos adoptado el sistema de unidades naturales, ($\hbar = c = 1$). En esta ecuación Ψ representa una función de ondas de cuatro componentes o espinor y $\{\alpha^i\}$ y β son matrices 4×4 a determinar. Elevando al cuadrado ambos miembros de la anterior ecuación y exigiendo que se cumpla la relación de dispersión (4.1) se obtiene la forma que han de tener dichas matrices

$$\begin{aligned} \beta &= \begin{pmatrix} I_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & -I_{2 \times 2} \end{pmatrix} \\ \alpha_i &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.3)$$

con $\{\sigma_i\}$ las matrices de Pauli habituales en 2 dimensiones :

$$\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}. \quad (4.4)$$

El acoplamiento de la partícula cargada a un campo electromagnético se construye mediante el principio clásico de acoplamiento mínimo, mediante la sustitución $p \rightarrow p - qA$ [232]. Si además tenemos un campo electrostático Φ , la ecuación de Dirac se escribe como:

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left[\alpha_i(-i\frac{\partial}{\partial x^i} - qA^i) + \beta m + q\Phi \right] \Psi \quad (4.5)$$

dicha formulación original, inspirada en la forma de la ecuación de Schrödinger no relativista, no es manifiestamente covariante Lorentz: consideremos la métrica usual de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ en 3 + 1 dimensiones y en la signatura $\{+, -, -, -\}$. Podemos introducir el cuadripotencial A^μ como:

$$\begin{aligned} A^\mu &\equiv (\Phi, A) \\ A_\mu &\equiv (\Phi, -A) \end{aligned} \quad (4.6)$$

y la ecuación de Dirac (4.5) pasa a :

$$i\partial_0\Psi = [\alpha_i(-i\partial_i + qA_i) + \beta m + qA_0]\Psi. \quad (4.7)$$

Buscamos ahora desacoplar la masa de las dependencias matriciales. Para ello aprovechamos el hecho de que $\beta^2 = I$ para multiplicar ambos miembros de (4.7) por β y definimos las matrices de Dirac como $\{\gamma^0, \gamma^i\} \equiv \{\beta, \beta\alpha_i\}$ cumpliendo la relación $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$ conocida como álgebra de Clifford, lo que nos lleva ya a una formulación claramente covariante Lorentz:

$$[i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^i\partial_i - q\gamma^iA_i - m - q\gamma^0A_0]\Psi = [i\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) - m]\Psi = 0, \quad (4.8)$$

que es la expresión habitual de la ecuación de Dirac para partículas de espín $\frac{1}{2}$ en el espacio minkowskiano convencional en $(3+1)$ dimensiones. A lo largo de nuestro trabajo hablaremos asimismo de soluciones de la ecuación de Dirac en un espacio de $(2+1)$ dimensiones (soluciones de tipo BTZ [257, 40, 41]), así como de soluciones fermiónicas sobre el grafeno [161, 109]. Las particularidades de la construcción de Dirac en un espacio de $(2+1)$ dimensiones pueden consultarse en las referencias [147, 237]. Una generalización a dimensiones impares arbitrarias puede encontrarse en [113] y una discusión pormenorizada sobre el álgebra de Clifford y la formulación lagrangiana correspondiente en un espacio $(1+1)$ puede encontrarse, asimismo, en el trabajo de Wheeler [N.Wheeler].

Preguntémonos ahora qué modificaciones introduce en la formulación covariante de la ecuación de Dirac el cambio en la signatura. Dicho cambio de signatura debe analizarse detenidamente en lo que pueda afectar a la propia álgebra de Clifford asociada [302]. En el desarrollo de este trabajo vamos a utilizar la signatura para la métrica mas habitual en los escenarios cosmológicos, es decir consideraremos la métrica de Minkowski dada por $\eta_{ab} = \text{Diag}\{-1, +1, +1, +1\}$ por lo que es interesante analizar como escribiremos la ecuación de Dirac cuando usemos esta signatura. En primer lugar, para el cuadripotencial vector tendremos que las componentes contravariantes y covariantes se escribirán ahora como $A^\mu \equiv (\Phi, A)$, $A_\mu = \eta_{\mu\nu}A^\nu \equiv (-\Phi, A)$ y la contracción $\gamma^\mu A_\mu = \gamma^0\Phi - \gamma^iA_i$ se corresponde con $-\gamma^0A_0 - \gamma^kA_k = -\gamma^\mu A_\mu$. Por otro lado, queremos conservar la anterior definición del álgebra de Clifford, por lo que una forma de lograrlo es modificar la forma de las matrices gamma y redefinirlas como $\{\gamma^0, \gamma^i\} \rightarrow i\{\gamma^0, \gamma^i\}$. Introduciendo $\hat{\gamma}^\mu = i\gamma^\mu$ (4.8) pasa entonces a escribirse sencillamente como :

$$[\hat{\gamma}^\mu(\partial_\mu - iqA_\mu) - m]\Psi = 0 \quad (4.9)$$

4.1.3 Espín y torsión: la conexión de espinor

Una vez discutida la forma de la ecuación de Dirac para partículas de espín $\frac{1}{2}$ en un espacio-tiempo de tipo minkowskiano, consideremos la densidad lagrangiana de la cual deriva y la correspondiente acción como la parte de materia que se va a sumar a nuestra acción de gravedad. En el espacio-tiempo de Minkowski la acción del campo fermiónico libre la podemos escribir entonces de acuerdo a :

$$S_m = \frac{1}{2} \int d^4x \bar{\Psi}(x) (\hat{\gamma}^\mu \partial_\mu - m) \Psi(x) + H.C. \quad (4.10)$$

donde (H.C.) hace referencia a un segundo término hermítico conjugado del primero. Es inmediato ver que el desarrollo del hermítico conjugado del segundo miembro nos da las mismas ecuaciones del movimiento que el primero, ya que básicamente se diferencian en una cuatridivergencia $\partial_\mu (\bar{\Psi}(x) \hat{\gamma}^\mu \Psi(x))$: si consideremos el primer término en (4.10) y aplicamos las ecuaciones de Euler-Lagrange al campo espinorial conjugado $\bar{\Psi}(x) = \Psi^+(x) \hat{\gamma}^0$ es inmediato recuperar la ecuación de Dirac en la forma (4.9). Nuestro siguiente paso esperable a la hora de construir la acción de Dirac en el espacio-tiempo curvo pasa por promocionar el elemento de volumen a su equivalente covariante: $d^4x \rightarrow \sqrt{-g} d^4x$ y la derivada parcial convencional a algún tipo adecuado de derivada covariante Lorentz que implique al espinor: $\partial_\mu \Psi \rightarrow D_\mu \Psi$. Nos preguntamos entonces qué forma debe tener dicha derivada espinorial para satisfacer el requisito de covariancia Lorentz, lo cual involucrará asimismo a la forma en que se transforma el espinor del fermión bajo transformaciones Lorentz [65]. La deducción de dicha estructura covariante puede encontrarse detallada en muchos textos de referencia [357, 362, 64] y para desarrollarla necesitamos algunos ingredientes extra: el concepto de “vierbein” o tetrada e_a^μ y el concepto de coordenadas no holónomas [64] así como las mencionadas leyes de transformación Lorentz para los espinores. A continuación exponemos las líneas básicas del procedimiento [219] que nos llevará a dicha formulación covariante. Tenemos entonces que, por construcción, nuestra acción de Dirac en el espacio-tiempo curvo debe ser algo del estilo:

$$S_m = \frac{1}{2} \int \sqrt{-g} d^4x \bar{\Psi}(x) (\hat{\gamma}^\mu(x) D_\mu - m) \Psi(x) + H.C. \quad (4.11)$$

con D_μ pendiente de determinar y $\hat{\gamma}^\mu(x)$ nuevas matrices de Dirac dependientes del punto del espacio-tiempo considerado, y que por correspondencia con el límite minkowskiano, queremos que mantengan el álgebra de Clifford ya conocida, esto es: $\{\hat{\gamma}^\mu(x), \hat{\gamma}^\nu(x)\} = 2g^{\mu\nu}(x)$ con $g^{\mu\nu}(x)$ la métrica del espacio-tiempo. El marco de trabajo más adecuado para resolver nuestro problema, pasa por la introducción de las coordenadas no holónomas, que denotaremos, siguiendo la notación de Kleinert [219] mediante la serie de primeros caracteres

del alfabeto griego $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots\}$ reservando índices más avanzados $\{\mu, \nu, \tau, \chi \dots\}$ para las coordenadas curvilíneas habituales (la base holónoma), y los índices latinos $\{a, b, c, d \dots\}$ asociados a un sistema canónico cartesiano que nos permitirá articular el paso de un sistema de coordenadas a otro. Asimismo adoptaremos inicialmente la signatura $\{+, -, -, -\}$ para la métrica del espacio-tiempo de Minkowski. Tenemos pues que las coordenadas no holónomas van a relacionarse con las coordenadas curvilíneas ordinarias mediante leyes de transformación del estilo: $dx^\alpha = e_\mu^\alpha(x)dx^\mu$ con $e_\mu^\alpha(x) \equiv \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu}$. Nombraremos como “vierbein” a los coeficientes de la transformación inversa: $e_\alpha^\mu(x) \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha}$ (aunque por extensión es habitual nombrar así ambos lados de la transformación, de manera indiferente), y suponen el análogo a las componentes e_μ^a y sus inversas introducidos en (3.1) y (3.2). Dichas componentes nos relacionaban el sistema de coordenadas canónico cartesiano con las coordenadas curvilíneas elegidas para el problema concreto a abordar, mientras que el “vierbein” va a establecer una relación análoga, pero poniendo en juego coordenadas no holónomas y las coordenadas curvilíneas con las que describimos en general nuestro espacio-tiempo curvo.

Llegados a este punto, es hora de dotar de personalidad propia a las mencionadas coordenadas no holónomas esto es, de explicar qué las hace especiales y como pueden ayudarnos en la resolución de nuestro problema. Para ello acudimos de nuevo al principio de equivalencia: sabemos que para todo campo gravitatorio es siempre posible encontrar, dado un punto concreto de la variedad, un sistema de coordenadas particular de manera que, localmente, en dicho sistema de coordenadas la métrica es minkowskiana: ese sistema de coordenadas localmente inercial va a ser precisamente el que identifiquemos con el sistema de coordenadas no holónomas, esto es: en cada punto del espacio-tiempo se va a cumplir (localmente) la relación $g_{\alpha\beta}(x) = \eta_{\alpha\beta} = \text{Diag}\{+, -, -, -\}$. Teniendo en cuenta la ley de transformación tensorial, esto nos determina directamente la relación entre el tensor métrico en las coordenadas generalizadas convencionales, $\{\mu, \nu, \tau \dots\}$ y las componentes del “vierbein”:

$$g_{\mu\nu}(x) = e_\mu^\alpha(x)e_\nu^\beta(x)\eta_{\alpha\beta} \quad (4.12)$$

expresión ésta última que da origen a la definición operativa del “vierbein” como la “raíz cuadrada de la métrica”. Es importante observar, asimismo, que en el sistema de coordenadas no holónomas los símbolos de Christoffel se anularán localmente, así como el tensor de Riemann. Si escribimos este último de la forma $R_{\mu\nu\lambda}^\chi = e_\alpha^\chi(\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu)e_\lambda^\alpha$ obtenemos automáticamente una condición de integrabilidad para el “vierbein” dada por $(\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu)e_\lambda^\alpha = 0$. Por tanto, en el sistema de coordenadas no holónomas, la derivadas

covariantes de los campos vectoriales, $\{v^\beta, v_\beta\}$ se escribieran de acuerdo a:

$$\begin{aligned} D_\alpha v_\beta &= \partial_\alpha v_\beta - \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma v_\gamma \\ D_\alpha v^\beta &= \partial_\alpha v^\beta + \tilde{\Gamma}_{\alpha\gamma}^\beta v^\gamma \end{aligned} \quad (4.13)$$

donde $\tilde{\Gamma}_{\alpha\gamma}^\beta$ se construye usando la relación entre coordenadas canónicas y coordenadas no holónomas:

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma = e_a^\gamma \partial_\alpha e_\beta^a = -e_\beta^a \partial_\alpha e_a^\gamma \quad (4.14)$$

y recibe el nombre de conexión de espinor. Nuestro siguiente paso es expresarla en función del vierbein y de la tetrada que relaciona coordenadas canónicas y curvilíneas generalizadas:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma &= e_a^\gamma \partial_\alpha e_\beta^a = e_a^\lambda e_\lambda^\gamma e_\alpha^\mu \partial_\mu (e_\beta^a e_\nu^a) = \\ &= e_\lambda^\gamma e_\alpha^\mu e_\beta^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + e_\lambda^\gamma e_\alpha^\mu \partial_\mu e_\beta^\lambda = \\ &= e_\lambda^\gamma e_\alpha^\mu e_\beta^\nu (\Gamma_{\mu\nu}^\lambda + e_\nu^\delta \partial_\mu e_\delta^\lambda) = \\ &= e_\lambda^\gamma e_\alpha^\mu e_\beta^\nu (\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^{(h)\lambda}) \end{aligned} \quad (4.15)$$

con $\Gamma_{\mu\nu}^{(h)\lambda} = e_\delta^\lambda \partial_\mu e_\nu^\delta$ la conexión construida mediante la combinación de coordenadas no holónomas y curvilíneas, de la misma manera que $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ se construye a partir de la relación entre las coordenadas canónicas y las curvilíneas. Ahora bien, si recordamos que las coordenadas no holónomas comparten con el set canónico el hecho de reducir (localmente) la métrica a su forma minkowskiana, de aquí se sigue que la parte métrica de la conexión, (esto es, los símbolos de Christoffel) van a ser los mismos para los dos objetos, $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ y $\Gamma_{\mu\nu}^{(h)\lambda}$ de forma que a la conexión de espinor sólo nos van a contribuir las partes no métricas (esto es, relacionadas con la torsión), de las dos conexiones que la conforman:

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma = e_\lambda^\gamma e_\alpha^\mu e_\beta^\nu (K_{\mu\nu}^\lambda - K_{\mu\nu}^{(h)\lambda}) \quad (4.16)$$

con $K_{\mu\nu}^\lambda$ y $K_{\mu\nu}^{(h)\lambda}$ los correspondientes tensores de contorsión definidos en (3.14). De la definición (3.8) del tensor de torsión encontramos inmediatamente que es antisimétrico en los dos primeros índices:

$$S_{\mu\nu\chi} = S_{\mu\nu}^\lambda g_{\lambda\chi} = -S_{\nu\mu}^\lambda g_{\lambda\chi} = -S_{\nu\mu\chi} \quad (4.17)$$

lo que implica a su vez que el tensor de contorsión $K_{\mu\nu\lambda}$ definido en (3.14) lo es en los dos últimos:

$$\begin{aligned}
K_{\mu\nu\lambda} &= S_{\mu\nu\lambda} - S_{\nu\lambda\mu} + S_{\lambda\mu\nu} = \\
&= -S_{\nu\mu\lambda} + S_{\lambda\nu\mu} - S_{\mu\lambda\nu} = \\
&= -(S_{\nu\mu\lambda} - S_{\lambda\nu\mu} + S_{\mu\lambda\nu}) = -K_{\mu\lambda\nu}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

usando esta propiedad del tensor de contorsión es inmediato comprobar que la forma $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma}$ va a ser antisimétrica, asimismo, en los dos últimos índices:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma} &= e_{\gamma\lambda} e_{\alpha}^{\mu} e_{\beta}^{\nu} (K_{\mu\nu}^{\lambda} - K_{\mu\nu}^{(h)\lambda}) = \\
&= e_{\gamma}^{\lambda} e_{\alpha}^{\mu} e_{\beta}^{\nu} (K_{\mu\nu\lambda} - K_{\mu\nu\lambda}^{(h)}) = \\
&= -e_{\gamma}^{\lambda} e_{\alpha}^{\mu} e_{\beta}^{\nu} (K_{\mu\lambda\nu} - K_{\mu\lambda\nu}^{(h)}) = \\
&= -e_{\gamma}^{\nu} e_{\alpha}^{\mu} e_{\beta}^{\lambda} (K_{\mu\nu\lambda} - K_{\mu\nu\lambda}^{(h)}) = \\
&= -e_{\gamma}^{\nu} e_{\alpha}^{\mu} e_{\beta\lambda} (K_{\mu\nu}^{\lambda} - K_{\mu\nu}^{(h)\lambda}) = -\tilde{\Gamma}_{\alpha\gamma\beta}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

resultado importante, ya que como veremos a continuación, la conexión de espinor se acoplará al conmutador de las gammas de Dirac en la estructura de la derivada covariante que actúa sobre la función de onda del fermión. Cualquier teoría susceptible de ser formulada en términos invariantes puede ser reexpresada en términos de las coordenadas no holónomas, de acuerdo con el principio de equivalencia. Esta formulación será la misma que en un espacio-tiempo plano, con la única salvedad de que las derivadas convencionales deben ser sustituidas por sus contrapartidas covariantes definidas en (4.13). Sin embargo, los puntos del espacio-tiempo deben de parametrizarse en términos de las coordenadas generalizadas, $\{x^{\mu}\}$. Sólo las derivadas pueden computarse en el espacio no-holónimo [219]. consideremos entonces una acción de materia del tipo:

$$S_M = \int d^4x \sqrt{-g} D_{\alpha}{}^{\nu\beta}(x^{\mu}) D^{\alpha}{}_{\nu\beta}(x^{\mu}) \tag{4.20}$$

puede demostrarse [219, 64] que bajo una transformación de Lorentz definida sobre el espacio de coordenadas no holónomas:

$$x'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\beta} x^{\beta} = [\delta^{\alpha}_{\beta} + \bar{\omega}^{\alpha}_{\beta}(x)] x^{\beta} \tag{4.21}$$

con $\bar{\omega}^{\alpha\beta}(x) = -\bar{\omega}^{\beta\alpha}(x)$ y $\delta_L dx^{\alpha} = \bar{\omega}^{\alpha}_{\beta}(x) dx^{\beta}$, dicha acción es invariante Lorentz siempre que pidamos a los índices no holónomos que transformen vectores y derivadas covariantes

de acuerdo con:

$$\begin{aligned}\delta_L v_\alpha(x) &= \bar{\omega}_\alpha^\beta v_\beta(x) \\ \delta_L D_\alpha v_\beta(x) &= \bar{\omega}_\alpha^\gamma D_\gamma v_\beta(x) + \bar{\omega}_\beta^\gamma D_\alpha v_\gamma(x)\end{aligned}\quad (4.22)$$

supongamos entonces nuestro sistema localmente inercial (ascensor en caída libre, en el lenguaje einsteiniano del principio de equivalencia): en este sistema de referencia sabemos que un espinor se transforma Lorentz de acuerdo a [65]:

$$\delta_L \Psi(x) = \Psi'(x') - \Psi(x) = -\frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \bar{\omega}^{\alpha\beta} \Psi(x) \quad (4.23)$$

con $\sigma_{\alpha\beta} = \frac{i}{2} [\gamma_\alpha, \gamma_\beta]$. Para el caso $S = \frac{1}{2}$, usando (4.22) y (4.23) y esperando de la derivada covariante que en su actuación sobre el espinor de Dirac acople la conexión de espinor (4.14) al conmutador de las gammas, de la forma:

$$D_\alpha \Psi(x) = \partial_\alpha \Psi(x) + \frac{i}{4} \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma \sigma_\gamma^\beta \Psi(x) \quad (4.24)$$

puede demostrarse que una acción de materia construida a partir de espinores fermiónicos del tipo (4.20) es automáticamente invariante Lorentz [219, 182, 64] y por tanto nuestra ecuación de Dirac en un espacio-tiempo curvo se deriva directamente de dicha acción simplemente considerando la ecuación de Euler-Lagrange asociada al campo $\bar{\Psi}(x)$. La expresión (4.24) no es todavía lo suficientemente operativa y además, como hemos indicado antes, está escrita en la signatura $\{+, -, -, -\}$ y es conveniente tener a mano su contrapartida ante el cambio de signatura: veamos brevemente como resolver estas cuestiones: primero de todo, denotando como D_α al operador diferencial que haremos actuar sobre los espinores esto es $D_\alpha \equiv \partial_\alpha + \frac{i}{4} \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma \sigma_\gamma^\beta$ nos va a interesar expresarlo en términos de funciones fácilmente identificables y calculables en nuestros problemas concretos. Estas funciones van a ser la conexión en coordenadas curvilíneas $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ y el “vierbein”, inmediato de calcular a partir de la métrica. Veamos como hacerlo. En primer lugar hemos de darnos cuenta de que D_α siempre puede reescribirse como:

$$D_\alpha = e_\alpha^\mu (\partial_\mu + \frac{i}{4} \tilde{\Gamma}_{\mu\beta}^\gamma \sigma_\gamma^\beta) \quad (4.25)$$

con $\tilde{\Gamma}_{\mu\beta}^\gamma = e_\mu^\delta \tilde{\Gamma}_{\delta\beta}^\gamma$. Ahora bien, a partir de (4.16) es fácil comprobar que la anterior estructura mixta en la conexión puede escribirse como:

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\beta}^\gamma = e_\nu^\gamma D_\mu^\Gamma(e_\beta^\nu) = e_\nu^\gamma (\partial_\mu e_\beta^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu e_\beta^\rho) \quad (4.26)$$

con lo que podemos escribir la actuación sobre el espinor como:

$$\begin{aligned}
& \left[i\gamma^\alpha e_\alpha^\mu \left\{ \partial_\mu - \frac{1}{8} e_\nu^\gamma (\partial_\mu e_\beta^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu e_\beta^\rho) [\gamma^\beta, \gamma_\gamma] \right\} - m \right] \Psi(x) = \\
& = \left[i\gamma^\alpha e_\alpha^\mu \left\{ \partial_\mu + \frac{1}{8} e_\beta^\nu (\partial_\mu e_{\gamma\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\rho e_{\gamma\rho}) [\gamma^\beta, \gamma^\gamma] \right\} - m \right] \Psi(x) = \\
& = i\gamma^\mu \left[\partial_\mu + \frac{1}{8} e_\beta^\nu (\nabla_\mu e_{\gamma\nu}) [\gamma^\beta, \gamma^\gamma] - m \right] \Psi(x) = \\
& = (i\gamma^\mu D_\mu - m) [\Psi(x)] \tag{4.27}
\end{aligned}$$

expresión que nos permite introducir una derivación totalmente covariante Lorentz en el espacio-tiempo curvo y que además ya está expresada en términos de la coordenadas curvilíneas habituales $\{x^\mu\}$. La única referencia a las coordenadas no holónomas queda encapsulada en el “vierbein” e_α^μ fácilmente calculable “on shell” una vez conocida la forma de la métrica $g_{\mu\nu}$. Consideremos ahora el cambio a la signatura $\{-, +, +, +\}$: en ese caso, tendremos los cambios en las matrices de Dirac y conmutadores dados por $\hat{\gamma}^\mu \equiv i\gamma^\mu$; $[\hat{\gamma}^\beta, \hat{\gamma}^\gamma] = -[\gamma^\beta, \gamma^\gamma]$. Además la derivada covariante del “vierbein” cambia de acuerdo a $e_\beta^\nu (\nabla_\mu e_{\gamma\nu}) = e_\beta^\nu (\nabla_\mu \eta_{\gamma\delta} e_\nu^\delta) = -e_\beta^\nu (\nabla_\mu \hat{\eta}_{\gamma\delta} e_\nu^\delta) = -\hat{e}_\beta^\nu (\nabla_\mu \hat{e}_{\gamma\nu})$. Si añadimos la contribución electromagnética, (4.9) podremos construir la ecuación de Dirac como:

$$\begin{aligned}
0 & = (\hat{\gamma}^\mu (D_\mu - iqA_\mu) - m) [\Psi(x)] = \\
& = \left[\hat{\gamma}^\mu (\partial_\mu + \frac{1}{8} \hat{e}_\beta^\nu (\partial_\mu \hat{e}_{\gamma\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \hat{e}_{\gamma\rho}) [\hat{\gamma}^\beta, \hat{\gamma}^\gamma] - iqA_\mu) - m \right] \Psi(x) \tag{4.28}
\end{aligned}$$

que será la forma habitual de la ecuación de Dirac que utilizaremos en las próximas secciones de nuestro trabajo.

Consideremos ahora la relación entre espín y gravedad desde otro punto de vista: no sólo la gravedad influye sobre las fermiones individuales determinando su función de onda cuántica de acuerdo a (4.9), sino que un lagrangiano de materia conformado por fermiones puede, localmente, dotar de estructura torsional al espacio-tiempo [182]. Veámoslo considerando de nuevo la acción total, formada por una densidad de materia dotada de espín por una parte, y por el término de gravedad, por otro. De acuerdo con (4.11) la acción total del

sistema se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
S_T &= S_G(K_{\mu\nu}^\lambda, g_{\mu\nu}) + S_m = \\
&= \int d^4x \sqrt{-g} L_G(K_{\mu\nu}^\lambda, g_{\mu\nu}) + S_m = \\
&= \int d^4x \sqrt{-g} L_G(K_{\mu\nu}^\lambda, g_{\mu\nu}) + \frac{1}{2} \int \sqrt{-g} d^4x \bar{\Psi}(x) (\hat{\gamma}^\alpha(x) D_\alpha - m) \Psi(x) + \\
&+ \text{H.C.}
\end{aligned} \tag{4.29}$$

donde consideramos que el lagrangiano de la gravedad no depende sólo de la métrica física, sino también del tensor de contorsión. Es decir: nuestro espacio-tiempo va más allá de la geometría riemanniana y debe ser descrito mediante la propuesta de Cartan. Tomando variaciones de la acción respecto de los campos fermiónicos encontramos, como ya hemos comentado, la ecuación de Dirac (4.28). Consideremos ahora las variaciones de la acción total respecto del tensor de contorsión, que formalmente podemos escribir definiendo la densidad de corriente de espín [219] $\Pi_\mu^{\nu\lambda}$ como $\frac{\delta S_G(K_{\mu\nu}^\lambda, g_{\mu\nu})}{\delta K_{\mu\nu}^\lambda} \equiv -\frac{1}{2} \sqrt{-g} \Pi_\lambda^{\nu\mu}$. Usando (4.16), (4.24) y (4.29) tendremos:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S_G(K_{\mu\nu}^\lambda, g_{\mu\nu})}{\delta K_{\mu\nu}^\lambda} &\equiv -\frac{1}{2} \sqrt{-g} \Pi_\lambda^{\nu\mu} = \\
&= -\frac{\delta S_M}{\delta K_{\mu\nu}^\lambda} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} \bar{\Psi}(x) \hat{\gamma}^\alpha \frac{i}{4} e_\lambda^\gamma e_\alpha^\mu e_\beta^\nu \sigma_\gamma^\beta
\end{aligned} \tag{4.30}$$

resultado que nos dice que las matrices σ_γ^β generan torsión. Esto es: en ausencia de espín, ($\sigma_\gamma^\beta = 0$) la conexión podrá describirse en términos de una conexión puramente riemanniana.

4.2 El grafeno

En los últimos años la posibilidad de fabricar en el laboratorio láminas de grafito cuyo espesor es prácticamente el de un único átomo ha supuesto una revolución tanto en el campo de la materia condensada [94, 274, 378] como en el de las soluciones de la RG en un espacio de $(2+1)$ dimensiones [109, 209, 309], pues el grafeno es un excelente laboratorio en el que poner a prueba predicciones de la teoría cuántica de campos que se sitúan en el régimen de altas energías [196]. Bajo las condiciones experimentales más habituales la interacción en el grafeno se sitúa en el régimen fuerte [161] con constantes de acoplamiento efectivas cercanas a la unidad, lo que permite testear efectos como el apantallamiento hiper-crítico de impurezas con carga eléctrica [144, 335, 300, 345] o resultados sugeridos por la renormalización en el

marco de teorías a muchos cuerpos [160, 156, 111]. Esto es debido a la particular estructura del grafeno, así como a las peculiares características de sus bandas de energía en la que se alternan bandas de conducción y valencia [321, 161].

En esta sección, en primer lugar vamos a estudiar las principales características del grafeno, incluyendo su estructura física y propiedades electrónicas. La particular distribución de los átomos de carbono en la red cristalina va a implicar que el sistema puede ser descrito mediante un sistema de dos espinores de Dirac en el marco de un hamiltoniano en el que las interacciones se limitan a los átomos de la vecindad inmediata [321, 159], lo que nos permitirá deducir una expresión analítica para los niveles de energía en el grafeno libre. La presencia de defectos, (estructuras no hexagonales) en las láminas de grafeno va a generar curvatura, lo que permite plegar el grafeno en variedades 2-dimensionales, en concordancia con lo expuesto en el capítulo anterior. Además, los defectos topológicos van a afectar necesariamente a la distribución electrónica: este efecto puede modelizarse mediante la introducción de flujos ficticios de carácter no abeliano [161, 160, 339, 154], que alteran las propiedades electrónicas del material. En este sentido, citaremos distintas alternativas disponibles para calcular la densidad local de estados (LDOS) [339, 114, 338], ya que estamos interesados en comparar dichas densidades con las que podríamos encontrar en contextos físicos muy diferentes, por ejemplo, la gravedad de Born-Infeld en un espacio-tiempo de $(2 + 1)$ dimensiones [168, 49].

4.2.1 Hibridación de orbitales en el átomo de carbono

Los materiales y las distintas estructuras moleculares basadas en la química del carbono (como por ejemplo las moléculas orgánicas) presentan una serie de características que las hacen muy especiales [321]: cada átomo de carbono tiene seis electrones, los cuales se distribuyen en los orbitales atómicos $1s^2 2s^2 y 2p^6$. Los cuatro electrones más externos son los llamados electrones de valencia, susceptibles en la fase cristalina de formar enlaces covalentes con otros átomos, dando origen a los distintos compuestos del carbono. La diferencia de energías entre los orbitales $2s$ y los $2p$ no es muy grande en relación a la energía típica de ligadura en el enlace químico, lo que permite rápidos cambios en la ocupación de estos orbitales y la aparición de estados mezcla entre los orbitales $2s$ y $2p$. El proceso de mezcla de un electrón $2s$ con uno, dos o tres electrones $2p$, es lo que se conoce como hibridación sp^n . Así, por ejemplo, la hibridación sp corresponde a la combinación lineal del orbital $2s$ con uno de los tres orbitales $2p$, por ejemplo el $2p_x$. Atendiendo a la geometría de los orbitales $2s$ y $2p$ van a originarse dos funciones de ondas híbridas, de la forma:

Dimension	0-D	1-D	2-D	3-D
isomer	C ₆₀ fullerene	nanotube carbyne	graphite fiber	diamond amorphous
hybridization	<i>sp</i> ²	<i>sp</i> ² (<i>sp</i>)	<i>sp</i> ²	<i>sp</i> ³
density [g/cm ³]	1.72	1.2-2.0 2.68-3.13	2.26 ~ 2	3.515 2-3
Bond Length [Å]	1.40(C=C) 1.46(C-C)	1.44(C=C)	1.42(C=C) 1.44(C=C)	1.54(C-C)
electronic properties	semiconductor <i>E_g</i> = 1.9eV	metal or semiconductor	semimetal	insulating <i>E_g</i> = 5.47eV

Fig. 4.1 Isómeros del carbono [321].

$$\begin{aligned}
 |sp_a\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|2s\rangle + |2p_x\rangle) \\
 |sp_b\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|2s\rangle - |2p_x\rangle)
 \end{aligned}
 \tag{4.31}$$

la función $|sp_a\rangle$ ($|sp_b\rangle$) optimiza la probabilidad de presencia del electrón en el sentido positivo (negativo) del eje X con respecto a los orbitales $2p$ originales, de tal forma que en una distribución atómica a lo largo de dicha dirección se establece un enlace covalente de mayor energía de ligadura que el que se generaría si se emplearan los orbitales originales. Un proceso similar, pero involucrando a los orbitales $2p_y$ y $2p_z$ va a generar enlaces en las otras direcciones espaciales. Un ejemplo de hibridación sp lo encontramos en la molécula de acetileno ($HC \equiv CH$): el orbital híbrido $|sp_a\rangle$ de un carbono forma un enlace covalente con el orbital $|sp_b\rangle$ del carbono vecino, lo que se conoce como enlace de tipo σ mientras que los orbitales $2p_y$ y $2p_z$ forman enlaces interatómicos que como ya hemos comentado, son más débiles, son los llamados enlaces π , perpendiculares al enlace σ . De esa forma, un enlace “sigma” y dos enlaces “pi” conforman el triple enlace entre carbonos. La hibridación sp^2 va a darse entre el orbital $2s$ y dos de los orbitales $2p$, por ejemplo el $2p_x$ y el $2p_y$. Un ejemplo lo tenemos en la molécula de poliacetileno, $(HC = CH-)_n$, en la que los átomos de carbono forman una cadena en “zig-zag” caracterizada por un ángulo de 120 grados. Todos los enlaces σ se sitúan en el plano X-Y y además, un orbital tipo π por cada átomo de carbono se establece perpendicularmente a este plano. De acuerdo a la geometría de la molécula, un cálculo directo nos lleva a que los orbitales σ pueden escribirse como [321]:

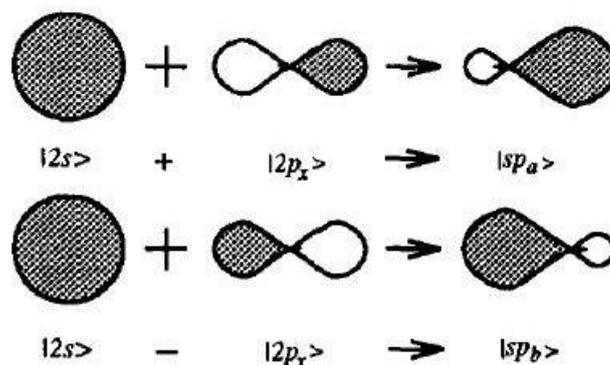


Fig. 4.2 Hibridación sp . El área sombreada denota la amplitud de probabilidad de presencia del electrón [321].

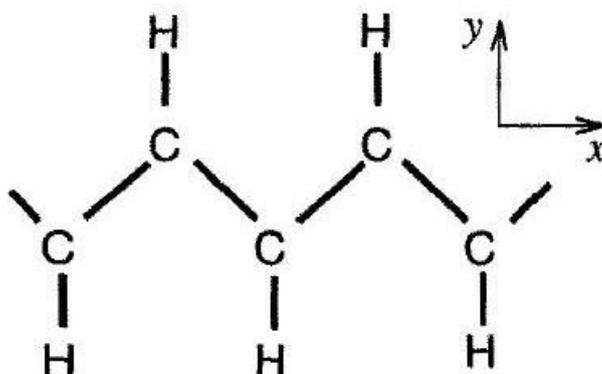


Fig. 4.3 Hibridación sp^2 (poliacetileno): los átomos de carbono forman una cadena en zig-zag caracterizada por un ángulo de 120 grados. Todos los enlaces σ están contenidos en el plano X-Y, y un enlace de tipo π por carbono se establece perpendicularmente a dicho plano [321].

$$\begin{aligned}
 |sp_a^2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}|2s\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|2p_y\rangle \\
 |sp_b^2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}|2s\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}|2p_x\rangle + \frac{1}{2}|2p_y\rangle\right) \\
 |sp_c^2\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{3}}|2s\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}|2p_x\rangle + \frac{1}{2}|2p_y\rangle\right)
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

4.2.2 El grafito y sus derivados. El grafeno

En el proceso de hibridación sp^n se establecen $n + 1$ enlaces σ que van a servir de armazón para la estructura n -dimensional subsiguiente. En el caso del grafito lo que tenemos es una

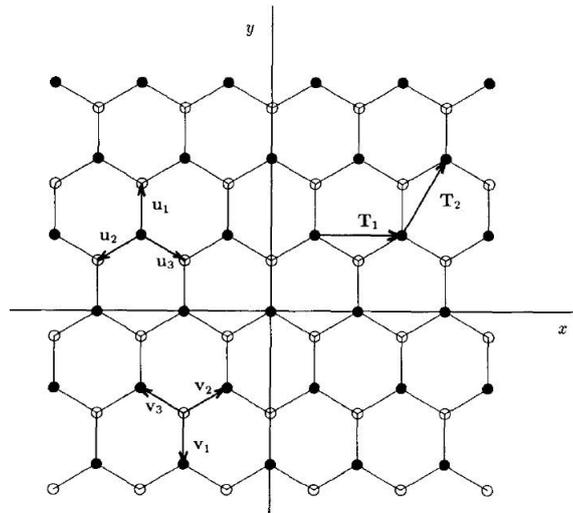


Fig. 4.4 La red hexagonal en el grafeno [159]

estructura tridimensional formada por redes hexagonales de carbono. Cuando disponemos de una única capa de grafito surge una estructura bidimensional que es lo que se conoce como grafeno [94]. También estructuras localmente planas como puede ser el caso de los fullerenos [159, 155], o los nanotubos de carbono [321, 154] responden a un proceso de hibridación sp^2 . Consideremos pues la estructura en dos dimensiones del grafeno, que puede verse como una red hexagonal formada a su vez por dos subredes triangulares compenetradas, de forma que tengamos una base de dos átomos por celda unidad. La existencia de dos subredes bien diferenciadas en la estructura del grafeno puede entenderse bien a partir de la figura (4.4) en la que apreciamos que, dependiendo de la orientación relativa de los enlaces σ , existen dos clases de átomos en la red, llamémosles “blancos” y “negros”, de forma que cada átomo “negro” enlaza con tres “blancos” y viceversa. De esa forma, podemos describir la estructura mediante los dos vectores de red $\{T_1, T_2\}$ dados por [159]:

$$\begin{aligned} T_1 &= a\sqrt{3}e_x \\ T_2 &= \frac{a}{2}(\sqrt{3}e_x + 3e_y) \end{aligned} \quad (4.33)$$

siendo a la distancia entre átomos de carbono, aproximadamente $1,42 \text{ \AA}$. Como ya hemos comentado, en la estructura del grafeno cada átomo de carbono tiene tres enlaces de tipo σ con sus vecinos inmediatos, quedando un electrón por átomo compartido con menor energía de ligadura mediante un enlace de tipo π , de forma que estos electrones pueden circular con mayor facilidad por la red y van a ser los responsables del carácter semimetálico del grafeno.

De esta forma, para calcular la banda de niveles de energía se consideran las siguientes aproximaciones [159]:

1. La principal contribución al hamiltoniano del sistema va a proceder de los electrones compartidos mediante el enlace de tipo π .
2. Centrados en el comportamiento de estos electrones, vamos a suponer que el hamiltoniano tiene su origen en el intercambio de estos electrones entre vecinos inmediatos (“tight-binding method”, TBM).

El cálculo de los niveles de energía puede realizarse analíticamente mediante principios variacionales [321]. En lugar de utilizar este formalismo variacional, examinemos detenidamente la forma del hamiltoniano propuesto y cual va a ser su actuación sobre las funciones de onda de los electrones en el grafeno para proceder después a su diagonalización [159]. De acuerdo a lo anterior, tendremos que el hamiltoniano va a ser de la forma $H = \gamma \sum a_i^+ a_j$ con la suma extendiéndose a los pares de átomos vecinos, (para cada átomo “ i ” en la red, sumamos sobre sus tres vecinos inmediatos), siendo $\gamma \simeq 2.8 \text{ eV}$ la energía necesaria para que el electrón π salte de un átomo a otro en la red, y a_i^+ (a_j) operadores de creación, (destrucción) de electrones en la posición i (j) de la red del grafeno, satisfaciendo las conocidas relaciones de anticonmutación:

$$\begin{aligned} \{a_i, a_j\} &= \{a_i, a_j^+\} = 0 \\ \{a_i, a_j^+\} &= \delta_{ij} \end{aligned} \quad (4.34)$$

por otra parte, a partir del teorema de Bloch [322] la función de onda del electrón π en la red puede escribirse como una combinación de ondas planas [159]:

$$|\psi\rangle = \sum_{i_1} C_1 \exp(ipr_{i_1}) a_{i_1}^+ |0\rangle + \sum_{i_2} C_2 \exp(ipr_{i_2}) a_{i_2}^+ |0\rangle \quad (4.35)$$

siendo p el momento líneal del electrón, y r_i el vector de posición del átomo en la posición “ i ” de la red. Conviene destacar que la función de onda recibe dos contribuciones diferenciadas según las dos subredes que forman la estructura, en ese sentido los coeficientes característicos de cada subred, C_1 y C_2 van a ser en principio diferentes. A partir de aquí, un cálculo directo nos da la actuación del hamiltoniano sobre la función de onda :

$$\begin{aligned}
H|\psi\rangle &= \gamma \sum_{\langle i,j \rangle} \exp(ipu_j) \sum_{i_1} C_2 \exp(ipr_{i_1}) a_{i_1}^+ |0\rangle + \\
&+ \gamma \sum_{\langle i,j \rangle} \exp(ipv_j) \sum_{i_2} C_1 \exp(ipr_{i_2}) a_{i_2}^+ |0\rangle
\end{aligned} \tag{4.36}$$

donde el sumatorio en j se extiende sobre las triadas de vectores $\{u_j, v_j\}$ que conectan cada átomo en la red con sus vecinos inmediatos, y que vienen dados por:

$$\begin{aligned}
u_1 &= ae_y \\
u_2 &= -a \frac{\sqrt{3}}{2} e_x - \frac{a}{2} e_y \\
u_3 &= a \frac{\sqrt{3}}{2} e_x - \frac{a}{2} e_y \\
v_k &= -u_k
\end{aligned} \tag{4.37}$$

La expresión anterior puede representarse matricialmente como:

$$\begin{pmatrix} 0 & \gamma \sum_j \exp(ipu_j) \\ \gamma \sum_j \exp(ipv_j) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \text{Ep} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \tag{4.38}$$

a partir de este resultado y utilizando (4.37) la diagonalización del hamiltoniano es inmediata y nos da la expresión buscada para las bandas de energía:

$$\text{Ep} = \pm \gamma \sqrt{1 + 4 \cos^2 \left(a \frac{\sqrt{3}}{2} p_x \right) + 4 \cos \left(a \frac{\sqrt{3}}{2} p_x \right) \cos \left(a \frac{3}{2} p_y \right)} \tag{4.39}$$

como ya hemos comentado, cada posición de la red aporta un electrón al mar de Fermi, y cada nivel de la banda va a corresponderse con dos estados posibles debido a la degeneración de espín. Las soluciones con $\gamma = \pm 1$ conforman los llamados conos de Dirac, que físicamente se corresponden con las bandas de conducción (π^*) y valencia (π) del grafeno [94]. Las raíces de la anterior expresión nos van a proporcionar los llamados puntos de Fermi, que se distribuyen en los vértices del hexágono que caracteriza la llamada primera zona de Brillouin [94, 159]:

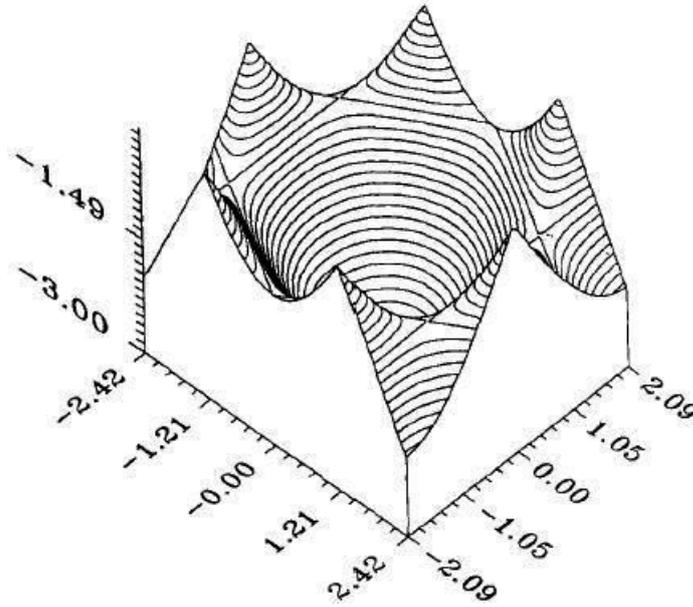


Fig. 4.5 Representación energía-momento de la relación de dispersión (4.39) con $\gamma = -1$ [159].

$$\begin{aligned}
 p_x &= \pm \frac{4\pi}{3a\sqrt{3}} & p_y &= 0 \\
 p_x &= \pm \frac{2\pi}{3a\sqrt{3}} & p_y &= \pm \frac{2\pi}{3a}
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

La red recíproca en el espacio de momentos va a estar generada por los vectores K_1 y K_2 dados por:

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \frac{2\pi}{a\sqrt{3}}e_x - \frac{2\pi}{3a}e_y \\
 K_2 &= \frac{4\pi}{3a}e_y
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

cumpléndose las relaciones de ortogonalidad, $T_i K_j = \delta_{ij}$ [105]. Todos los resultados expuestos hasta aquí se ajustan a la naturaleza discreta del problema, pero estamos interesados en pasar al límite continuo para ver la dinámica que aparece en dicho límite cerca de los puntos de Fermi. Buscamos con ello un hamiltoniano efectivo que nos permita tratar las fluctuaciones energéticas cerca de dichos puntos. Para ello vamos a desarrollar el anterior operador matricial mediante la sustitución $p \rightarrow p + \delta p$. Un cálculo directo nos lleva a :

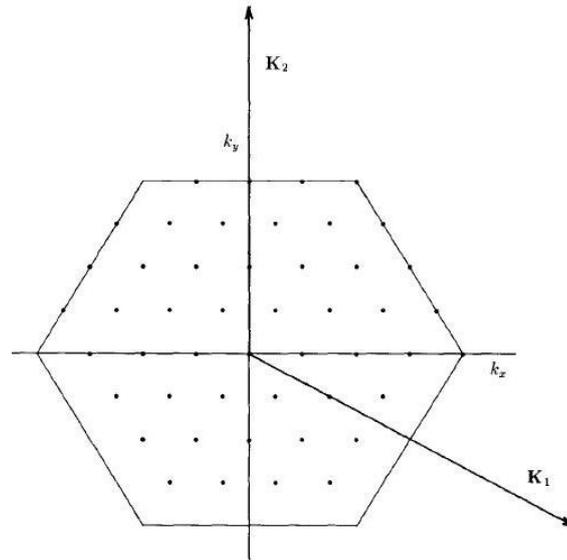


Fig. 4.6 Primera zona de Brillouin para la red del grafeno. Los puntos de las esquinas del hexágono corresponden a los puntos de Fermi, para los que se tiene $E_k = 0$ [159]

$$\begin{aligned}
 H_{12} &= \sum_j \exp(ipu_j) = (1 + ia\delta p_y)e^{iap_y} + \\
 &+ e^{-i\frac{a}{2}p_y} \left[2 \left(1 - i\frac{a}{2}\delta p_y \right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2}ap_x - a\sqrt{3}\delta p_x \sin \frac{\sqrt{3}}{2}ap_x \right] + \\
 &+ O[a\delta p^2] = H_{21}^* \tag{4.42}
 \end{aligned}$$

al sustituir en la anterior expresión los valores de los seis puntos de Fermi anteriores encontramos dos resultados físicamente muy relevantes:

1. Los puntos correspondientes a vértices del hexágono separados 120 grados siguen hamiltonianos equivalentes y por tanto van a corresponder a estados físicos equivalentes. Es decir sólo dos puntos de Fermi, (en adelante K y K') van a ser independientes.
2. El hamiltoniano efectivo va a ser en uno de los casos, proporcional a $\sigma \cdot \delta p$, y en el otro, a $\sigma^T \cdot \delta p$ siendo $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y)$ las matrices de Pauli. Es decir, en las cercanías de los puntos de Fermi los electrones van a seguir la ecuación de Dirac en un espacio de dos dimensiones y además el paso de un punto a otro va a suponer el intercambio en los valores de las amplitudes correspondientes a cada una de las subredes.

Este es un resultado muy importante: la particular geometría del grafeno implica que el comportamiento de los electrones π en la red va a obedecer a la ecuación de Dirac y por tanto

los electrones van a ser descritos por espinores de Dirac de dos dimensiones. Este resultado difiere notablemente de otros pasos al continuo habituales en la materia condensada, en los que los electrones pueden ser descritos de manera efectiva mediante ecuaciones de tipo Schrödinger [159].

4.2.3 Variedades 2- dimensionales derivadas del grafeno

Los fullerenos son estructuras moleculares basadas en el carbón que se generan en el proceso de vaporización del grafito [159, 155]. La más representativa (C_{60}) presenta simetría esférica casi perfecta, similar a la de un balón de fútbol y está formada por 12 pentágonos y 20 hexágonos. Cada átomo de carbono se sitúa sobre uno de los vértices de los pentágonos y pertenece a dos de los hexágonos. La estructura resultante puede originarse a partir de un icosaedro en cuyos vértices situamos los puntos centrales de los pentágonos. Podemos pues ver la molécula como una lámina de grafeno en la que en determinadas posiciones las estructuras hexagonales han sido sustituidas por estructuras pentagonales. Esta sustitución permite curvar la estructura plana, originando una variedad esférica. Los fullerenos pueden construirse a partir de una lámina de grafeno en la que se recortan sectores de 60 grados y se hacen coincidir las dos líneas generadas a partir de este corte. Dicho procedimiento genera los anillos pentagonales necesarios para curvar la estructura. La disclinación así introducida en el grafeno va a tener varias consecuencias inmediatas:

1. La característica estructura del grafeno, con dos subredes atómicas bien diferenciadas que se entrelazan, va a dejar de tener sentido a lo largo de las líneas de corte, ya que la disclinación pone en correspondencia átomos pertenecientes a subredes distintas [161].
2. La rotación de 60 grados necesaria para llevar uno de los labios sobre el otro tiene también consecuencias en el espacio de momentos: momentos cercanos al punto de Fermi K son mapeados automáticamente a las cercanías del otro punto de Fermi independiente K' . La transformación en el espacio de momentos tiene su reflejo en el espacio de las funciones de onda del electrón, de manera que el paso por la línea de separación supone el intercambio en los conos de Dirac. Como veíamos en el apartado anterior, el cambio $K \leftrightarrow K'$ conlleva también el intercambio en las amplitudes de onda entre subredes, lo que es consecuente con lo observado en el punto anterior.

Dicho intercambio en la función de onda puede escribirse matricialmente como:

$$\begin{pmatrix} \psi'_k \\ \psi'_{k'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_k \\ \psi_{k'} \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

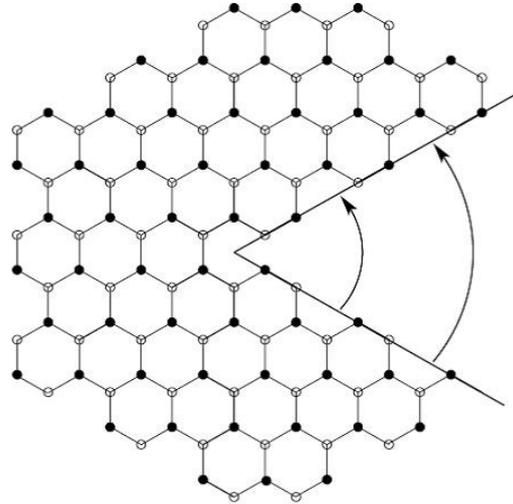


Fig. 4.7 Construcción de un anillo pentagonal en la red del grafeno [161]

todos estos efectos pueden modelizarse mediante la introducción de un campo gauge $SU(2)$ actuando sobre las funciones de onda del electrón en su movimiento alrededor del defecto topológico [159]. En la misma línea, podemos asociar un flujo ficticio originado por un determinado potencial vector A al defecto topológico en la red. La simetría del problema nos lleva a que, en coordenadas polares, el potencial vector tenga únicamente componente según U_θ de forma que cuando el electrón completa un giro alrededor del defecto (pasa de una hoja a la otra a lo largo del corte de la disclinación), se produce el intercambio en la función de onda. Es decir se va a cumplir:

$$e^{i\oint d\theta A_\theta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

podemos construir este campo gauge en términos de las matrices de Pauli y de un parámetro $\Phi = \frac{\pi}{2}$, de forma que se tendrá $A_\theta = \frac{\Phi}{2\pi} \sigma_y$.

4.2.4 Nanotubos y agujeros de gusano

Una lámina de grafeno puede curvarse en forma de prisma hexagonal en lo que se conoce como nanotubo [161, 154]. Es posible asimismo conectar los extremos de un nanotubo a dos láminas planas de grafeno, formando una estructura de tipo agujero de gusano. Para ello es necesario introducir ciertos defectos topológicos en la red hexagonal que forma la lámina de grafeno. Dichos estructura alterada se consigue mediante la adición de seis anillos heptagonales de carbono. Estos seis anillos heptagonales proporcionan pues la conexión entre

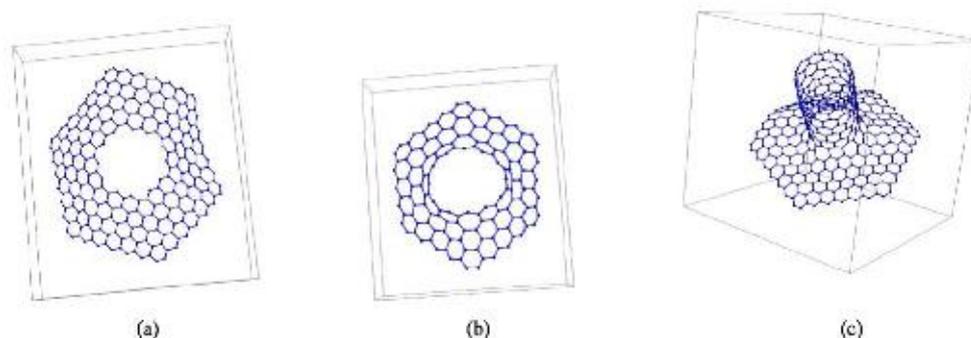


Fig. 4.8 Construcción de la junta entre el nanotubo y la lámina de grafeno [161]

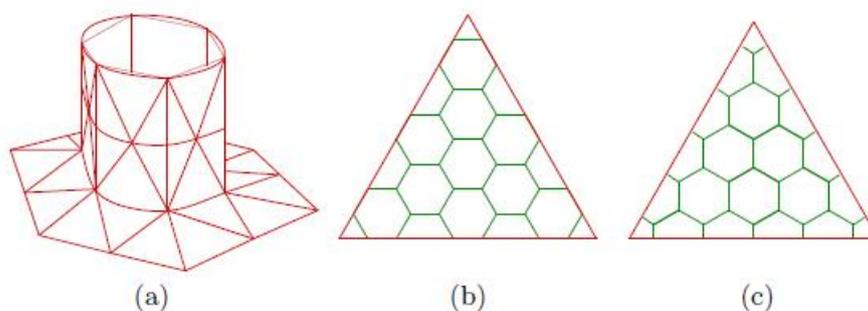


Fig. 4.9 Nanotubo conectado a una lámina de grafeno. El prisma hexagonal que constituye el nanotubo está constituido por triángulos elementales. Dependiendo de la orientación de las estructuras hexagonales en el interior del triángulo elemental podemos tener nanotubos tipo “armchair” (b) o de tipo “Zig-Zag”(c) [154].

el grafeno plano y la estructura en forma de prisma hexagonal que constituye el nanotubo. La construcción de la junta entre el nanotubo y el grafeno plano se ilustra en la figura 4.8. En primer lugar se recorta un sector hexagonal en la lámina de grafeno, lo que induce un patrón de “zig-zag” en los átomos del grafeno cercanos al corte. A continuación se introducen los seis anillos heptagonales aprovechando el anterior patrón. El procedimiento puede adaptarse para empalmar nanotubos de distintos radios: siempre vamos a tener seis anillos heptagonales que se van a intercalar con un número variable de anillos hexagonales, múltiplo de seis [161]. En la notación habitual para caracterizar a los nanotubos [321] hablamos de estructuras de tipo $(6n, 0)$.

La estructura de agujero de gusano consiste en dos láminas de grafeno planas conectadas por un nanotubo cuya longitud es despreciable frente a su radio R . En coordenadas polares necesitaremos en principio dos cartas independientes: $\{r_-, \theta_-\}$ y $\{r_+, \theta_+\}$ para describir la variedad, con la ligadura dada por $\{r_-, r_+\} \geq R$, pero también es posible describir los

planos superior e inferior con una única carta, mediante el cambio de variables $r_- = \frac{R^2}{r_+}$, $r_+ \geq R$ [161] de forma que la variable radial extiende su dominio por debajo de R para poder describir simultáneamente ambos planos. Este cambio de variables va a tener consecuencias en el elemento de longitud, y por tanto, en la métrica asociada a la variedad. El elemento de línea vendrá dado por :

$$ds^2 = \begin{cases} dr_-^2 + r_-^2 d\theta_-^2 & r_- \geq R \\ \left(\frac{R}{r_-}\right)^4 (dr_-^2 + r_-^2 d\theta_-^2) & r_- \leq R \end{cases} \quad (4.45)$$

prescindiendo de los subíndices en las coordenadas polares, pues ya no son necesarios, podemos escribir la métrica como $g_{\mu\nu} = \Omega^2(r) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$. El factor $\Omega^2(r)$ va a dar cuenta de la unión entre las dos partes de la métrica, que será continua siempre en la junta entre los planos y el nanotubo:

$$\Omega(r) = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \theta(R-r) + \theta(r-R) \quad (4.46)$$

a partir de la métrica, un cálculo directo [161] permite obtener los símbolos de Christoffel asociados, y finalmente calcular la curvatura escalar, que va a ser nula en cualquier punto de la variedad, excepto en la unión con el nanotubo:

$$\mathcal{R} = -\frac{4}{R} \delta(r-R) \quad (4.47)$$

descripciones más detalladas de las diferentes geometrías de los agujeros de gusano, atendiendo a las peculiares características de los nanotubos son asimismo posibles [304, 230]. Para nuestros propósitos, el anterior paso al continuo es suficiente para ilustrar la correspondencia entre defectos topológicos, (anillos heptagonales) y curvatura. Podemos citar asimismo la expresión obtenida para la característica de Euler:

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \sqrt{\text{Det}(g)} \mathcal{R} = -\frac{1}{4\pi} \int dr d\theta 4\delta(r-R) = -2 \quad (4.48)$$

Consideremos a continuación el paso de la anterior estructura discreta a una teoría continua de campo efectivo caracterizada por un nanotubo cuyo radio es mucho mayor que su longitud. Tal y como hemos comentado en secciones anteriores las propiedades electrónicas en el régimen de bajas energías deben poder describirse mediante una ecuación de tipo Dirac en la geometría curva del agujero de gusano. Además, el caso de los fullerenos ilustra bien el hecho de que la existencia de defectos topológicos en la estructura tiene a su vez consecuencias sobre los fermiones. Dichos efectos pueden, en el paso al continuo, ser modelizados en términos de un campo gauge $SU(2)$, o en el idioma de la electrodinámica clásica, mediante

un flujo ficticio generado por un potencial vector en el entorno del defecto en la red [230, 80]. Acabamos de ver en la sección anterior como escribir en distintos escenarios la ecuación de Dirac en un espacio curvo: en presencia de un campo externo A podemos escribirla de acuerdo con Birrell [64] como:

$$iv_f \sigma^a e_a^\mu (\nabla_\mu \mp iA_\mu) \psi^\pm = \varepsilon \psi^\pm \quad (4.49)$$

siendo $\psi^\pm = \begin{pmatrix} \psi_A^\pm \\ \psi_B^\pm \end{pmatrix}$ espinores de Dirac que dan cuenta de las dos posibles orientaciones (entrante y saliente) del flujo ficticio a través de la superficie del agujero de gusano, $v_f = 1,0 \times 10^6$ m/s la velocidad de Fermi [94] y $e_a^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^a}$ la base de vectores del espacio tangente. Podemos asumir, asimismo, que a grandes distancias del agujero de gusano el flujo va a ser percibido de forma isótropa [161], por lo que en la anterior ecuación se considera el potencial vector con una única componente constante dada por $A_\theta = \frac{\Phi}{2\pi}$. Este flujo tiene su origen, como ya hemos comentado, en la presencia de los defectos topológicos, en este caso de los anillos heptagonales y es el resultado de la combinación de los diferentes defectos. En general no se trata de un flujo abeliano, por lo que el flujo efectivo total no es, necesariamente, la suma de los flujos generados por cada uno de los anillos [161]. En este sentido, clasificaciones muy detalladas de los distintos flujos efectivos en función de las diferentes geometrías de los anillos de carbono han sido llevadas a cabo por diversos autores [339, 230]. Como hemos comentado en secciones anteriores, la derivada covariante viene dada por $\nabla_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu$ y la conexión relacionada con el espín del electrón viene dada por la relación anteriormente estudiada, $\Gamma_\mu = \frac{1}{8} [\sigma^a, \sigma^b] e_a^\nu D_\mu e_{b\nu}$. Utilizando estas expresiones es posible plantear y resolver la ecuación de Dirac en el plano superior e inferior de la variedad conectada por el agujero de gusano [161]:

$r \geq R$:

$$iv_f \begin{pmatrix} 0 & \partial_r - \frac{i}{r} \partial_\theta \mp \frac{\Phi}{2\pi r} + \frac{1}{2r} \\ \partial_r + \frac{i}{r} \partial_\theta \pm \frac{\Phi}{2\pi r} + \frac{1}{2r} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_A^\pm \\ \psi_B^\pm \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \psi_A^\pm \\ \psi_B^\pm \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

$r \leq R$:

$$iv_f \left(\frac{r}{R}\right)^2 \begin{pmatrix} 0 & \partial_r - \frac{i}{r} \partial_\theta \mp \frac{\Phi'}{2\pi r} - \frac{1}{2r} \\ \partial_r + \frac{i}{r} \partial_\theta \pm \frac{\Phi'}{2\pi r} - \frac{1}{2r} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_A^\pm \\ \psi_B^\pm \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \psi_A^\pm \\ \psi_B^\pm \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

en la anterior expresión se considera el cálculo de las funciones de onda lejos de la garganta del agujero de gusano para poder mantener la hipótesis de flujo isótropo, y también la correcta separación de las dos subredes, ya que dicha distinción deja de tener sentido en las

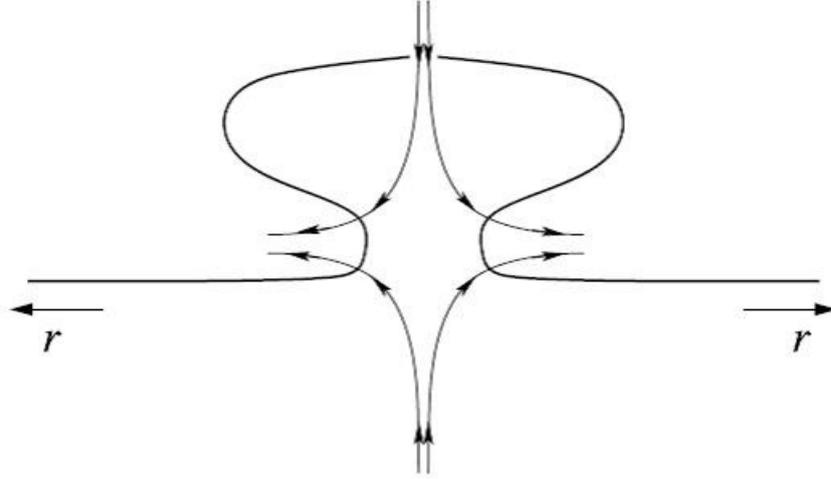


Fig. 4.10 Sección del agujero de gusano. Las líneas orientadas corresponden al flujo gauge ficticio atravesando los anillos heptagonales [161].

cercanías de los defectos topológicos. Una última consideración sobre el flujo es pertinente: las funciones, Φ y Φ' representan valores distintos del flujo actuante sobre los electrones en las regiones exterior e interior al círculo $r = R$. El cambio de variables anteriormente introducido permite describir ambos planos mediante un mismo sistema de coordenadas: la lámina superior está en correspondencia con la región interior del círculo $r = R$ de forma que los electrones en dicho plano sienten a grandes distancias un flujo que va a atravesar el origen en el sistema de coordenadas auxiliar. Si ahora revertimos el cambio de coordenadas $r = \frac{R^2}{r_+}$ y pasamos a escribir (4.50) en función de r_+ la ecuación de Dirac en el exterior del círculo se escribe como:

$$-iv_f \begin{pmatrix} 0 & \partial_{r_+} + \frac{i}{r_+} \partial_\theta \pm \frac{\Phi'}{2\pi r_+} + \frac{1}{2r_+} \\ \partial_{r_+} - \frac{i}{r_+} \partial_\theta \mp \frac{\Phi'}{2\pi r_+} + \frac{1}{2r_+} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_A^\pm \\ \psi_B^\pm \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \psi_A^\pm \\ \psi_B^\pm \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

Ahora bien, en esta ecuación el ángulo θ todavía está referido al sistema de coordenadas $\{r, \theta\} = \{r_-, \theta_-\}$: la relación entre ángulos en ambos sistemas de coordenadas viene dada por $\theta_+ = \pi - \theta_-$ es decir, $\partial_{\theta_+} = -\partial_{\theta_-}$. Mediante este último cambio y comparando con (4.50), tendremos que la covariancia de la ecuación de Dirac implica necesariamente la relación $\Phi = -\Phi'$

En esta extensa revisión de los resultados obtenidos en [161] consideremos por último la caracterización de los estados ligados, (modos de energía cero) en la teoría efectiva que

surge del paso al continuo. Existe una correlación entre el número de estos estados y la forma del flujo en los defectos topológicos: como ya se ha comentado, la construcción de la junta que conecta las dos ramas de la geometría de agujero de gusano supone la presencia de $(6 - n)$ anillos hexagonales, de forma que el parámetro n va a estar en correspondencia directa con el radio del nanotubo. La distancia relativa entre defectos heptagonales va a estar asimismo relacionada con dicho parámetro y en la terminología habitual [321] se expresará como $(6n, 0)$. De acuerdo con la mencionada clasificación, se tiene que únicamente cuando n es un múltiplo de 3 el flujo total debido a los seis anillos heptagonales se corresponde con la suma algebraica de los flujos individuales (es decir, el campo gauge es abeliano) y se tiene un flujo total en cada junta dado por $\Phi_T = 3\pi$ (en este caso los flujos individuales de los heptágonos se corresponden con los valores característicos para los fullerenos). Cuando n no es un múltiplo de 3 el flujo total no es la suma algebraica de los flujos individuales, y se tiene en su lugar una contribución individual de $\frac{\pi}{3}$ para dar un flujo total $\Phi_T = \pi$ en cada una de las juntas. Vamos a discutir por separado ambas geometrías en la resolución de la ecuación de Dirac en el agujero de gusano. Consideremos primero el caso $\Phi_T = 3\pi$ y hagamos $\varepsilon = 0$ en las ecuaciones (4.50) y (4.51). Manteniendo el sistema de coordenadas auxiliares que nos permiten describir la estructura con una sola carta y considerando, por ejemplo, soluciones con $\psi_A^\pm = 0$, tendremos:

$$r \geq R: \quad \left(\partial_r - \frac{i}{r} \partial_\theta \mp \frac{3}{2r} + \frac{1}{2r} \right) \psi_B^\pm = 0 \quad (4.53)$$

$$r \leq R: \quad \left(\partial_r - \partial_\theta \pm \frac{3}{2r} - \frac{1}{2r} \right) \psi_B^\pm = 0 \quad (4.54)$$

considerando soluciones que tienden a cero para $r \rightarrow \infty$ y para $r \rightarrow 0$ un cálculo directo para ψ_B^- conduce a:

	$r \geq R$	$r \leq R$
ψ_B^-	$\simeq r^{-l-2} e^{il\theta}$	$\simeq r^{-l+2} e^{il\theta}$

a primera vista estos modos llevan a estados localizados en el agujero de gusano para $l = 0, \pm 1$. Sin embargo sólo las soluciones con $l = 0$ van a ser estrictamente normalizables: en un espacio curvo, la condición de normalización de la función de onda viene dada [64] por: $\int d^2x \sqrt{\text{Det}(g)} \|\Psi(\mathbf{r})\|^2 < \infty$, condición que para nuestra métrica se traduce en: las dos siguientes posibilidades dadas por:

$$\int d^2x \sqrt{\text{Det}(g)} \|\Psi(\mathbf{r})\|^2 = \begin{cases} \int_R^\infty dr r (r^2)^{-l-2} < \infty \\ \int_0^R dr \frac{1}{r^3} (r^2)^{-l+2} < \infty \end{cases} \quad (4.55)$$

claramente, ambas condiciones no pueden ser cumplidas simultáneamente en la geometría infinita del agujero de gusano si $l = \pm 1$. Sin embargo, sí es posible encontrar estados localizados con estos números cuánticos en las soluciones numéricas asociadas a sistemas reales de dimensión finita, ya que estas funciones presentan una divergencia en el valor de la norma que va a ser de tipo logarítmico, relativamente suave para dichos sistemas. La anterior discusión es aplicable para el caso particular $\psi_A^\pm = 0$, pero pueden encontrarse soluciones para ψ_A^\pm invirtiendo el sentido del flujo y el valor del momento angular, ya que la combinación de ambas operaciones nos da una simetría en la ecuación de Dirac. Tenemos por tanto que las anteriores condiciones ($l = 0, \pm 1$) van a seguir caracterizando dichas soluciones [161]. Un análisis similar puede hacerse para geometrías $(6n, 0)$ en los que n no es múltiplo de 3: como ya hemos comentado, esto se traduce en $\Phi_T = \pi$. Tomando como en el caso anterior soluciones con $\psi_A^\pm = 0$, la ecuación de Dirac en este caso pasa a ser:

$$r \geq R: \quad \left(\partial_r - \frac{i}{r} \partial_\theta \mp \frac{1}{2r} + \frac{1}{2r} \right) \psi_B^\pm = 0 \quad (4.56)$$

$$r \leq R: \quad \left(\partial_r - \frac{i}{r} \partial_\theta \pm \frac{1}{2r} - \frac{1}{2r} \right) \psi_B^\pm = 0 \quad (4.57)$$

exigiendo de nuevo que las funciones de onda se anulen en $r = 0$ y $r = \infty$ dichas funciones van a ser del estilo:

	$r \geq R$	$r \leq R$
ψ_B^-	$r^{-l-1} e^{il\theta}$	$\simeq r^{-l+1} e^{il\theta}$

en este caso sólo va a haber un estado localizado, el correspondiente a $l = 0$. No es estrictamente convergente, pero al igual que en el caso anterior, para sistemas de tamaño finito pueden encontrarse estados con $l = 0$ ya que la divergencia es de tipo logarítmico. Asimismo es posible encontrar soluciones para ψ_A^\pm si se considera un flujo de signo contrario en la ecuación de Dirac asociada. Del anterior análisis, vemos claramente la relación existente entre defectos topológicos y número de estados con energía cero.

4.3 Densidad local de estados, (LDOS)

En el contexto del estado sólido [216, 322] y de la Física condensada se define la densidad de estados ($D[E]$) como la cantidad de estados disponibles para el sistema físico por unidad de energía y volumen. Matemáticamente, $D[E] = \frac{N[E]}{V}$ con $N[E]\delta E$ el número de estados con energía comprendida entre E y $E + \delta E$. Una densidad de estados alta a un determinado nivel de energía quiere decir que existen muchos estados disponibles para ser ocupados en ese rango de energías. En general, las propiedades topológicas del sistema como por ejemplo la estructura de bandas del material [216], influyen considerablemente en la forma de la densidad de estados. Podemos entonces tratar con topologías en el marco de un espacio-tiempo unidimensional como es el caso de los llamados líquidos de Luttinger [214, 138], bidimensional, como hemos visto ya en el contexto de las membranas de grafeno [80, 378], o tridimensional, como por ejemplo en la propagación de electrones libres en metales (gas de fermiones) [234, 195]. En la mayoría de los escenarios con interés físico la densidad de estados es una función cuyo cálculo es en general altamente no trivial. A modo de simple ejemplo ilustrativo, veamos con detalle como calcularla para el caso de fermiones libres en distintas dimensiones [216]. Consideremos entonces un sistema en el que las partículas que lo constituyen presentan un espectro continuo de energías caracterizados por el vector de ondas en el espacio de momentos, K . La densidad de estados puede entonces definirse mediante la integral:

$$D(E) = \int_{R^d} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \delta[E - E(K)] \quad (4.58)$$

definiendo la función $f(k) = E - \frac{(\hbar^2 k^2)}{8\pi^2 m}$ y usando la propiedad de la función delta de Dirac $\delta(f(k)) = \sum \frac{\delta(k-k_j)}{|f'(k_j)|}$ [265], la integral (4.58) puede evaluarse directamente. Multiplicando el resultado final por un factor 2 para tener en cuenta la degeneración de espín, obtenemos el resultado para electrones en una dimensión:

$$D(E) = \sqrt{\frac{2\pi}{E}} \frac{1}{\pi\hbar} . \quad (4.59)$$

Repetiendo el cálculo para $d = 2$ encontramos que la densidad de estados toma el valor constante $D(E) = \frac{M}{\pi\hbar^2}$ luego el gas de electrones libres en dos dimensiones se caracteriza por que existen los mismos estados posibles independientemente del valor de la energía de cada uno de los estados. El cálculo para $d = 3$ nos da finalmente el resultado:

$$D(E) = \sqrt{2ME} \frac{M}{\pi^2\hbar^3} \quad (4.60)$$

sin embargo, cuando se consideran nanoestructuras como por ejemplo los nanotubos de grafeno, el concepto de densidad local de estados (LDOS) es a menudo de mayor relevancia, ya que la densidad de estados puede variar considerablemente de un punto a otro. Podemos definir matemáticamente la densidad local de estados, partiendo de la función de onda $\Phi_n(x)$ del sistema [322] y utilizándola para pesar la probabilidad de presencia de la partícula en cada nivel y punto espacio-temporal:

$$n(E, x) \simeq \sum |\Phi_n(x)|^2 \delta(E - \epsilon_n) \quad (4.61)$$

donde la suma se extiende a todos los niveles de energía del sistema. De la anterior expresión vemos que cada estado contribuye más a la densidad local a una determinada energía en aquellas regiones donde la densidad de probabilidad es más alta. De esta forma la densidad local de estados $n(E, x)$ contiene más información que la densidad de estados $n(E)$ y aporta una resolución mayor en el tratamiento de aquellos sistemas no homogéneos, como es el caso de las comentadas nanoestructuras de carbono [321, 336], sistemas ópticos y cristales fotónicos [7, 135] o cavidades plasmónicas [317], por citar algunos ejemplos procedentes del campo del estado sólido.

Una generalización de la densidad local de estados es la llamada función espectral [7] definida como:

$$n(E, x_1, x_2) = \sum \Phi_n(x_1) \Phi_n^*(x_2) \delta(E - \epsilon_n) \quad (4.62)$$

de su definición vemos que la densidad espectral se corresponde con una función de correlación a dos puntos, lo que implica su conexión directa con las funciones de Green [179].

Los resultados apuntados en el anterior apartado establecen correlaciones entre el número de estados en un intervalo de energías dado y la estructura de defectos topológicos presentes en la red. Una investigación de dichas correlaciones puede establecerse analizando las distintas densidades locales de estados (LDOS) es decir, la distribución de estados electrónicos en función de su energía. En este sentido, es parte de nuestra investigación original la de encontrar resultados para la densidad local de estados correspondiente a fermiones propagándose en el espacio-tiempo que surge al considerar una gravedad de tipo BTZ en el marco de las teorías de Palatini [168, 49]. Una vía para investigar la existencia de dichos paralelismos puede venir del estudio de la densidad local de estados para un campo fermiónico inmerso en dicho escenario, y su comparación posterior con los resultados disponibles en la bibliografía existente sobre el grafeno [94, 321, 159, 154, 114, 338, 304, 230].

4.4 La correspondencia AdS/CFT

4.4.1 Conceptos fundamentales

Tanto la electrodinámica cuántica, (QED) [253] que describe las interacciones entre fotones y partículas con carga eléctrica como la cromodinámica cuántica, (QCD) [303] que hace lo propio con las interacciones entre quarks y gluones son teorías cuánticas de campos invariantes bajo transformaciones de Lorentz, es decir, bajo $SO(3, 1)$, o en general, en un espacio d -dimensional bajo $SO(d - 1, 1)$. Una teoría de campos conforme en d dimensiones ($CFT[d]$) es una teoría d -dimensional que resulta invariante bajo transformaciones del grupo $SO(d, 2)$: las llamadas transformaciones conformes [251]. Dichas teorías son independientes de la escala del sistema, a diferencia de las teorías cuánticas de campos convencionales que son dependientes de escala y necesitan renormalizarse. La renormalización cuántica [303, 296] rompe la invariancia de escala de la teoría de campos clásica. Esto se traduce en el bien conocido hecho de que las constantes de acoplamiento de la teoría varían su valor con la energía, lo que explica fenómenos como el confinamiento. Las teorías gauge capaces de mantener la invariancia de escala en el régimen cuántico, son las llamadas teorías supersimétricas de tipo Super Yang-Mills, (SYM). La correspondencia AdS/CFT establece una correlación directa entre una teoría gauge de tipo SYM y una teoría de gravedad con constante cosmológica negativa. Para ser más precisos, la teoría de gravedad está definida en un espacio de tipo AdS de dimensión $d + 1$ (conocido como “bulk”) con una frontera de dimensión d en la que se define (o vive) la teoría SYM [368]. De esta forma, las teorías de Yang-Mills $SU(N_c)$ en el límite $N_c \rightarrow \infty$ [251, 15] dejan de describirse como una teoría cuántica, y pasan a describirse como una teoría clásica (esto es, independiente de escala, sin necesidad de renormalización), pero como una teoría clásica con gravedad. Dicha correlación entre gravedad y teoría gauge en su frontera requiere la preexistencia de un marco conceptual en el que ambos tipos de teorías están unificadas. La teoría de cuerdas [306] suministra dicho marco conceptual, pero la correspondencia AdS/CFT puede utilizarse de manera independiente en el estudio de muchos de los problemas asociados a la teoría gauge de la frontera como es el caso de la materia condensada [175], dinámica de fluidos y líquidos de Luttinger [194, 31, 193], interacciones de quarks y gluones en un plasma (QGP) [210, 267] o materiales superconductores [176].

4.4.2 Agujeros negros y leyes de la termodinámica

La relación existente entre las leyes de la termodinámica y las propiedades de los agujeros negros es conocida desde los trabajos originales de Hawking [178] y de Bekenstein [51].

Tomemos por ejemplo las dos funciones termodinámicas más habituales: temperatura y entropía. La temperatura de agujero negro se relaciona con el concepto de gravedad de superficie, en el sentido de que cuando un agujero negro alcanza el equilibrio, la gravedad es la misma en todos los puntos de la superficie del horizonte independientemente del proceso que haya seguido el agujero negro en su formación, de la misma forma que la temperatura es constante en todos los puntos de un sistema termodinámico clásico una vez que este ha alcanzado el equilibrio térmico. La expresión matemática de la temperatura de Hawking en el caso de una métrica de simetría radial, (no necesariamente del tipo Schwarzschild) ha sido bien establecida (ver por ejemplo una sencilla explicación en [268]). Desde el punto de vista de la mecánica cuántica estadística, la prolongación analítica de la métrica a una métrica euclidiana mediante la sustitución $t_E = it$ establece una correlación entre la periodicidad del tiempo imaginario y la inversa de la temperatura, de forma que la temperatura de Hawking o temperatura del horizonte puede determinarse en este contexto como:

$$\frac{1}{\beta} = T_H = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{tt}g_{rr}}} \frac{dg_{tt}}{dr} \right)_{r=r_h} \quad (4.63)$$

donde r_h da cuenta de la posición del horizonte y en la fórmula anterior debe tenerse en cuenta que se ha utilizado el formalismo euclídeo, por lo que el producto $g_{tt}g_{rr}$ debe considerarse como definido positivo.

La entropía, por su parte, da cuenta del número de estados microscópicos en los que un sistema físico puede configurarse y, en el caso de los agujeros negros, va a estar íntimamente relacionada con la extensión del horizonte, esto es, con su área. Una explicación sencilla de dicha relación puede encontrarse en [268], donde se deduce la ley del área al relacionar radio de Schwarzschild y longitud de onda Compton de las partículas que forman el agujero negro:

$$S = \frac{1}{4} \frac{A}{L_P^2} K_B \quad (4.64)$$

siendo $K_B = 1,381 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ la constante de Boltzmann, y $L_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \simeq 10^{-35} \text{ m}$ la longitud de Planck (en el sistema de unidades en el que $K_B = 1$ la entropía es una cantidad adimensional). Tenemos entonces que la entropía asociada al agujero negro crece con su área, sin embargo, es un hecho bien conocido que la entropía de un sistema estadístico crece con su volumen, de acuerdo con el primer principio de la termodinámica [307]. Considerando el caso $d = 4$ tenemos entonces que un agujero negro 4-dimensional no puede dar cuenta de la entropía de un sistema estadístico. Este hecho servirá de inspiración para la correspondencia AdS/CFT, en la cual el área del horizonte de un agujero negro que emerge en un espacio-tiempo de

5 dimensiones se corresponde exactamente con el volumen 4-dimensional de un sistema estadístico que vive en su frontera.

4.4.3 Simetrías conformes: el diccionario AdS/CFT

Como hemos comentado previamente, las teorías gauge clásicas son invariantes bajo transformaciones de escala en las coordenadas espacio-temporales, $x^\mu \rightarrow ax^\mu$. Esto es fácil de comprobar por ejemplo en el electromagnetismo de Maxwell [232], donde la acción de la materia es de la forma $S_M \simeq -\frac{1}{4e^2} \int dx^4 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$: bajo una transformación de escala, es evidente que el potencial vector A^μ va a transformarse como $A^\mu \rightarrow \frac{1}{a} A^\mu$ (esto es fácil de comprobar si recordamos, por ejemplo, que la componente A^0 es proporcional a $\frac{e}{r}$) luego la transformación del producto $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ aporta un factor $\frac{1}{a^4}$ que se compensa con la transformación del elemento de volumen. Dicha invariancia de escala, sin embargo, no se traslada a la contrapartida cuántica de dichas teorías ya que el grupo de renormalización implica, como ya hemos comentado, que la constante de acoplamiento de la teoría es una función de la energía. La anterior transformación de escala induce, asimismo, una transformación sobre la métrica dada por $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \rightarrow a^2 \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. Consideremos, en el caso más general, un espacio-tiempo curvo dado por una métrica $g_{\mu\nu}(x)$. Podemos entonces definir una transformación de escala directamente sobre la métrica: $g_{\mu\nu} \rightarrow a^2 g_{\mu\nu}$. Dichas transformaciones de simetría sobre la métrica son conocidas como transformaciones de Weyl [364]. Consideremos ahora una transformación de Weyl local:

$$g_{\mu\nu} \rightarrow a^2(x) g_{\mu\nu} \quad (4.65)$$

un cálculo directo (ver [268] y una deducción explícita en el anexo, A) establece que si una teoría ha de ser invariante bajo transformaciones de Weyl locales, entonces el tensor energíamomento del sistema debe ser de traza nula. En el caso en que nuestro espacio-tiempo sea plano, es decir, el espacio-tiempo en el que situamos la teoría gauge que vive en la frontera, la simetría Weyl local se reduce a la llamada simetría conforme [268]:

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow a^2(x) \eta_{\mu\nu} \quad (4.66)$$

las teorías supersimétricas conocidas como teorías SYM [104] son invariantes bajo las mencionadas transformaciones de escala espacio-temporal, de la misma forma que desde el punto de vista de la gravedad lo es el espacio-tiempo anti-de Sitter [368], solución de las ecuaciones de Einstein para la acción:

$$S_5 = \frac{1}{16\pi G_5} \int d^5x \sqrt{-g_5} (R_5 - 2\Lambda) \quad (4.67)$$

con $\Lambda = -\frac{6}{L^2}$. El par formado por una teoría SYM que vive en la frontera ($d - 1$) de un espacio-tiempo curvo en d dimensiones de tipo Anti-de-Sitter y una teoría de la gravedad en el volumen configura entonces el marco en el que se desarrolla la correspondencia AdS/CFT. Dicha correspondencia establece que, en el límite $N_c \rightarrow \infty$ (esto es, para una teoría gauge $SU(N_c)$ en el límite en que los números de color de la teoría tienden a infinito) dicha teoría puede ser representada por una teoría de cuerdas [251, 15]. Si elevamos el número de dimensiones a cinco y consideramos un espacio-tiempo curvo con invariancia Poincaré ISO(1,3), en su frontera dicho espacio-tiempo puede representar la mencionada teoría gauge. Podemos representar dicho espacio-tiempo mediante el elemento de línea [268]:

$$ds_5^2 = \Omega(\omega)^2 (-dt^2 + dx^3) + d\omega^2 \quad (4.68)$$

donde $x^\mu = (t, x_3) = (t, x, y, z)$ dan cuenta de la mencionada invariancia Poincaré ISO(1,3), es decir, el vector espacial x_3 corresponde a las tres dimensiones espaciales de la teoría gauge en el límite de grandes números de color, mientras que la dirección ω parametriza radialmente el espacio-tiempo curvo de cinco dimensiones donde reside la teoría de la gravedad. Desde el punto de vista de la función de partición que representa un sistema estadístico [149, 296], la función de partición de la teoría gauge se corresponde con la integral de camino de la acción gravitatoria en 5 dimensiones:

$$Z_{CFT} = Z_{AdS_5} \quad (4.69)$$

lo que supone la expresión más concisa de la conocida como relación de Witten [368, 166]. A partir de la relación de Witten el diccionario AdS/CFT permite establecer una relación directa entre los parámetros de la teoría gauge y de la teoría de la gravedad:

$$N_c^2 = \frac{\pi L^3}{2 G_5} \quad (4.70)$$

en el límite $N_c \rightarrow \infty$ no es necesario utilizar la teoría de cuerdas para calcular el lado derecho de la ecuación (4.69) y es suficiente la conocida como aproximación de punto de silla [268, 149]:

$$Z_{CFT}(N_c \gg 1) \simeq e^{-S_E} \quad (4.71)$$

siendo S_E la acción euclídea “on shell” que se obtiene sustituyendo la solución clásica para la métrica en la expresión integral de la acción, tal como ilustraremos en la próxima sección. Es decir, la condición de acoplamiento fuerte en la teoría que vive en la frontera es necesaria, de acuerdo con el diccionario AdS/CFT, para que en el “bulk” podamos despreciar los efectos de la teoría de cuerdas y quedarnos con una gravedad clásica.

Una teoría gauge con temperatura cero se corresponde en el lado de la gravedad con un espacio-tiempo AdS puro, mientras que una teoría gauge con una temperatura no nula va a corresponderse, de acuerdo al apartado anterior, con una solución de tipo agujero negro en el lado de la gravedad. En el límite $N_c \rightarrow \infty$, como ya hemos comentado, podemos utilizar soluciones de tipo agujero negro en el marco de la RG, (ver a modo de ejemplo las referencias [193, 79, 250]) o bien, investigar soluciones en una gravedad modificada: por ejemplo soluciones de tipo GBI [168, 49, 167, 10]. Dicha opción constituirá parte de nuestra investigación original.

4.4.4 Función de partición y acción “on Shell”

Consideremos un ejemplo sencillo para ilustrar la relación de Witten expresada en el apartado anterior: supongamos entonces que la teoría de la gravedad que vive en el “bulk” es sencillamente la RG sin acoplamiento de materia (para fijar ideas, en un espacio $d = 4$, esto nos proporcionaría soluciones de tipo Schwarzschild). Tenemos entonces el esquema:

“Bulk”, (p + 2 dimensiones) → Gravedad, (RG)
Frontera, (p+1 dimensiones) → Teoría de campos conforme

y en lo que concierne a la acción para la parte gravitatoria, esta será la suma de varios términos [268]:

$$S_E = S_{Bulk} + S_{GH} + S_{CT} \quad (4.72)$$

siendo S_E la acción euclídea, $S_E = -iS_L$ que como ya hemos comentado se obtiene a partir de la acción Lorentz por prolongación analítica de la variable temporal. En la signatura euclídea, el espacio-tiempo asociado a una solución de tipo agujero negro en el background AdS_5 viene descrito por el elemento de línea:

$$\begin{aligned} ds_5^2 &= \left(\frac{r}{L}\right)^2 (h dt_E^2 + dx_3^2) + L^2 \frac{dr^2}{hr^2} \\ &= \left(\frac{r_0}{L}\right)^2 \frac{1}{u^2} (h dt_E^2 + dx_3^2) + L^2 \frac{du^2}{hu^2} \end{aligned} \quad (4.73)$$

con $h = 1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^4 = 1 - u^4$ y $r = r_0(u = 1)$ la posición del horizonte y $r = \infty$ ($u = 0$) la frontera del espacio AdS que es donde se define la teoría gauge conforme. El término S_{bulk} se corresponde con la acción de Einstein-Hilbert convencional en presencia de constante cosmológica y evaluada “on shell”:

$$S_{Bulk} = -\frac{1}{16\pi G_{p+2}} \int dx^{p+2} x \sqrt{g} (R - 2\Lambda) \quad (4.74)$$

con $2\Lambda = -\frac{p(p+1)}{L^2}$. Haciendo $p = 3$, contrayendo las ecuaciones de Einstein y usando ya la solución “on shell” para la métrica obtenemos:

$$R_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} R + \Lambda g_{MN} = 0 \quad (4.75)$$

con $R = -\frac{(p+2)(p+1)}{L^2}$. Sustituyendo este resultado en (4.74) y extendiendo la integral en t_E desde 0 hasta $\beta = \frac{1}{T_H}$ y en u desde la posición del horizonte hasta la frontera nos queda:

$$S_{Bulk} = \frac{1}{2\pi G_5} \frac{r_0^4}{L^5} \int_0^\beta dt \int d^3x \int_u^1 du \frac{1}{u^5} = \frac{\beta V_3}{8\pi G_5} \frac{r_0^4}{L^5} \left(\frac{1}{u^4} - 1\right)\Big|_{u=0} = \frac{\beta V_3}{8\pi G_5} \frac{r_0^4}{L^5} \hat{S}_{bulk} \quad (4.76)$$

siendo V_3 el volumen asociado a las tres direcciones espaciales representadas por el vector x_3 . Tenemos pues que S_{bulk} es divergente en $u = 0$ pues es proporcional al volumen del espacio-tiempo: tomaremos a partir de aquí $\beta = V_3 = r_0 = L = 16\pi G_5 = 1$ con el fin de aligerar la notación ya que estos factores van a aparecer de forma reiterada. Consideremos ahora la contribución del término habitual de superficie, término de Gibbons-Hawking [Blau], que es necesario añadir a la acción de Einstein-Hilbert convencional para tener bien definido el problema variacional. Este término de superficie viene dado por:

$$S_{GH} = -\frac{2}{16\pi G_{p+2}} \int dx^{p+1} \sqrt{\gamma} (K) \quad (4.77)$$

siendo $\gamma_{\mu\nu}$ la métrica $(p+1)$ -dimensional en la superficie. De acuerdo a la descomposición ADM [Blau] se tiene $ds_{p+2}^2 = g_{uu} du^2 + \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ y K es la traza de la curvatura extrínseca:

$$K = n^u \frac{\partial_u \sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma}} \quad (4.78)$$

con $n^u = -\frac{1}{\sqrt{g_{uu}}}$. Para el caso que nos ocupa tendremos que $n^u = -uh^{\frac{1}{2}}$ y $\sqrt{\gamma} = u^{-4} h^{\frac{1}{2}}$ luego (4.77) se escribe como:

$$S_{GH} = 2uh^{\frac{1}{2}} \frac{d[u^{-4}h^{\frac{1}{2}}]}{du} \Big|_{u=0} = -\frac{8}{u^4} + 4 \Big|_{u=0} \quad (4.79)$$

donde hemos de tener en cuenta que éste es un término de superficie y por tanto siempre es evaluado en $u = 0$. Acabamos de ver que los términos del “bulk” y de Gibbons-Hawking divergen para $u \rightarrow 0$ de forma que es necesario añadir un nuevo término de superficie, S_{CT} que es un contratérmino necesario para cancelar estas divergencias y obtener de una acción total finita. En el contexto de la correspondencia AdS/CFT, esta divergencia se interpreta como la divergencia ultravioleta de la teoría de campos dual. En teorías cuánticas de campos es sabido como se manejan las divergencias [296]: se lleva a cabo la renormalización y se añaden un número finito de contratérminos a la acción desnuda. Siguiendo el espíritu de esta prescripción se añade un contratérmino que nos cancele las divergencias, procedimiento conocido como renormalización holográfica [337]. Para $p < 5$ el contratérmino se escribe como:

$$S_{CT} = \frac{1}{16\pi G_{p+2}} \int dx^{p+1} \sqrt{\gamma} \left\{ \frac{2p}{L} + \frac{L}{p-1} \mathfrak{R} - \frac{L^3}{(p-3)(p-1)^2} (\mathfrak{R}^{\mu\nu} \mathfrak{R}_{\mu\nu} - \frac{p+1}{4p} \mathfrak{R}^2) + \dots \right\} \quad (4.80)$$

siendo $\mathfrak{R}_{\mu\nu}$ el valor del tensor de Ricci en la superficie. Para agujeros negros con horizonte plano, se tiene que $\mathfrak{R}_{\mu\nu}$ es idénticamente cero y solamente el primer término nos contribuye:

$$S_{CT} = 6u^{-4} h^{\frac{1}{2}} \Big|_{u=0} = \frac{6}{u^4} - 3 \Big|_{u=0} \quad (4.81)$$

sumando las tres contribuciones a la acción “on shell” y recuperando cantidades dimensionales encontramos finalmente:

$$S_E = -\frac{\beta r_0^4 V^3}{16\pi G_5 L^5} \quad (4.82)$$

que es el resultado final en ausencia de materia. Cuando campos de materia están presentes en el espacio AdS la relación de Witten entre funciones de partición establece una correspondencia entre dichos campos de materia y operadores mecano-cuánticos en el lado de la teoría gauge [166, 120]. Estudiaremos dicha correspondencia en el contexto de las soluciones cargadas en $(2+1)$ dimensiones [250] en los capítulos posteriores, donde investigaremos su expresión en el contexto GBI. Otro ámbito de aplicación de la correspondencia AdS/CFT

es el estudio de los llamados loops de Wilson [252, 137, 312, 71], de los que hablaremos asimismo en el contexto de nuestra propia investigación.

Capítulo 5

La propuesta métrico-afín

5.1 Introducción

En anteriores capítulos hemos resaltado el hecho de que conexión y métrica son objetos independientes, que la elección de la conexión de Levi-Civita no es la única alternativa posible y que la idoneidad de esta elección debe ser testada experimentalmente [215]. En este sentido, como ya hemos comentado, el carácter riemanniano del espacio-tiempo está bien estudiado y establecido en el régimen de bajas energías o en grandes volúmenes, pero no así en pequeños volúmenes o en el régimen de altas energías donde los efectos cuánticos de la gravedad pasan a tener un papel relevante [366, 62]. Dicha escala, (escala de Planck) puede estimarse dimensionalmente si expresamos la constante de Newton en términos de otras constantes fundamentales y una escala de longitud como: $G = c^3 \frac{L^2}{\hbar}$. Definiendo la longitud de Planck como aquella distancia de interacción en la cual los efectos cuánticos de la gravedad son del orden de la constante de gravitación universal, tendremos una relación del estilo $L_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$. Llegados a la escala de Planck el espacio-tiempo dinámico característico de la visión einsteiniana de la gravedad es esperable que muestre una estructura discreta, en la que estructuras de tipo agujero de gusano aparecen y desaparecen en el vacío cuántico, posiblemente desempeñando un papel análogo al de los defectos en una estructura cristalina [244, 243].

Por otra parte, la renormalización de los lagrangianos de materia en el espacio-tiempo curvo en el contexto de una geometría puramente métrica implica la necesidad de nuevos términos en la acción de gravedad que sean cuadráticos en $R_{\mu\nu}$ [64, 352, 295], lo que a su vez introduce inestabilidades en la teoría en forma de grados de libertad espúreos (“ghost-like”) y ruptura de la unitariedad [21, 206]. Al añadir estos términos cuadráticos en un formalismo puramente métrico las ecuaciones de campo pasan a ser de cuarto orden [369, 370] (una excepción a esta tendencia son las teorías de la gravedad de tipo Lovelock, [246]).

Como hemos comentado en secciones anteriores, ya en los primeros tiempos del estudio de las geometrías no riemannianas la existencia del espín abrió la puerta a la presencia de una parte no simétrica, de carácter torsional, en la estructura de la conexión física [182, 198]: diferentes escenarios en los que someter a prueba la observabilidad de la torsión pueden encontrarse en las referencias [331, 255, 256], sin embargo, tanto los efectos observables de la torsión como de la no metricidad, representada por el tensor $Q_{\lambda\mu\nu} = -\nabla_{\lambda}g_{\mu\nu}$, quedan lejos del rango de energías que puede ser alcanzado de forma experimental en la actualidad. Respecto a la no metricidad pueden consultarse por ejemplo las referencias [363, 131, 365, 262] sobre los históricos trabajos de Weyl y de Eddington y mucho más recientemente y ya en el marco de una geometría métrico-afín totalmente desarrollada, las referencias [236, 116] en las que se proponen asimismo diferentes tests observacionales.

En este capítulo vamos a revisar someramente las principales características de una geometría métrico-afín “à la Palatini” [278, 286] en la cual métrica y conexión son tratadas desde el instante inicial como variables dinámicas independientes y cuyas relaciones se establecen de manera natural al resolver las ecuaciones del movimiento, es decir “on shell”. Una de las principales ventajas del formalismo métrico-afín es que las ecuaciones de movimiento así formuladas no son de cuarto orden, como ocurre con la mayor parte de sus parientes directos en el formalismo métrico, sino de segundo orden. Esta característica, junto con la invariancia proyectiva [52], permite evitar gran parte de los problemas patológicos relacionados con grados de libertad espureos y pérdida de la unitariedad [49, 236, 116], resolviendo además algunos de los problemas habituales en los escenarios tratados en RG, como son la existencia de singularidades tras agujeros negros y en escenarios cosmológicos primordiales [278]. Dentro del amplio rango de teorías de la gravedad formuladas “à la Palatini”, nos centraremos especialmente en el grupo de teorías en las que la acción se formula en términos del tensor de Ricci y sus potencias, las conocidas como teorías RBG, (“Ricci Based Gravity”) [278, 277]. Dichas teorías tienen la ventaja adicional de proporcionarnos soluciones analíticas y abrir el foco a diversos escenarios de aplicación. Además de los ya mencionados, citemos por ejemplo su validez en el rango de los tests observacionales en el sistema solar y escenarios astrofísicos [58], la geometría asociada al entrelazamiento cuántico [243] o las soluciones de tipo BTZ [168, 49] y Kerr-Newman [167, 10] obtenidas al poner en correspondencia un conjunto de soluciones bien conocidas en RG [357, 257, 40, 41, 88] con sus contrapartidas en gravedad GBI. Dicha correspondencia entre un conjunto de soluciones obtenidas en el contexto de la RG, (en lo que llamaremos a partir de ahora el “Einstein Frame”, EF) y sus contrapartes en la teoría RBG, (lo que llamaremos el “Rici Frame”, RF) constituye una técnica completa de mapeo entre espacios de soluciones que permite generar soluciones en el lado RBG a partir de las bien conocidas soluciones en el EF. El “mapping” que se establece

entre ambos espacios de soluciones permite usar las soluciones en el EF como semilla para, mediante la resolución de ecuaciones algebraicas, obtener las soluciones en el lado RBG [12, 11, 117].

Este capítulo, último que dedicaremos a describir el “estado del arte” que se considera pertinente para el trabajo de investigación propio que hemos llevado a cabo, así como para clarificar algunos puntos de los artículos de investigación del grupo en el que participo en calidad de doctorando, y que se exponen a continuación, se estructura como sigue: en primer lugar resumiremos el procedimiento para obtener las ecuaciones generales de los campos en el contexto de una geometría métrico-afin formulada “à la Palatini”, incluyendo algunas referencias a los términos de superficie asociados [58, 318] y a la invariancia proyectiva de las teorías RBG [9] lo que nos permite trabajar con la parte simétrica del tensor de Ricci y prescindir de la torsión. A continuación, describiremos el “mapping” entre “frames” que nos permite, como ya hemos comentado, generar soluciones en el RF a partir de resultados bien conocidos en el EF y acabaremos el capítulo citando algunos ejemplos del lado de la cosmología primigenia, agujeros de gusano y la búsqueda de observables que den cuenta de la no metricidad.

5.2 Ecuaciones del movimiento. Esquema general

Tomamos, por tanto, como punto de partida a la hora de construir la geometría diferencial asociada a la gravedad, el hecho de que métrica y conexión son objetos independientes y ambos de la misma importancia: cualquier teoría que construyamos tendrá que proporcionarnos ecuaciones de movimiento que nos permitan determinar independientemente tanto la conexión como la métrica, así como las posibles relaciones que puedan existir entre ellas. Vamos a asumir que la materia está acoplada únicamente a la métrica, lo que nos facilitará la tarea. Esta hipótesis está inspirada por las diversas pruebas experimentales del principio de equivalencia [366] como ya hemos comentado en secciones anteriores.

Vamos a comenzar derivando las ecuaciones de campo en las teorías de Palatini de una forma general para luego restringirnos a determinadas familias de lagrangianos, lo que nos permitirá ilustrar la teoría con algunos cálculos prácticos. Para una teoría de Palatini genérica en la que la conexión aparece en el lagrangiano mediante el tensor de Riemann o sus posibles contracciones, la acción puede escribirse como:

$$S_T = \frac{1}{2k^2} \int d^d x \sqrt{-g} f(g_{\mu\nu}, R^\alpha_{\beta\mu\nu}) + S_M[g_{\mu\nu}, \psi] \quad (5.1)$$

donde $f(g_{\mu\nu}, R^\alpha_{\beta\mu\nu})$ es una función de la métrica espacio-temporal y del tensor de Riemann,

g es el determinante del tensor métrico, S_M es la acción asociada a la materia, ψ representa de manera genérica al conjunto de campos que caracterizan a la materia (fermiones, campos escalares, electromagnetismo de Maxwell o de Born-Infeld, campos de Yang-Mills, etc..) y $k^2 = 8\pi L_P^{d-2}$ es una constante con las dimensiones adecuadas (para RG en 4 dimensiones y en el sistema de unidades naturales tenemos $f = R$, y $k^2 = 8\pi G$). La dependencia de la teoría en la conexión viene entonces contenida en el tensor de Riemann, definido como [278]:

$$R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha}\Gamma_{\nu\beta}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha}\Gamma_{\mu\beta}^{\lambda}. \quad (5.2)$$

Usando ahora la relación $\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}$, se tiene inmediatamente $\frac{\partial g}{\partial g_{\alpha\beta}} = gg^{\alpha\beta}$, y podemos escribir la variación de la acción como:

$$\delta S_T = \frac{1}{2k^2} \int d^d x \sqrt{-g} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial g_{\mu\nu}} - \frac{f}{2}g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial f}{\partial R_{\beta\mu\nu}^{\alpha}} \delta R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} \right] + \delta S_M. \quad (5.3)$$

En una geometría métrico-afín la variación del tensor de Riemann viene dada por (ver anexo A):

$$\delta R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} = \nabla_{\mu}\delta\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} - \nabla_{\nu}\delta\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} + 2S_{\mu\nu}^{\lambda}\delta\Gamma_{\lambda\beta}^{\alpha} \quad (5.4)$$

siendo $S_{\mu\nu}^{\lambda}$ el tensor de torsión. En la mayor parte de los escenarios físicos, la torsión no es relevante, excepto en escenarios de muy alta densidad o en la escala de Planck, donde los campos fermiónicos pueden generar una torsión neta no nula que puede evitar la formación de singularidades [278, 308]. Definimos ahora ciertas cantidades tensoriales dadas por:

$$\begin{aligned} P_{\alpha}^{\beta\mu\nu} &\equiv \frac{\partial f}{\partial R_{\beta\mu\nu}^{\alpha}} \\ J^{\mu} &\equiv P_{\alpha}^{\beta\mu\nu}\delta\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} \\ I_{\delta} &\equiv \int d^d x \sqrt{-g} P_{\alpha}^{\beta\mu\nu} \nabla_{\mu} \delta\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} \\ &= \int d^d x \left[\nabla_{\mu}(\sqrt{-g}J^{\mu}) - \delta\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} \nabla_{\mu}(\sqrt{-g}P_{\alpha}^{\beta\mu\nu}) \right] \end{aligned} \quad (5.5)$$

teniendo en cuenta que el tensor totalmente antisimétrico se escribe en dimensión d como $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta\dots} = \sqrt{-g}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta\dots}$ (con $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta\dots} = \pm 1$ variando el signo según el carácter par o impar de las permutaciones de los índices $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ construidas desde el elemento $\varepsilon_{0123\dots} = 1$) y tomando la derivada covariante del lado izquierdo en la anterior igualdad un cálculo directo nos lleva al resultado $\nabla_{\mu}\sqrt{-g} = \partial_{\mu}\sqrt{-g} - \sqrt{-g}\Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma}$, lo que implica asimismo (tras algunas

manipulaciones algebraicas y juegos de manos con índices mudos):

$$\nabla_\mu(\sqrt{-g}J^\mu) = \partial_\mu(\sqrt{-g}J^\mu) + 2S_{\sigma\mu}^\sigma\sqrt{-g}J^\mu \quad (5.6)$$

y con ello:

$$I_\delta = \int d^d x \left(\partial_\mu(\sqrt{-g}J^\mu) - \delta\Gamma_{\nu\beta}^\alpha [\nabla_\mu(\sqrt{-g}P_\alpha^{\beta\mu\nu}) - 2S_{\sigma\mu}^\sigma\sqrt{-g}P_\alpha^{\beta\mu\nu}] \right) \quad (5.7)$$

de forma que (5.3) puede reescribirse, tras cálculos directos, en la forma:

$$\begin{aligned} \delta S_T &= \frac{1}{2k^2} \int d^d x \left[\sqrt{-g} \left(\frac{\partial f}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{f}{2} g^{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} + \partial_\mu(\sqrt{-g}J^\mu) + \right. \\ &+ 2 \left(-\frac{1}{\sqrt{-g}} \nabla_\mu(\sqrt{-g}P_\alpha^{\beta[\mu\nu]}) + S_{\sigma\rho}^\nu P_\alpha^{\beta\sigma\rho} + 2S_{\sigma\mu}^\sigma P_\alpha^{\beta[\mu\nu]} \right) \sqrt{-g} \delta\Gamma_{\nu\beta}^\alpha \left. \right] \\ &+ \delta S_M \end{aligned} \quad (5.8)$$

donde $P_\alpha^{\beta[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(P_\alpha^{\beta\mu\nu} - P_\alpha^{\beta\nu\mu})$. Si escribimos las variaciones de la materia en términos del tensor energía-momento y del acoplamiento de la materia con la conexión como:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (5.9)$$

$$H_\alpha^{\nu\beta} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta \Gamma_{\nu\beta}^\alpha} \quad (5.10)$$

podemos reescribir las ecuaciones generales como:

$$\begin{aligned} k^2 T_{\mu\nu} &= \frac{\partial f}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{f}{2} g^{\mu\nu} \\ k^2 H_\alpha^{\nu\beta} &= -\frac{1}{\sqrt{-g}} \nabla_\mu(\sqrt{-g}P_\alpha^{\beta[\mu\nu]}) + 2S_{\sigma\mu}^\sigma P_\alpha^{\beta[\mu\nu]} + S_{\sigma\rho}^\nu P_\alpha^{\beta\sigma\rho} \end{aligned} \quad (5.11)$$

5.3 Teorías RBG e invariancia proyectiva

Consideremos ahora posibles simplificaciones de las ecuaciones (5.11), en especial en lo que concierne a la segunda de ellas, la que implica a la conexión. Vamos a considerar un tipo concreto de teorías en las que la dependencia en la conexión viene descrita por dependencias al nivel del tensor de Ricci (teorías RBG) [117] caracterizadas por una acción del tipo:

$$S_T = \frac{1}{2k^2} \int d^d x \sqrt{-g} f(g_{\mu\nu}, R_{\mu\nu}) + S_M[g_{\mu\nu}, \Psi] \quad (5.12)$$

con el tensor de Ricci enteramente construido en base a la conexión $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ y en principio sin propiedades de simetría definidas en sus índices. Una primera aproximación, inspirada en el principio de equivalencia, tal como ya hemos comentado anteriormente, consiste en asumir que la materia sólo se acopla a la métrica, pero no a la conexión. Esta suposición es totalmente válida para campos bosónicos pero no necesariamente para campos fermiónicos, ya que, como hemos visto en el capítulo anterior, la naturaleza espinorial de los fermiones introduce torsión en la geometría. Vamos a ver a continuación como, bajo determinadas condiciones, la torsión puede eliminarse de las ecuaciones de movimiento. Siempre podemos considerar que sus efectos son despreciables excepto cerca de la escala de Planck. Esta hipótesis funciona bien en escenarios astrofísicos [278, 58, 277], sin embargo, queremos ir más lejos de dichos escenarios, por lo que una manera más elegante de sacar la torsión de nuestras ecuaciones consiste en usar la invariancia proyectiva [181]. Dada una conexión arbitraria $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, se define una transformación de proyectividad sobre ella mediante la relación:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \rightarrow \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \chi_\mu \delta_\nu^\lambda \quad (5.13)$$

con χ_μ una 1-forma arbitraria. Las transformaciones de proyectividad tienen su origen en simetrías de las ecuaciones geodésicas del movimiento, donde la transformación sobre la conexión puede absorberse en una redefinición del parámetro afín, esto es, en una libertad de gauge [280]. Para campos bosónicos que solo “ven” la parte métrica de la conexión esto es inmediato, pero asimismo puede demostrarse que también en el caso de tratar con campos fermiónicos que se acoplan a la conexión se respeta la invariancia proyectiva [181]. Consideremos ahora la variación del tensor de Ricci asociada a (5.13). Utilizando (5.4), es inmediato encontrar como se transforma el tensor de Ricci bajo proyectividad:

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\mu \chi_\nu - \nabla_\nu \chi_\mu + 2S_{\mu\nu}^\lambda \chi_\lambda \quad (5.14)$$

esta ecuación tiene consecuencias interesantes: nos dice que bajo una transformación de proyectividad la variación del Ricci es un objeto totalmente antisimétrico. Esto es: si descomponemos el tensor de Ricci en su parte simétrica y antisimétrica, la parte simétrica es invariante bajo transformaciones de proyectividad, por tanto si consideramos que el lagrangiano de gravedad depende solamente de la parte simétrica del tensor de Ricci $R_{(\mu\nu)}$ toda teoría asociada será invariante bajo transformaciones de proyectividad. ¿Qué consecuencias tiene esto para la torsión? Consideremos por simplificación el caso $d = 4$ y una transformación de proyectividad concreta, definida como [9]:

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \frac{2}{3} S_{\mu\lambda}^\alpha \delta_\nu^\lambda \quad (5.15)$$

para esta transformación es inmediato comprobar que $\tilde{\Gamma}_{\alpha\mu}^{\alpha} = \tilde{\Gamma}_{\mu\alpha}^{\alpha}$. Basándose en estas relaciones puede demostrarse [9]:

$$\tilde{S}_{\mu\nu}^{\lambda} = 0 \quad (5.16)$$

donde $\tilde{S}_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} (\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} - \tilde{\Gamma}_{\nu\mu}^{\lambda})$ es el tensor de torsión definido en (3.8). Este resultado es verdaderamente notable, ya que nos dice que la torsión puede siempre despejarse de las ecuaciones de movimiento via una transformación de proyectividad. Si consideramos entonces que solo la parte simétrica del Ricci interviene en la acción de la gravedad y ésta es por tanto invariante bajo transformaciones de proyectividad, concluimos que la torsión puede tomarse como nula en (5.11) siempre que trabajemos solo con la parte simétrica del tensor de Ricci. Si el tensor de Ricci es simétrico se garantiza la invariancia proyectiva y se salvaguarda la teoría de grados de libertad fantasmáticos [9]. En este sentido cabe destacar el hecho de que en un enfoque puramente métrico, acoplamientos no mínimos de escalares o vectores producen inestabilidades de tipo Ostrogradski [191, 379, 152, 151, 59, 55, 183, 192, 56, 57] (esto es, “ghost-like”). Sin embargo, en una formulación métrico-afín, al entrar la torsión como un modo proyectivo que puede ser desplazado mediante la elección de gauge es posible un rango mayor de acoplamientos de la materia a la conexión siempre y cuando trabajemos con la parte simétrica del tensor de Ricci.

5.4 Gravedad GBI

Vamos a centrar nuestra atención en una teoría RBG concreta. Se trata de una extensión de la RG que ha atraído en los últimos años considerable interés tanto en escenarios cosmológicos como astrofísicos [323, 173, 36, 38, 356, 329, 25] conocida como gravedad GBI (“Eddington inspired Born-Infeld gravity”, EiBI en el original en inglés). Es una teoría de la gravedad construida en analogía al electromagnetismo de Born-Infeld [68] e introducida inicialmente en el formalismo métrico [118]. Su formulación “à la Palatini” [37] incorpora la ventaja adicional de evitar derivadas de orden superior e inconsistencias “ghost like” al nivel de las ecuaciones de campo (una extensa monografía sobre las diversas familias de la gravedad de Born-Infeld y su tratamiento en el formalismo de Palatini puede encontrarse en [58]). La expresión de la acción asociada a la gravedad de Born-Infeld viene dada por:

$$S_{BI} = \frac{1}{k^2 \varepsilon} \int d^d x \left[\sqrt{-|g_{\mu\nu} + \varepsilon R_{\mu\nu}(\Gamma)|} - \lambda \sqrt{-g} \right] \quad (5.17)$$

siendo $R_{\mu\nu}(\Gamma)$ el tensor de Ricci que consideraremos simétrico, lo que nos permite, como se ha comentado en la sección anterior, deshacernos de la torsión. λ y ε son parámetros característicos de la gravedad de Born-Infeld con valores típicos cercanos a la unidad para λ y a cero para ε . Ambos parámetros caracterizan una constante cosmológica efectiva dada por $\Lambda_{eff} = \frac{\lambda-1}{\varepsilon}$, lo que podemos ver a partir de un desarrollo en potencias de ε de la ecuación anterior [58, 49]:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S_{BI} &= \frac{1}{k^2} \int d^d x \sqrt{-g} \left[\frac{(1-\lambda)}{\varepsilon} + \frac{R}{2} \right] + \\ &+ \frac{\varepsilon}{4k^2} \int d^d x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{4k^2} \left(\frac{1}{2} R^2 - R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \right) \right] + O[\varepsilon^2] \end{aligned} \quad (5.18)$$

a orden cero en ε recuperamos la acción característica de la Relatividad General [357] con una constante cosmológica no nula dada por Λ_{eff} . Las correcciones a segundo orden sólo van a ser importantes a muy cortas distancias, caracterizadas por la escala de Planck. En ese sentido, GBI se reduce a GR en el mencionado límite $\varepsilon \rightarrow 0$.

5.4.1 Ecuaciones de movimiento

Analícemos ahora la forma que toman las ecuaciones de movimiento generales (5.11) para la gravedad GBI. En ausencia de torsión y suponiendo que la materia no es sensible a la parte no métrica de la conexión, las ecuaciones se escriben como:

$$\begin{aligned} k^2 T_{\mu\nu} &= \frac{\partial f}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{f}{2} g_{\mu\nu} \\ 0 &= -\frac{1}{\sqrt{-g}} \nabla_\mu (\sqrt{-g} P_\alpha^{\beta[\mu\nu]}) \end{aligned} \quad (5.19)$$

con $P_\alpha^{\beta[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(P_\alpha^{\beta\mu\nu} - P_\alpha^{\beta\nu\mu})$, $P_\alpha^{\beta\mu\nu} = \frac{\partial f}{\partial R_\alpha^{\beta\mu\nu}}$ y $f = f(g_{\mu\nu}, R_{\beta\mu\nu}^\alpha)$ la función definida en (5.1). Introduzcamos el objeto $q_{\mu\nu}$ definido como $q_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \varepsilon R_{\mu\nu}$, simétrico al serlo el tensor métrico y el tensor de Ricci. Además, para $\varepsilon = 0$ coincide con la propia métrica espacio-temporal, por lo que podemos asumir $q_{\mu\nu}$ como un objeto de naturaleza métrica, (idea que veremos confirmada al resolver las ecuaciones de movimiento). Ahora, teniendo en cuenta (5.1) y (5.17) es inmediato comprobar que la función $f = f(g_{\mu\nu}, R_{\beta\mu\nu}^\alpha)$ puede escribirse como:

$$f = \frac{2}{\varepsilon} \left(\sqrt{\frac{-q}{-g}} - \lambda \right) \quad (5.20)$$

con q y g los determinantes de los respectivos tensores $q_{\mu\nu}$ y $g_{\mu\nu}$. Es decir:

$$\frac{\partial f}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{-g}{-q}} \left(\frac{\partial q}{\partial g^{\mu\nu}} g - q \frac{\partial g}{\partial g^{\mu\nu}} \right) \frac{1}{g^2}. \quad (5.21)$$

Además, sabemos que el tensor métrico se relaciona con su determinante por medio de la matriz de adjuntos $g_{\alpha\beta} = g G_{\alpha\beta}$, de donde se sigue la relación $\frac{\partial g}{\partial g^{\alpha\beta}} = -g g_{\alpha\beta}$ (y la relación análoga para $\frac{\partial q}{\partial q^{\alpha\beta}}$). Usando la regla de la cadena tenemos:

$$\frac{\partial q}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{\partial q}{\partial q^{\alpha\beta}} \frac{\partial (g^{\alpha\beta} + \varepsilon R^{\alpha\beta}(\Gamma))}{\partial g^{\mu\nu}} = -q q_{\alpha\beta} \delta_{\mu}^{\alpha} \delta_{\nu}^{\beta} = -q q_{\mu\nu}, \quad (5.22)$$

donde hemos usado el hecho de que “off shell” conexión y métrica son campos dinámicos independientes. Sustituyendo este resultado en (5.21) expresamos asimismo $\frac{\partial f}{\partial g^{\mu\nu}}$ en función de $g, g_{\mu\nu}, q, y q_{\mu\nu}$:

$$\frac{\partial f}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{-q}{-g}} (g_{\mu\nu} - q_{\mu\nu}) \quad (5.23)$$

usando ahora (5.20) y (5.23) es inmediato elaborar la primera de las ecuaciones de campo (5.19) en función del objeto $q_{\mu\nu}$:

$$\sqrt{\frac{-q}{-g}} q^{\mu\nu} - \lambda g^{\mu\nu} = -\varepsilon k^2 T^{\mu\nu} \quad (5.24)$$

veamos ahora la información relevante que podemos extraer de la segunda de las ecuaciones de campo en el caso particular que nos ocupa. Para ello comencemos calculando explícitamente el tensor de cuarto orden $P_{\alpha}^{\beta\mu\nu}$:

$$P_{\alpha}^{\beta\mu\nu} = \frac{\partial f}{\partial R_{\beta\mu\nu}^{\alpha}} = \frac{1}{\varepsilon \sqrt{\frac{-q}{-g}}} \frac{\partial (\frac{g}{q})}{\partial R_{\beta\mu\nu}^{\alpha}} = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{g}{q}} \frac{1}{g} \frac{\partial q}{\partial R_{\beta\mu\nu}^{\alpha}} \quad (5.25)$$

donde hemos usado de nuevo el hecho de que la métrica es independiente de la conexión, (y por tanto del tensor de Riemann) en un escenario “off shell”. Usando de nuevo la regla de la cadena y la relación $q = Q^{\alpha\beta} q_{\alpha\beta}$ con $Q^{\alpha\beta}$ la correspondiente matriz de adjuntos, es inmediato reescribir (5.25) como $P_{\alpha}^{\beta\mu\nu} = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{g}{q}} \frac{q}{g} q^{\sigma\tau} \frac{\partial q_{\sigma\tau}}{\partial R_{\beta\mu\nu}^{\alpha}}$. Para calcular la última derivada usamos (5.20) y escribimos $q_{\sigma\tau} = g_{\sigma\tau} + \varepsilon \delta_{\lambda}^{\rho} R_{\sigma\rho\tau}^{\lambda}$, lo que implica :

$$\frac{\partial q_{\sigma\tau}}{\partial R_{\beta\mu\nu}^{\alpha}} = \varepsilon \delta_{\lambda}^{\rho} \delta_{\alpha}^{\lambda} \delta_{\sigma}^{\beta} \delta_{\tau}^{\nu} \delta_{\rho}^{\mu} = \varepsilon \delta_{\alpha}^{\mu} \delta_{\sigma}^{\beta} \delta_{\tau}^{\nu} \quad (5.26)$$

y obtenemos finalmente $P_\alpha^{\beta\mu\nu} = \sqrt{\frac{q}{g}} q^{\beta\nu} \delta_\alpha^\mu$ y análogamente para $P_\alpha^{\beta\nu\mu}$. Sustituyendo estos resultados en la correspondiente ecuación de movimiento encontramos:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\sqrt{-g}} \nabla_\mu \left(\sqrt{-g} \sqrt{\frac{-q}{-g}} [q^{\beta\nu} \delta_\alpha^\mu - q^{\beta\mu} \delta_\alpha^\nu] \right) = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{-g}} \nabla_\alpha (\sqrt{-q} q^{\beta\nu}) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \nabla_\mu (\sqrt{-q} q^{\beta\mu} \delta_\alpha^\nu) \end{aligned} \quad (5.27)$$

ecuación diferencial cuya solución inmediata es $\nabla_\alpha (\sqrt{-q} q^{\mu\nu}) = 0$. Resultado de enorme importancia, pues implica que la conexión física $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ implicada en la derivada covariante ∇_α puede calcularse directamente como la conexión de Levi-Civita del tensor $q_{\mu\nu}$:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{q^{\lambda\alpha}}{2} (\partial_\mu q_{\alpha\nu} + \partial_\nu q_{\alpha\mu} - \partial_\alpha q_{\mu\nu}) \quad (5.28)$$

y justifica la definición de $q_{\mu\nu}$ a modo de “pseudométrica” o “tensor métrico auxiliar”. Si tenemos en cuenta entonces que el objeto $g_{\mu\nu}$ describe la métrica espacio-temporal, es claro entonces que la GBI formulada “à la Palatini” (y en general cualquier otra teoría RBG así formulada) es una teoría en la que hay una no metricidad explícita. La situación deviene así análoga a la descrita en (3.44) con $q_{\mu\nu}$ haciendo el papel de $h_{\mu\nu}$, es decir: el de una pseudométrica que, establecida de acuerdo a ciertas prescripciones dadas, permitía recuperar el proceso de medida de un observador ligado a la estructura cristalina con defectos y una cierta estructura riemanniana. Esta es una característica asociada a toda teoría RBG en el planteamiento “à la Palatini”: la capacidad de correlacionar un espacio-tiempo dinámico, asociado a la gravedad, con estructuras de estado sólido en las que existen defectos en la red cristalina, acercando de esta manera la imagen que tenemos del espacio-tiempo tal y como lo entendió Einstein a la estructura cuántica sugerida por Wheeler. Desde un punto de vista puramente operativo, (5.28) abre la puerta a encontrar soluciones analíticas para la gravedad GBI en el momento en que la acoplemos a diversas fuentes de materia [168, 49, 167] y servirá asimismo como núcleo para desarrollar el concepto de “mapping”, o correspondencia entre los espacios de soluciones en el marco de la RG y aquellas asociadas a las teorías RBG [12, 11].

5.4.2 La matriz de deformación

La ecuación (5.24) permite relacionar los tensores \hat{q} y \hat{g} a través de una expresión matricial $q_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} \Omega_\nu^\alpha$ y queremos encontrar la forma explícita de la matriz $\hat{\Omega}$ implicada. Partiendo de $\hat{q} = \hat{g} \hat{\Omega}$ es inmediato escribir:

$$\begin{aligned}
(\widehat{\Omega}^{-1})_{\nu}^{\mu} g^{\nu\sigma} = q^{\mu\sigma} &= \sqrt{\frac{-g}{-q}} \left(\lambda g^{\mu\sigma} - k^2 \varepsilon T^{\mu\sigma} \right) = \\
&= \sqrt{\frac{|\widehat{g}|}{|\widehat{q}|}} \left(\lambda \delta_{\nu}^{\mu} - k^2 \varepsilon T_{\nu}^{\mu} \right) g^{\nu\sigma} \quad (5.29)
\end{aligned}$$

lo que nos permite identificar $(\widehat{\Omega}^{-1})_{\nu}^{\mu}$ como $\sqrt{\frac{|\widehat{g}|}{|\widehat{q}|}} \left(\lambda \delta_{\nu}^{\mu} - k^2 \varepsilon T_{\nu}^{\mu} \right)$ y usando la relación entre determinantes $|\widehat{q}| = |\widehat{g}| |\widehat{\Omega}|$ obtener finalmente la expresión para la matriz de deformación:

$$\sqrt{|\widehat{\Omega}|} (\widehat{\Omega}^{-1})_{\nu}^{\mu} = \left(\lambda \delta_{\nu}^{\mu} - k^2 \varepsilon T_{\nu}^{\mu} \right). \quad (5.30)$$

En el vacío se tiene $T^{\mu\nu} = 0$ y la matriz deformación es proporcional a la matriz identidad, resultado que nos informa de que, en ausencia de materia, los tensores \widehat{q} y \widehat{g} coinciden salvo una constante de proporcionalidad. De acuerdo con (5.30) esto implica que la metricidad es recuperada y en ausencia de materia la gravedad GBI no ofrece resultados distintos a los de la solución convencional en el contexto GR (más un término en constante cosmológica, siempre que $\lambda \neq 1$). Por otra parte, escribiendo $\varepsilon R_{\mu\nu}(\widehat{q}) = q_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}$, multiplicando ambos lados de esta igualdad por la inversa de \widehat{q} y definiendo $\varepsilon R_{\mu\alpha}(\widehat{q}) q^{\alpha\nu} \equiv \varepsilon R_{\nu}^{\mu}(q)$ obtenemos:

$$\varepsilon R_{\nu}^{\mu}(q) = (q_{\mu\alpha} - g_{\mu\alpha}) q^{\alpha\nu} = \delta_{\mu}^{\nu} - (\widehat{g} \widehat{q}^{-1})_{\mu}^{\nu} \quad (5.31)$$

usando esta última igualdad, un cálculo directo nos permite finalmente reescribir $R_{\nu}^{\mu}(q)$ como:

$$R^{\mu}_{\nu}(q) = \frac{k^2}{\sqrt{|\widehat{\Omega}|}} \left(L_G \delta^{\mu}_{\nu} + T^{\mu}_{\nu} \right) \quad (5.32)$$

con $T^{\mu}_{\nu} \equiv g^{\mu\rho} T_{\rho\nu}$ (como hemos comentado, de acuerdo al PE la materia representada por el tensor energía-momento se acopla únicamente a la métrica, por lo que subiremos y bajaremos índices de este tensor con el objeto $g_{\mu\nu}$) y $L_G \equiv \frac{\sqrt{|\widehat{\Omega}|} - \lambda}{k^2 \varepsilon}$. La ecuación (5.32) abre la puerta a expresar toda la teoría en un marco de referencia propio de la RG, vía la redefinición del tensor energía-momento, idea esta que es el fundamento del mecanismo conocido como “mapping” y de cuyas ideas básicas nos ocuparemos en la siguiente sección.

5.5 El “mapping” entre “frames”

5.5.1 Relaciones fundamentales

El hecho de que en las teorías RBG formuladas en el planteamiento métrico-afín la conexión física es susceptible de ser expresada en términos de la conexión de Levi-Civita de una “métrica auxiliar” $q_{\mu\nu}$ cuya relación con la métrica espacio-temporal es puramente algebraica permite reexpresar las ecuaciones del movimiento de forma que se asemejen a las ecuaciones de Einstein en el llamado “Einstein-Frame” (EF), lo que permite, bajo determinados modelos caracterizados por distintas fuentes de materia [12, 11, 117], resolver analíticamente las ecuaciones del movimiento mediante un elegante procedimiento en el que se sustituye la resolución de ecuaciones diferenciales por la resolución de ecuaciones algebraicas, de tal forma que se puede tomar una solución dada en el contexto de la GR y usarla como punto de partida que exportar al contexto métrico-afín. En nuestro trabajo ilustraremos esta idea mediante el uso de lagrangianos de materia asociados a campos escalares (cuyo interés está plenamente justificado en múltiples contextos físicos: soluciones astrofísicas que involucran campos bosónicos y estructuras de Proca [247, 72], agujeros negros en rotación [189], sombras de agujeros negros [108], modelos inflacionarios [22, 353] o defectos topológicos [48] entre otros muchos), así como el electromagnetismo de Maxwell o modelos de electromagnetismo no lineal (NEDs), como la ya mencionada propuesta de Born-Infeld [68] y con aplicaciones en el campo de la correspondencia AdS/CFT [79], gravedad Rainbow [186] o en diversos escenarios cosmológicos y astrofísicos [150, 146, 143, 177, 239, 261, 97, 333, 129, 227, 271, 314]. En esta sección daremos algunas pinceladas básicas del mecanismo del “mapping”, las cuales ampliaremos en las secciones dedicadas a nuestra propia investigación. Para un desarrollo exhaustivo de los fundamentos del “mapping”, tanto para campos escalares como para modelos no lineales de electromagnetismo, las mencionadas referencias [12, 11, 117] contienen toda la información necesaria.

Partamos entonces, como ya hemos avanzado, de la primera de nuestras ecuaciones generales (5.11). Considerando la función:

$$f(g_{\mu\nu}, R_{\beta\mu\nu}^{\alpha}) \equiv 2k^2 \mathcal{L}_g(g_{\mu\nu}, R_{\mu\nu}(\Gamma)) \quad (5.33)$$

con $\mathcal{L}_g(g_{\mu\nu}, R_{\mu\nu}(\Gamma))$ el lagrangiano de gravedad de una teoría RBG general, de forma que podemos reescribir la ecuación de campo como:

$$g^{\mu\rho} \frac{\partial \mathcal{L}_g(g_{\mu\nu}, R_{\mu\nu}(\Gamma))}{\partial g^{\rho\nu}} - \frac{1}{2} \mathcal{L}_g(g_{\mu\nu}, R_{\mu\nu}(\Gamma)) \delta_{\nu}^{\mu} = \frac{1}{2} T_{\nu}^{\mu} \quad (5.34)$$

al lagrangiano de gravedad, como ya hemos comentado en secciones anteriores, le vamos a pedir que sea invariante bajo difeomorfismos e invariancia proyectiva [117, 9]. Bajo transformaciones proyectivas la parte simétrica del tensor de Ricci permanece invariante, mientras que la parte antisimétrica como hemos visto, sigue una ley de transformación no trivial. Si queremos que el lagrangiano de gravedad sea invariante bajo transformaciones proyectivas y sortear así la presencia de torsión, debe ser únicamente función de la parte simétrica del Ricci, lo que da estabilidad a la teoría. Tendremos entonces $R_{\alpha\sigma} = \delta_{\alpha}^{\nu} R_{\nu\sigma} = g_{\alpha\rho} g^{\rho\nu} R_{\sigma\nu}$ y podemos reescribir la derivada implicada en (5.34) como:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial g^{\rho\nu}} = \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial R_{\alpha\sigma}} \frac{\partial R_{\alpha\sigma}}{\partial g^{\rho\nu}} = g_{\alpha\rho} R_{\sigma\nu} \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial R_{\alpha\sigma}} \quad (5.35)$$

lo que implica:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial R_{\mu\rho}} R_{\rho\nu}(\Gamma) = \frac{1}{2} \left(\mathcal{L}_g [g_{\mu\nu}, R_{\mu\nu}(\Gamma)] \delta + T_{\nu}^{\mu} \right) \quad (5.36)$$

introduzcamos ahora el tensor $q^{\mu\nu}$ definido como:

$$\sqrt{-q} q^{\mu\nu} = 2k^2 \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial R_{\mu\nu}} \quad (5.37)$$

es un ejercicio interesante comprobar que el tensor $q^{\mu\nu}$ así definido coincide con la anterior definición dada a partir de la ecuación (5.19) cuando consideramos GBI como la teoría RBG. Utilizando esta definición podemos reescribir la ecuación de movimiento como:

$$q^{\mu\rho} R_{\rho\nu}(\Gamma) = k^2 \sqrt{\frac{-g}{-q}} \left(T_{\nu}^{\mu} + \mathcal{L}_G \delta_{\nu}^{\mu} \right) \quad (5.38)$$

tomando trazas en ella:

$$q^{\rho\sigma} R_{\sigma\rho}(\Gamma) = k^2 \sqrt{\frac{-g}{-q}} \left(T + d \mathcal{L}_G \right) \quad (5.39)$$

con $T = T_{\rho}^{\rho}$ y d la dimensión del espacio-tiempo. Combinando ambas ecuaciones un cálculo directo nos permite escribir :

$$\begin{aligned} G_{\nu}^{\mu}(q, \Gamma) &\equiv q^{\mu\rho} R_{\rho\nu}(\Gamma) - \frac{1}{2} q^{\rho\sigma} R_{\sigma\rho}(\Gamma) \delta_{\nu}^{\mu} = \\ &= k^2 \sqrt{\frac{-g}{-q}} \left(T_{\nu}^{\mu} - \delta_{\nu}^{\mu} \left[\frac{(d-2)}{2} \mathcal{L}_G + \frac{T}{2} \right] \right) = k^2 \tilde{T}_{\nu}^{\mu} \end{aligned} \quad (5.40)$$

Esta ecuación fundamenta el procedimiento que llamamos “mapping” o correspondencia entre “frames” y es conveniente, por tanto, analizar con cierto detalle todos sus componentes. En primer lugar, la definición de la izquierda nos remite directamente la definición del tensor de Einstein en el marco de RG. Por otra parte, si asumimos que dada una teoría RBG es posible establecer una relación algebraica entre el tensor $q^{\mu\nu}$ y la métrica espacio-temporal (ya hemos visto explícitamente en la sección anterior que esto es posible para GBI mediante el concepto de matriz de deformación y es también posible para teorías de tipo $f(R)$ [277] en las que la matriz de deformación se reduce a un escalar y la relación entre métricas es de tipo conforme. Volveremos a este punto en nuestra investigación cuando examinemos los términos de superficie asociados), entonces todo el término de la derecha de (5.40) puede reescribirse en función del tensor $q_{\mu\nu}$ y la expresión deviene una especie de ecuación de Einstein en el marco de la RG haciendo las identificaciones de $q_{\mu\nu}$ con una cierta métrica espacio-temporal acoplada a una fuente de materia dada descrita por el objeto $\tilde{T}_\nu^\mu = \sqrt{\frac{-g}{-q}} \left(T_\nu^\mu - \delta_\nu^\mu \left[\frac{(d-2)}{2} \mathcal{L}_G + \frac{T}{2} \right] \right)$ en lo que constituye el marco de trabajo que llamamos “Einstein-Frame”. Una última observación es necesaria para completar el cuadro: en el EF los índices asociados a cantidades tensoriales suben y bajan mediante el tensor $q_{\mu\nu}$, pues éste hace el papel de métrica espacio-temporal, por lo que el objeto $q^{\mu\rho} R_{\rho\nu}(\Gamma)$ puede escribirse como $R_\nu^\mu(q)$ en dicho marco de trabajo. Esta idea ya estaba presente en nuestra argumentación previa a (5.31) de tal forma que podemos partir de un problema bien conocido y resuelto en RG y utilizar su solución como semilla para el problema correspondiente en el marco RBG. Esto se hace en la práctica [168, 167, 10] dejando a las soluciones bien conocidas en el contexto RG jugar el papel de tensor $q_{\mu\nu}$ en el RF y obteniendo por sustitución algebraica la forma que toma en dicho “frame” la métrica espacio-temporal $g_{\mu\nu}$.

Podemos completar la imagen de correspondencia entre “frames” que emerge de (5.40) explicitando el papel de la materia: si usamos la ecuación que define el tensor energía-momento (5.10), un cálculo directo nos permite reescribirla como [117]:

$$G_\nu^\mu(q, \Gamma) = -k^2 \sqrt{\frac{-g}{-q}} \left\{ 2g^{\mu\rho} \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\delta g^{\rho\nu}} + \delta_\nu^\mu (\mathcal{L}_g + \mathcal{L}_m - g^{\rho\sigma} \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\delta g^{\rho\sigma}}) \right\} \quad (5.41)$$

5.5.2 “Mapping” y fluidos anisótropos

Concluiremos esta introducción al concepto de correspondencia entre “frames” ilustrando dicha correspondencia en un contexto físico de referencia como es el de los fluidos anisótropos. Los diferentes modelos de electromagnetismo en un escenario de simetría esférica pueden muy bien simularse mediante el uso de fluidos anisótropos caracterizados por presión y den-

sidades radiales y tangenciales [11, 117]. El tensor energía momento de un fluido anisótropo puede escribirse de acuerdo a [233]:

$$T_V^\mu = (\rho + P_t)u^\mu u_\nu + P_t \delta_V^\mu + (P_r - P_t)\chi^\nu \chi_\nu \quad (5.42)$$

siendo $-1 = g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -g_{\mu\nu}\chi^\mu \chi^\nu$, ρ la densidad del fluido, u^μ su cuadrivelocidad y P_r y P_t las presiones en la dirección radial y tangencial (el electromagnetismo de Maxwell puede modelizarse como un fluido en el que $P_r = -P_t = \rho$) con χ^μ un vector de tipo espacial que marca la dirección radial (si consideramos un observador comóvil con el fluido entonces $u^\mu = (u^0, 0)$ y $\chi^\mu = (0, \chi^r)$). Para un fluido descrito por la anterior ecuación, un cálculo directo permite escribir (5.41) como:

$$G_V^\mu = k^2 \frac{1}{\sqrt{|\widehat{\Omega}|}} \left[(\rho + P_t)u^\mu u_\nu + (P_r - P_t)\chi^\mu \chi_\nu + \frac{\delta_V^\mu}{2} (\rho - P_r + (4-d)P_t + (2-d)\mathcal{L}_G) \right] \quad (5.43)$$

ahora bien, usando el “mapping” el tensor $G_V^\mu(q)$ puede escribirse también en el EF mediante la igualdad:

$$G_V^\mu(q) = k^2 \widetilde{T}_V^\mu = k^2 \left[(\widetilde{\rho} + \widetilde{P}_t)v^\mu v_\nu + \widetilde{P}_t \delta_V^\mu + (\widetilde{P}_r - \widetilde{P}_t)\xi^\mu \xi_\nu \right] \quad (5.44)$$

con $u^\mu u_\nu = v^\mu v_\nu$ y $\chi^\mu \chi_\nu = \xi^\mu \xi_\nu$. Igualando coeficientes encontramos las relaciones:

$$\begin{aligned} \widetilde{\rho} + \widetilde{P}_t &= \frac{1}{\sqrt{|\widehat{\Omega}|}} (\rho + P_t) \\ \widetilde{P}_r - \widetilde{P}_t &= \frac{1}{\sqrt{|\widehat{\Omega}|}} (P_r - P_t) \\ \widetilde{P}_t &= \frac{1}{2\sqrt{|\widehat{\Omega}|}} (\rho - P_r + (4-d)P_t + (2-d)\mathcal{L}_G) \end{aligned} \quad (5.45)$$

¿Cómo encontramos a partir de aquí la métrica $g_{\mu\nu}$? Consideremos como caso particular la gravedad GBI : en ese caso la matriz de deformación se escribía como (5.30); sustituyendo la forma de T_V^μ dada por (5.42) obtenemos:

$$(\widehat{\Omega}^{-1})_{\nu}^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{|\widehat{\Omega}|}} (\lambda - \varepsilon k^2 P_t) \delta_{\nu}^{\mu} - \varepsilon k^2 \left[\frac{(\rho + P_t)}{\sqrt{|\widehat{\Omega}|}} u^{\mu} u_{\nu} + \frac{(P_r - P_t)}{\sqrt{|\widehat{\Omega}|}} \chi^{\mu} \chi_{\nu} \right] \quad (5.46)$$

teniendo en cuenta que $L_G = \frac{\sqrt{|\widehat{\Omega}|} - \lambda}{k^2 \varepsilon}$ restando las dos primeras ecuaciones (5.45) y sustituyendo en la tercera, encontramos $\frac{(\lambda - \varepsilon k^2 P_t)}{\sqrt{|\widehat{\Omega}|}} = 1 - \varepsilon k^2 \frac{(\tilde{\rho} - \tilde{P}_r)}{d-2}$ lo que nos permite escribir la matriz de deformación como:

$$(\widehat{\Omega}^{-1})_{\nu}^{\mu} = \left[1 - \varepsilon k^2 \frac{(\tilde{\rho} - \tilde{P}_r)}{d-2} \right] \delta_{\nu}^{\mu} - \varepsilon k^2 \left[(\tilde{\rho} + \tilde{P}_t) v^{\mu} v_{\nu} + (\tilde{P}_r - \tilde{P}_t) \xi^{\nu} \xi_{\nu} \right] \quad (5.47)$$

y desde aquí es ya inmediato encontrar la forma de la métrica espacio-temporal en GBI en términos de la representación en fluidos anisótropos:

$$g_{\mu\nu} = \left[1 - \varepsilon k^2 \frac{(\tilde{\rho} - \tilde{P}_r)}{d-2} \right] q_{\mu\nu} - \varepsilon k^2 \left[(\tilde{\rho} + \tilde{P}_t) v_{\mu} v_{\nu} + (\tilde{P}_r - \tilde{P}_t) \xi_{\mu} \xi_{\nu} \right] \quad (5.48)$$

En los próximos capítulos veremos otras derivaciones de esta última expresión y su aplicación para obtener soluciones con rotación.

5.6 Otras teorías RBG

Citaremos brevemente otra familia de teorías RBG con las que es habitual trabajar en el marco de las teorías métrico-afines formuladas “à la Palatini”, las llamadas teorías $f(R, Q)$, con $f(R, Q) = f(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} R_{\mu\nu} R_{\alpha\beta})$, que suponen la adición en el lagrangiano de potencias del tensor de Ricci. Dichas extensiones de la gravedad han sido ampliamente explotadas en el marco de trabajo de una geometría métrico-afín [243, 286]. Para este tipo de teorías las ecuaciones de movimiento (5.11) en ausencia de torsión se escriben como:

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha}^{\Gamma} \left[\sqrt{-g} (f_R g^{\beta\nu} + 2f_Q R^{\beta\nu}) \right] &= 0 \\ f_R R_{\mu\nu} - \frac{f}{2} g_{\mu\nu} + 2f_Q R_{\mu\alpha} g^{\alpha\beta} R_{\beta\nu} &= k^2 T_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (5.49)$$

con la notación $f_X \equiv \frac{\partial f}{\partial X}$, $X = \{R, Q\}$. Es inmediato reescribir la primera de ellas en la forma $\nabla_{\alpha}^{\Gamma} [\sqrt{-g} g^{\beta\lambda} (f_R \delta_{\lambda}^{\nu} + 2f_Q B_{\lambda}^{\nu})] = 0$, con $B_{\lambda}^{\nu} \equiv R_{\lambda\alpha} g^{\alpha\nu}$, de forma que si definimos ahora el tensor simétrico $h_{\mu\nu}$ cumpliendo:

$$\sqrt{-g} g^{\beta\lambda} (f_R \delta_{\lambda}^{\nu} + 2f_Q B_{\lambda}^{\nu}) = \sqrt{-h} h_{\mu\nu} \quad (5.50)$$

es evidente que la conexión física va a resolverse como la conexión de Levi-Civita del tensor $h_{\mu\nu}$ y podemos asimismo definir la matriz de deformación dada en este ocasión por la relación $\widehat{\Sigma} \equiv \Sigma_\mu^\nu = (f_R \delta_\mu^\nu + 2f_Q B_\mu^\nu)$ con lo que es inmediato encontrar las relaciones entre ambos tensores:

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu} &= \sqrt{|\widehat{\Sigma}|} \left(\widehat{\Sigma}^{-1}\right)_\mu^\alpha g_{\alpha\nu} \\ h^{\mu\nu} &= \frac{g^{\mu\alpha} \Sigma_\alpha^\nu}{\sqrt{|\widehat{\Sigma}|}} \end{aligned} \quad (5.51)$$

desde las ecuaciones de movimiento (5.49) es asimismo directo comprobar, como ya ocurría en GBI, que R, Q, B_λ^ν y la matriz de deformación $\widehat{\Sigma}$ son funciones algebraicas de la materia, por lo que usando las relaciones (5.51) y con cálculos muy similares a los de las secciones anteriores, es inmediato obtener [278]:

$$R_\mu^\nu(h) \equiv R_{\mu\alpha} h^{\alpha\nu} = \frac{1}{\sqrt{|\widehat{\Sigma}|}} \left(\frac{f}{2} \delta_\mu^\nu + k^2 T_\nu^\mu \right) \quad (5.52)$$

que es la misma ecuación encontrada ya en (5.38) para un lagrangiano RBG genérico. Las teorías $f(R, Q)$ y su caso límite $f(R)$ [277] han sido ampliamente explotadas en escenarios diferentes a los que utilizaremos aquí: podemos citar, entre otros, el estudio de escenarios cosmológicos [278, 286], agujeros de gusano interpretados como realización geométrica de la correlación $ER = EPR$ [243] o efectos observables de la no metricidad en las interacciones fermiónicas, escalares o electromagnéticas [116, 117].

En los siguientes capítulos de este trabajo, en los que se reproducen los artículos de investigación en los que he participado en calidad de doctorando, se utilizará abundantemente el formalismo y los procedimientos empleados aquí, esto puede producir en algún momento cierta repetición en la introducción de conceptos, pero consideramos que la explicación detallada de dichas técnicas y procedimientos de correspondencia entre marcos de trabajo que se ha llevado a cabo en este capítulo puede facilitar la comprensión de los contenidos de dichos artículos, en los que los fundamentos del procedimiento de “mapping” y la presentación de la acción y las ecuaciones de campo implicadas dan rápidamente paso a la deducción de resultados y análisis de los mismos en el contexto de problemas concretos.

Parte II

Resultados publicados.

Capítulo 6

Agujeros negros con rotación en GBI: una solución exacta

6.1 Introducción

Entre las distintas soluciones exactas de las ecuaciones de la RG que se conocen, sólo algunas de ellas aportan significado físico relevante [341]. Destacan en este grupo las soluciones de tipo estacionario y con simetría axial. De hecho, los teoremas de unicidad [93, 298, 298] nos aseguran que la solución más general posible de naturaleza electromagnética en el vacío es la solución de Kerr-Newman, que puede interpretarse como el campo gravitatorio exterior a un cuerpo descrito únicamente por su masa, carga eléctrica y momento angular [213, 269]. La fiabilidad de la solución de Kerr (es decir, de la solución no cargada eléctricamente) en la descripción de agujeros negros astrofísicos ha sido establecida por diversos medios, incluyendo espectroscopia de rayos X procedentes del disco de acreción de agujeros negros estelares y supermasivos [203, 85], así como mediante técnicas de lentes gravitacionales (consultar [108] para una revisión reciente) recientemente culminadas en la visualización de la sombra del objeto supermasivo de la galaxia M87 [254]. Además, los resultados numéricos procedentes de las ondas gravitacionales generadas en la fusión de dos agujeros negros descritos por la solución de Kerr son compatibles con la señal ondulatoria observada por la colaboración LIGO-VIRGO [2, 4].

Con el advenimiento la astronomía de ondas gravitacionales, la posibilidad de poner a prueba el régimen fuerte del campo gravitatorio y la búsqueda de nueva Física más allá de la RG está ahora más cerca que nunca [6]. La correcta identificación e interpretación de la nueva Física relacionada, por ejemplo, con la generación y propagación de ondas gravitacionales generadas en la fusión de agujeros negros [375, 63, 62] requiere una profunda comprensión

de los fenómenos subyacentes y por esta razón la obtención de soluciones analíticas exactas para el caso rotacional en diferentes teorías de la gravedad y escenarios astrofísicos es uno de los puntos que en la actualidad presentan un mayor interés. Sin embargo, los progresos en esta dirección han encontrado dificultades diversas. En primer lugar, dada la complejidad adicional típicamente presente en las ecuaciones de campo de muchas teorías de gravedad modificada (en general se trata de ecuaciones de cuarto orden y de carácter altamente no lineal) su resolución se ha convertido en todo un desafío que típicamente ha requerido de la introducción de simplificaciones adicionales tales como el adoptar soluciones de curvatura constante o escenarios de baja velocidad de rotación, o la adopción de métodos numéricos (ver [221, 374, 291, 293, 217, 35, 98, 263, 26, 258, 73, 76, 19, 81, 125, 208] para la descripción de algunos trabajos en este sentido).¹ En segundo lugar, el desarrollo de códigos numéricos avanzados para resolver esta cuestión está profundamente vinculado a la naturaleza de las ecuaciones de campo de la RG, y su modificación para cada una de las diversas teorías de gravedad modificada es una tarea que debe llevarse a cabo caso por caso, por lo que resulta extremadamente costosa desde el punto de vista computacional y de recursos humanos. Estas circunstancias dificultan la obtención de información relevante de las diversas teorías de gravedad modificada con el objeto de analizar la desviación de sus predicciones respecto de las correspondientes a la RG en escenarios tales como el espectro de ondas y modos cuasi-normales en las actuales y futuras observaciones, como por ejemplo LISA ([61, 43]) o la mencionada espectroscopia de rayos X en los discos de acreción de agujeros negros de tipo estelar ([34, 84]).

El principal objetivo de este capítulo es el de obtener una solución exacta para el agujero negro en rotación en una teoría de la gravedad modificada, valiéndose para ello de nuevas y mejoradas técnicas de resolución. Las teorías de la gravedad consideradas vienen definidas mediante una densidad Lagrangiana construida en base a contracciones del tensor de Ricci y del tensor métrico (teorías RBG) formuladas en espacios métrico-afines, en los que la métrica y la conexión son entidades independientes [277]. A diferencia de la formulación métrica usual, el marco de trabajo métrico-afín garantiza para estas teorías ecuaciones de campo de segundo orden y “ghost-free”, las cuales propagan sólo los dos modos tensoriales del campo gravitatorio a la velocidad de la luz, lo cual resulta automáticamente compatible con los datos encontrados en la fusión de sistemas binarios de estrellas de neutrones [3].

Los agujeros negros en rotación presentados aquí se obtienen usando un método recientemente establecido de correspondencia o “mapping” entre las teorías RBG y la RG, por el cual las ecuaciones de campo y soluciones de ésta última acoplada a ciertos Lagrangianos

¹Una aproximación alternativa es la parametrización independiente de modelo de las desviaciones del agujero negro de Kerr, las cuales tienen algunas ventajas, así como ciertas limitaciones, ver [204, 222].

de materia pueden ser mapeados a las ecuaciones de campo y soluciones de las primeras acopladas a los mismos campos de materia, pero con una densidad Lagrangiana diferente, y viceversa [14]. La potencia de este método es evidente: en lugar de solucionar ecuaciones de campo altamente no lineales en el lado RBG podemos trasladar el problema al lado RG y usar los métodos analíticos y numéricos ya existentes para obtener una solución. Dicha solución es entonces transformada algebraicamente obteniéndose en esta transformación la correspondiente solución en el lado RBG. La justificación de dicha técnica de correspondencia ha sido ya establecida para campos electromagnéticos [11, 117] y escalares [12] obteniéndose soluciones exactas, y recientemente, asimismo, dicha técnica ha sido empleada para encontrar nuevos objetos compactos en teorías RBG partiendo de la solución de tipo escalar en RG [13].

En este capítulo usaremos la solución de Kerr-Newman propia de la RG como punto de partida para obtener las correspondientes soluciones en el lado RBG que escogeremos como la gravedad de Born-Infeld (GBI) [39]. Dicha elección está motivada en las muchas aplicaciones de este modelo en astrofísica y cosmología ([292, 200, 102, 240, 315, 103, 326, 165, 201, 70, 199, 67]) (ver [58] para una reciente revisión) encontraremos que la fuente de materia en el lado RG será el electromagnetismo de Maxwell, que se corresponderá en el lado GBI con un electromagnetismo de tipo Born-Infeld [69]. Aunque, desde un punto de vista físico, este escenario quizás no es el más interesante (el escenario más interesante correspondería a encontrar la contraparte en el sector de materia en el lado RG de una gravedad GBI acoplada al electromagnetismo de Maxwell), nos será de utilidad para comprobar la fiabilidad del método de mapeo cuando lo aplicamos a escenarios de simetría axial, y de otra, para comenzar la exploración de diferencias cualitativas de estas soluciones en GBI comparadas con las soluciones Kerr-Newman convencionales en el contexto RG. Por otra parte, hay que notar que los agujeros negros en rotación tienden a descargarse debido a varios efectos [357, 148] y, por tanto, desde un punto de vista puramente astrofísico, suele despreciarse la carga residual como una buena aproximación [33]. Sin embargo, existen diversos mecanismos por los cuales dicha carga residual (pero apreciable) podría desempeñar un papel físicamente relevante. Un ejemplo de esto se tiene en la interacción del agujero negro con su propio disco de acreción [349] o con los rayos cósmicos presentes en su vecindad [376]. En las teorías RBG, el papel de la carga eléctrica es el de suministrar nuevas dinámicas debidas a los nuevos acoplamientos con la materia característicos de estas teorías. En ese sentido, comprobaremos que, a pesar de sus limitaciones, la solución obtenida nos da importante información relacionada con la nueva Física introducida por las modificaciones a la RG.

El contenido de este capítulo está organizado de la siguiente forma: primero introducimos una familia de teorías RBG, construimos el “mapping” con RG para el caso de fluidos anisótropos y particularizamos para el caso de la gravedad GBI. Después de esto, se construyen soluciones de tipo electrostático y con simetría esférica mediante la resolución directa de las ecuaciones de campo y también mediante la aplicación de la correspondencia entre “frames” verificándose la mutua consistencia y encontrando que la RG acoplada al electromagnetismo de Maxwell se mapea en GBI acoplada al electromagnetismo de Born-Infeld. Hecho esto, aplicaremos el mismo procedimiento a las soluciones de simetría axial con rotación, encontrando una solución analítica exacta y comentaremos sus propiedades más relevantes. Terminaremos con unas conclusiones y alguna reflexión al respecto.

6.2 El procedimiento de “mapping”

6.2.1 Gravedad RBG

Comencemos definiendo la familia de teorías de la gravedad en las que estamos interesados. Estas vienen dadas por una acción de la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{RBG} &= \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_G(g_{\mu\nu}, R_{\mu\nu}(\Gamma)) \\ &+ \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m(g_{\mu\nu}, \Psi_m), \end{aligned} \quad (6.1)$$

con las siguientes definiciones y convenciones: κ^2 es la constante de Newton en las unidades adecuadas (en RG, $\kappa^2 = 8\pi G$), g es el determinante de la métrica espacio-temporal $g_{\mu\nu}$, la cual es a priori independiente de la conexión afín $\Gamma \equiv \Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ (formalismo de Palatini, o métrico-afín), con el tensor de Ricci dado por $R_{\mu\nu}(\Gamma) \equiv R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}(\Gamma)$. Al tratar en este trabajo con campos bosónicos mínimamente acoplados, la torsión puede considerarse nula [9] y podemos entonces considerar únicamente la parte simétrica del tensor de Ricci ² en la acción (6.1). La densidad Lagrangiana RBG \mathcal{L}_G se construye en términos de potencias de la traza del objeto $M^\mu{}_\nu \equiv g^{\mu\alpha} R_{\alpha\nu}$ lo cual incluye como ejemplos particulares la propia RG, gravedad $f(R)$, gravedades cuadráticas en el tensor de Ricci, o la propia gravedad GBI y sus extensiones [58], entre muchas otras. Finalmente, el Lagrangiano de materia \mathcal{L}_m se considera dependiente

²Estas condiciones garantizan la invariancia de las teorías consideradas bajo transformaciones de proyectividad, $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \rightarrow \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \xi_\mu \delta_\nu^\lambda$, donde ξ_μ es una uno-forma arbitraria asociada a la libertad de gauge en la parametrización de las trayectorias de las partículas. Esto salvaguarda la teoría frente a grados de libertad de tipo “ghost-like” asociados al sector no invariante bajo transformaciones de proyectividad ver [52, 53] para más detalles.

de la métrica y de los campos de materia ψ_m , pero no de la conexión, de acuerdo con el principio de equivalencia,[366].

Como ha sido deducido en otras secciones de esta tesis y en [58], las ecuaciones de campo de cualquier teoría RBG definida por la acción (6.1) pueden escribirse como:

$$G^\mu{}_\nu(q) = \frac{\kappa^2}{|\hat{\Omega}|^{1/2}} \left[T^\mu{}_\nu - \delta^\mu{}_\nu \left(\mathcal{L}_G + \frac{T}{2} \right) \right], \quad (6.2)$$

donde $T_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}}$ es el tensor energía-momento de la materia y $T \equiv g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$ su traza. Aquí $q_{\mu\nu}$ representa la métrica del EF, la cual es compatible con la conexión independiente, esto es, $\nabla_\mu^\Gamma(\sqrt{-q} q^{\alpha\beta}) = 0$. Esta métrica se relaciona con la métrica espacio-temporal $g_{\mu\nu}$, que es la que se acopla a los campos de materia (ver Ec.(6.1)), mediante una relación de la forma:

$$q_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} \Omega^\alpha{}_\nu, \quad (6.3)$$

donde $\hat{\Omega} \equiv \Omega^\alpha{}_\nu$ es la matriz de deformación (a partir de aquí el símbolo $\hat{}$ se usará para denotar una matriz y las barras verticales su correspondiente determinante), y cuya forma explícita depende del particular \mathcal{L}_G elegido, pero que siempre puede escribirse “on-shell” como función de los campos de materia y (posiblemente) de la métrica espacio-temporal (lo mismo se aplica al propio Lagrangiano \mathcal{L}_G). Las ecuaciones de campo (6.2) se caracterizan por ser de segundo orden e independientes de gauge y recuperan las soluciones RG en el vacío (ya que en ese caso $T^\mu{}_\nu = 0$ lo que implica $R^\mu{}_\nu(q) = 0$ y $q_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$, salvo reescalado por una constante trivial), y propagan dos polarizaciones tensoriales del campo gravitatorio (ondas gravitatorias) que viajan a la velocidad de la luz.

6.2.2 “Mapping” con fluidos anisótropos

La forma de las ecuaciones de campo (6.2) parecen invitarnos a reescribirlas bajo la forma Einsteiniana estandard, esto es:

$$G^\mu{}_\nu(q) = \kappa^2 \bar{T}^\mu{}_\nu(q), \quad (6.4)$$

donde a partir de (6.2) el nuevo tensor energía-momento viene dado por:

$$\bar{T}^\mu{}_\nu(q) = \frac{1}{|\hat{\Omega}|^{1/2}} \left[T^\mu{}_\nu - \delta^\mu{}_\nu \left(\mathcal{L}_G + \frac{T}{2} \right) \right]. \quad (6.5)$$

Si es factible encontrar un $\bar{T}^\mu{}_\nu(q)$ tal que su dependencia en $g_{\mu\nu}$ pueda ser eliminada completamente y sustituida por una dependencia de $q_{\mu\nu}$ y en los campos de materia, podría

entonces establecerse una correspondencia entre la teoría original RBG y la RG. Para ilustrar como puede realizarse esta correspondencia, consideremos el acoplamiento de una teoría RBG generica a una fuente de materia representada por un fluido anisótropo cuyo tensor energía-momento es de la forma:

$$T^{\mu}_{\nu} = (\rho + p_{\perp})u^{\mu}u_{\nu} + p_{\perp}\delta^{\mu}_{\nu} + (p_r - p_{\perp})\chi^{\mu}\chi_{\nu}, \quad (6.6)$$

donde se han introducido los vectores normalizados $g_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu} = -1$ y $g_{\mu\nu}\chi^{\mu}\chi^{\nu} = +1$ de tipo temporal y espacial mientras que ρ es la densidad de energía del fluido, p_r su presión en la dirección de χ^{μ} , y $p_{\perp}(r)$ su presión tangencial en la dirección ortogonal a χ^{μ} . Como veremos, los campos eléctricos (entre otros muchos ejemplos) pueden ser descritos como fluidos anisótropos con la estructura anterior. Esto facilitara nuestro análisis de las soluciones con carga eléctrica.

Asumiendo ahora la existencia de otro fluido anisótropo en el EF (6.4), dado asimismo por Ec.(6.6), pero con un conjunto de nuevas funciones $\{\rho^q, p_r^q, p_{\perp}^q\}$, es decir:

$$\bar{T}^{\mu}_{\nu} = (\rho^q + p_{\perp}^q)v^{\mu}v_{\nu} + p_{\perp}^q\delta^{\mu}_{\nu} + (p_r^q - p_{\perp}^q)\xi^{\mu}\xi_{\nu}, \quad (6.7)$$

y con nuevos vectores de tipo temporal, $q_{\mu\nu}v^{\mu}v^{\nu} = -1$, y espacial $q_{\mu\nu}\xi^{\mu}\xi^{\nu} = +1$ con lo cual las relaciones (6.5) toman la forma explícita:

$$p_{\perp}^q = \frac{1}{|\hat{\Omega}|^{1/2}} \left[\frac{\rho - p_r}{2} - \mathcal{L}_G \right] \quad (6.8)$$

$$\rho^q + p_{\perp}^q = \frac{\rho + p_{\perp}}{|\hat{\Omega}|^{1/2}} \quad (6.9)$$

$$p_r^q - p_{\perp}^q = \frac{p_r - p_{\perp}}{|\hat{\Omega}|^{1/2}}. \quad (6.10)$$

Estas relaciones escalares deben ser suplementadas con las relaciones $u^{\mu}u_{\nu} = v^{\mu}v_{\nu}$ y $\chi^{\mu}\chi_{\nu} = \xi^{\mu}\xi_{\nu}$. Y es sencillo verificar que para un fluido anisótropo y un Lagrangiano RBG dado, Ω^{μ}_{ν} en Ec.(6.3) siempre puede escribirse como:

$$\Omega^{\mu}_{\nu} = \alpha\delta^{\mu}_{\nu} + \beta u^{\mu}u_{\nu} + \gamma\chi^{\mu}\chi_{\nu}, \quad (6.11)$$

o, equivalentemente, como:

$$\Omega^{\mu}_{\nu} = \alpha\delta^{\mu}_{\nu} + \beta v^{\mu}v_{\nu} + \gamma\xi^{\mu}\xi_{\nu}, \quad (6.12)$$

donde α , β , y γ son funciones de las variables ρ, p_r, p_\perp o, equivalentemente, de ρ^q, p_r^q, p_\perp^q . La forma explícita de estas funciones depende del Lagrangiano RBG específico que se considere.

6.2.3 Ejemplo: GBI con campos electromagnéticos

Para trabajar en un escenario explícito, consideremos la gravedad GBI, cuya acción puede ser expresada como:[58]

$$\mathcal{S}_{EiBI} = \frac{1}{\kappa^2 \varepsilon} \int d^4x (\sqrt{-q} - \lambda \sqrt{-g}) . \quad (6.13)$$

Aquí $q_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} + \varepsilon R_{\mu\nu}(\Gamma)$ indica la métrica compatible con la conexión, es decir $\nabla_\mu^\Gamma(\sqrt{-q} q^{\alpha\beta}) = 0$, y ε es un parámetro con dimensiones de longitud al cuadrado, de forma que una expansión perturbativa en serie de $|R_{\mu\nu}| \ll 1/\varepsilon$ lleva (6.13) a:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{EiBI} &\approx \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{2\kappa^2} - \Lambda_{eff} \right) \\ &- \frac{\varepsilon}{4\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{R^2}{2} + R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) , \end{aligned} \quad (6.14)$$

la cual no es otra cosa que la RG con una constante cosmológica efectiva dada por $\Lambda_{eff} = \frac{\lambda-1}{\kappa^2 \varepsilon}$, más correcciones cuadráticas en la curvatura. Para la acción (6.13) la matriz de deformación viene dada por la relación [58]:

$$|\hat{\Omega}|^{1/2} (\Omega^{-1})^\mu{}_\nu = \lambda \delta^\mu{}_\nu - \kappa^2 \varepsilon T^\mu{}_\nu , \quad (6.15)$$

mientras que el Lagrangiano GBI puede ser convenientemente expresado como:

$$\mathcal{L}_G = \frac{|\hat{\Omega}|^{1/2} - \lambda}{\kappa^2 \varepsilon} . \quad (6.16)$$

Usando Ec.(6.15) y la expresión del tensor energía-momento (6.6), es directo obtener:

$$\begin{aligned} |\hat{\Omega}|^{1/2} (\Omega^\mu{}_\nu)^{-1} &= (\lambda - \varepsilon \kappa^2 p_\perp) \delta^\mu{}_\nu \\ &- \kappa^2 \varepsilon [(\rho + p_\perp) u^\mu u_\nu + (p_r - p_\perp) \chi^\mu \chi_\nu] , \end{aligned} \quad (6.17)$$

que siempre puede expresarse en función de las variables propias del EF Ecs.(6.8), (6.9) y (6.10) como:

$$\begin{aligned} (\Omega^\mu{}_\nu)^{-1} &= \left(1 - \frac{\varepsilon\kappa^2}{2}[\rho^q - p_r^q]\right) \delta^\mu{}_\nu \\ &- \kappa^2\varepsilon [(\rho^q + p_\perp^q)v^\mu v_\nu + (p_r^q - p_\perp^q)\xi^\mu \xi_\nu] . \end{aligned} \quad (6.18)$$

Usando la relación fundamental (6.3), la métrica espacio-temporal en el lado RBG se escribe como:

$$g_{\mu\nu} = \left(1 - \frac{\varepsilon\kappa^2}{2}[\rho^q - p_r^q]\right) q_{\mu\nu} - \kappa^2\varepsilon [(\rho^q + p_\perp^q)v_\mu v_\nu + (p_r^q - p_\perp^q)\xi_\mu \xi_\nu] . \quad (6.19)$$

Esta relación es muy importante, pues proporciona una solución para la gravedad GBI partiendo de cualquier solución conocida en RG que pueda ser expresada en términos de fluidos anisótropos.

Como las densidades Lagrangianas de materia propias tanto del marco RBG como del lado RG son por lo general no lineales, consideremos entonces la electrodinámica no lineal (NED), que puede definirse en términos de una densidad Lagrangiana $\psi(X, Y)$, donde $X = -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ y $Y = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}*F^{\mu\nu}$ son los dos invariantes de campo que pueden construirse a partir del tensor campo electromagnético $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ y su dual $*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$, donde A_μ es el potencial vector. Campos electrostáticos y con simetría esférica tienen una sola componente independiente no nula $F_{tr} \neq 0$ (ya que $Y = 0$) y pueden interpretarse como fluidos que satisfacen $p_r = -\rho$ y $p_\perp = K(\rho)$, donde la función $K(\rho)$ caracteriza implícitamente la electrodinámica correspondiente mediante las identificaciones [11]:

$$\psi(X) = 8\pi K(\rho) \quad (6.20)$$

$$\psi - 2X\psi_X = -8\pi\rho . \quad (6.21)$$

Ahora las ecuaciones del “mapping” (6.8), (6.9) y (6.10) para esta combinación de gravedad GBI (6.13) con campos electrostáticos (aquí las tildes representan un factor implícito $\varepsilon\kappa^2$) [11]:

$$\tilde{\rho}_{\text{BI}} = \frac{\lambda\tilde{\rho}_{\text{GR}} - (\lambda - 1)}{1 - \tilde{\rho}_{\text{GR}}} \quad (6.22)$$

$$\tilde{K}_{\text{BI}} = \frac{\lambda\tilde{K}_{\text{GR}} + (\lambda - 1)}{1 + \tilde{K}_{\text{GR}}} . \quad (6.23)$$

Estas ecuaciones implican que, en general cualquier fuente de materia descrita por una NED en el lado RBG definida por \tilde{K}_{BI} , será mapeada en una electrodinámica no lineal diferente en el lado RG \tilde{K}_{GR} . Esto puede ser probado de manera general, no solo para configuraciones con simetría esférica [12]. Seamos más concretos y consideremos la electrodinámica standard de Maxwell en el lado RG, $\psi_{\text{GR}}(X) = X$, la cual satisface la relación $\tilde{K}_{\text{GR}} = \tilde{\rho}_{\text{GR}}$. Entonces Ecs.(6.22) y (6.23) implican (a partir de este punto nos restringiremos a soluciones asintóticamente planas, $\lambda = 1$):

$$\tilde{K}_{\text{BI}} = \frac{\tilde{\rho}_{\text{BI}}}{1 + 2\tilde{\rho}_{\text{BI}}} . \quad (6.24)$$

Con el fin de obtener el modelo NED asociado a este fluido, escribamos las relaciones (6.20) y (6.21) como:

$$\psi = 8\pi \frac{\rho_{\text{BI}}}{1 + 2\tilde{\rho}_{\text{BI}}} \quad (6.25)$$

$$\psi - 2X\psi_X = -8\pi\rho_{\text{BI}} . \quad (6.26)$$

La solución a este sistema de ecuaciones es:

$$\psi(X) = \frac{4\pi}{\kappa^2\varepsilon} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\kappa^2\varepsilon}{2\pi}X} \right) , \quad (6.27)$$

donde se ha fijado una constante de integración para poder recuperar el electromagnetismo de Maxwell en el límite $\varepsilon \rightarrow 0$, esto es: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi(X) \approx X$. Conviene darse cuenta de la similitud entre este modelo NED y la teoría del electromagnetismo de Born-Infeld [68] :

$$\psi_{\text{BI}}(X) = 2\beta^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{X}{\beta^2}} \right) . \quad (6.28)$$

Identificando $\beta^2 \rightarrow 2\pi/\kappa^2\varepsilon$ la correspondencia es exacta. Podemos notar que el signo de ε no es necesariamente positivo, mientras que β^2 siempre es una cantidad típicamente positiva en escenarios NED.

Elaboremos un poco más los anteriores resultados. Con el objetivo de generar una solución con rotación en la gravedad GBI comencemos con las soluciones conocidas en RG. En este capítulo usaremos la solución de Kerr-Newman. Esta solución implica un campo eléctrico de Maxwell en rotación, lo que es equivalente a un fluido anisótropo en rotación con $\tilde{K}_{\text{GR}} = \tilde{\rho}_{\text{GR}}$. Mapear esta solución en la gravedad GBI implica su acoplamiento a un modelo NED del

tipo Born-Infeld Ec.(6.27).³ Para ser precisos, encontramos una correspondencia entre :

$$\mathcal{S}_{GR+Max} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} R + \frac{1}{8\pi} \int d^4x \sqrt{-g} X , \quad (6.29)$$

y

$$\mathcal{S}_{EiBI+BI} = \frac{1}{\kappa^2 \varepsilon} \int d^4x \left[\sqrt{-|g_{\mu\nu} + \varepsilon R_{\mu\nu}|} - \sqrt{-g} \right] \quad (6.30)$$

$$+ \frac{1}{8\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \psi_{BI}(X) . \quad (6.31)$$

En trabajos previos sobre campos electrostáticos en gravedad GBI [285] se ha asumido que $\varepsilon < 0$, lo que implica que el correspondiente modelo NED presenta un signo diferente con respecto al modelo NED de Born-Infeld estándar. En [283] el caso de gravedad cuadrática acoplada al modelo NED de Born-Infeld fue objeto de estudio, pero el modelo NED usado en dicha referencia presentaba el signo opuesto al presentado aquí⁴. Puntualicemos que, aunque algunos aspectos del escenario aquí considerado fueron asimismo analizados en Ref. [200], nuestras consideraciones en la siguiente sección ofrecerán información complementaria a la allí presentada, además, permitirá comparar los resultados obtenidos allí por resolución directa y mediante el procedimiento de “mapping” aquí introducido. Este escenario nos ayudará a obtener seguridad acerca del mecanismo del mapping, antes de abordar el caso con rotación.

6.3 Soluciones con simetría esférica de la gravedad GBI acoplada a Born-Infeld NED

6.3.1 Generando las soluciones mediante cálculo directo

Las ecuaciones de campo para un campo de tipo NED libre toman la forma $\partial_\mu (\sqrt{-g} \psi_X F^{\mu\nu}) = 0$ la cual, para campos eléctricos estáticos y con simetría esférica conducen a $X \psi_X^2 = Q^2 / r^4$, donde Q es una constante identificada con la carga eléctrica. Asumiendo un elemento de

³Por lo que respecta este capítulo, hemos demostrado explícitamente la correspondencia entre estas dos teorías para el caso de soluciones con simetría esférica. Puede probarse [288] que este resultado se mantiene independientemente de la simetría asociada al “background” espacio-temporal, lo que garantiza que podemos usar los resultados anteriores con total confianza cuando tratemos soluciones con simetría axial.

⁴En el contexto de modelos NED, la gravedad cuadrática (en escalares de Ricci y Ricci cuadrado) y la gravedad GBI ofrecen exactamente las mismas soluciones electrostáticas, debido al peculiar comportamiento de las potencias del tensor energía-momento en ese caso. Ver [11] para una discusión detallada sobre este punto.

línea para $g_{\mu\nu}$ de la forma:

$$ds_g^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (6.32)$$

Para el modelo NED (6.27), encontramos que la ecuación NED se resuelve como:

$$X = \frac{Q^2}{r^4 + 4sr_c^4}, \quad (6.33)$$

donde hemos introducido la escala $r_c^4 \equiv |\varepsilon|\kappa^2 Q^2/8\pi$ y s corresponde al signo de ε , esto es $\varepsilon = s|\varepsilon|$. Por otra parte, el tensor energía-momento asociado a un modelo NED viene dado por:

$$T^\mu{}_\nu = \frac{1}{8\pi} \begin{pmatrix} (\psi - 2X\psi_X)\hat{I}_{2\times 2} & \hat{0}_{2\times 2} \\ \hat{0}_{2\times 2} & \psi\hat{I}_{2\times 2} \end{pmatrix}, \quad (6.34)$$

donde \hat{I} y $\hat{0}$ son las matrices 2×2 correspondientes a la identidad y a la matriz nula, respectivamente. Sustituyendo el modelo NED de Born-Infeld (6.27) y el invariante (6.33), la anterior expresión se escribe como:

$$T^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} T_+\hat{I}_{2\times 2} & \hat{0}_{2\times 2} \\ \hat{0}_{2\times 2} & T_-\hat{I}_{2\times 2} \end{pmatrix}, \quad (6.35)$$

donde

$$T_+ = +\frac{sQ^2}{16\pi r_c^4} \left(1 - \frac{\sqrt{r^4 + 4sr_c^4}}{r^2} \right) \quad (6.36)$$

$$T_- = -\frac{sQ^2}{16\pi r_c^4} \left(\frac{r^2}{\sqrt{r^4 + 4sr_c^4}} - 1 \right). \quad (6.37)$$

Es fácil ver que las anteriores expresiones recuperan las correspondientes a Maxwell tras una expansión en serie entorno a $r_c \rightarrow 0$. Sustituyéndolas en la definición de la matriz de deformación (6.15), la estructura en bloques 2×2 permanece:

$$\Omega^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \Omega_+\hat{I}_{2\times 2} & \hat{0}_{2\times 2} \\ \hat{0}_{2\times 2} & \Omega_-\hat{I}_{2\times 2} \end{pmatrix}, \quad (6.38)$$

siendo

$$\Omega_+ = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r^2}{\sqrt{r^4 + 4sr_c^4}} \right) \quad (6.39)$$

$$\Omega_- = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{r^4 + 4sr_c^4}}{r^2} \right). \quad (6.40)$$

Las ecuaciones del campo RBG (6.2) se escriben entonces como:

$$R^\mu{}_\nu(q) = \frac{\kappa^2}{|\hat{\Omega}|^{1/2}} \begin{pmatrix} (\mathcal{L}_G + T_+) \hat{I}_{2 \times 2} & \hat{0} \\ \hat{0} & (\mathcal{L}_G + T_-) \hat{I}_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad (6.41)$$

donde $|\hat{\Omega}|^{1/2} = \Omega_+ \Omega_-$, con las anteriores expresiones para T_\pm y Ω_\pm , mientras que el Lagrangiano GBI \mathcal{L}_G viene dado por Ec.(6.16). Como en la expresión (6.41) el lado derecho contiene la coordenada radial de la métrica $g_{\mu\nu}$, mientras que el lado izquierdo se refiere a la métrica $q_{\mu\nu}$, necesitamos desarrollar la relación entre ambas. Para ello, introducimos el elemento de línea para la métrica $q_{\mu\nu}$ como:

$$ds_q^2 = -C(x)e^{2\psi(x)} dt^2 + \frac{1}{C(x)} dx^2 + x^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (6.42)$$

Comparando los sectores angulares de (6.42) y (6.32) mediante la relación fundamental (6.3) con la estructura (6.38) aplicada a nuestro caso, encontramos $x^2 = \Omega_- r^2$, lo que nos lleva a las expresiones:

$$r^2 = \frac{x^4 - sr_c^4}{x^2} \quad (6.43)$$

$$x^2 = \frac{1}{2} \left(r^2 + \sqrt{r^4 + 4sr_c^4} \right). \quad (6.44)$$

Por otra parte, a partir de la estructura en bloques 2×2 de las ecuaciones de campo (6.41) podemos considerar la substracción $R^t{}_t(q) - R^x{}_x(q) = 0$ que nos lleva a $\psi(x) = \text{constante}$, dicha constante siempre puede considerarse cero mediante una redefinición de la coordenada temporal sin pérdida de generalidad. Consideremos ahora el “ansatz” estandar para la función masa:

$$C(x) = 1 - \frac{2M(x)}{x}, \quad (6.45)$$

la componente R^θ_θ de las ecuaciones de campo (6.41) nos lleva a :

$$\frac{2M_x}{x^2} = \frac{\kappa^2}{\sqrt{|\Omega|}} (\mathcal{L}_G + T_-), \quad (6.46)$$

que, en términos de la variable r , se puede escribir usando (6.43), como:

$$\begin{aligned} M_r &= \frac{\kappa^2 \Omega_-^{1/2}}{2\Omega_+} (\mathcal{L}_G + T_-) r^2 \left[1 + \frac{r}{2} \frac{\Omega_{-,r}}{\Omega_-} \right] \\ &= \frac{\kappa^2 Q^2}{8\pi\sqrt{2}} \frac{r \sqrt{r^2 + \sqrt{r^4 + 4r_c^4 s}}}{\left(r^2 \left(r^2 + \sqrt{r^4 + 4r_c^4 s} \right) + 4r_c^4 s \right)}. \end{aligned} \quad (6.47)$$

La integración de esta función es directa y nos lleva a:

$$M(r) = M_0 - \frac{\kappa^2 Q^2}{8\pi\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{r^2 + \sqrt{r^4 + s4r_c^4}}}, \quad (6.48)$$

donde M_0 es una constante de integración que se puede identificar con la masa asintótica de Schwarzschild. Es interesante darse cuenta de que usando (6.44) la función de masa anterior se convierte en:

$$M(r(x)) = M_0 - \frac{\kappa^2 Q^2}{16\pi x}, \quad (6.49)$$

que no es más que la función de masa de Reissner-Nordström en términos de la coordenada radial x . Finalmente, la expresión completa de la métrica espacio-temporal se puede calcular usando de nuevo (6.3) como:

$$ds^2 = -\frac{C(x)}{\Omega_+} dt^2 + \frac{dx^2}{C(x)\Omega_+} + r^2(x)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (6.50)$$

donde $C(x)$ viene dada por (6.45) para la función de masa (6.49) y $r^2(x)$ viene dada por (6.43), mientras que las funciones Ω_\pm (6.39) y (6.40) se pueden expresar directamente en términos de la coordenada x como:

$$\Omega_+ = \frac{1}{1 + \frac{sr_c^4}{x^4}} \quad (6.51)$$

$$\Omega_- = \frac{1}{1 - \frac{sr_c^4}{x^4}}. \quad (6.52)$$

Lo que completa la construcción de las soluciones por cálculo directo. Nótese que para $r_c \rightarrow 0$, recuperamos la solución Reissner-Nordström de RG, como era esperable.

6.3.2 Generando las soluciones via “mapping”

Consideremos ahora la ecuación (6.19) con el objetivo de derivar las soluciones anteriores utilizando la solución Reissner-Nordström habitual de RG a modo de solución semilla. En el EF la métrica $q_{\mu\nu}$ viene dada por la ecuación (6.42) con la funciones que caracterizan la métrica:

$$\psi = 0 ; C(x) = 1 - \frac{r_S}{x} + \frac{r_q^2}{2x^2}, \quad (6.53)$$

donde $r_S \equiv 2M_0$ es el radio de Schwarzschild y $r_q^2 = \kappa^2 Q^2 / (4\pi)$ el radio asociado a la carga. Para el electromagnetismo de Maxwell tenemos que las componentes del fluido anisótropo equivalente vienen dadas por:

$$\rho^q = \frac{r_q^2}{2\kappa^2 x^4} \quad (6.54)$$

$$p_{\perp}^q = \rho^q = -p_r^q \quad (6.55)$$

$$v_{\mu} = (-C(x)^{1/2}, 0, 0, 0) \quad (6.56)$$

$$\xi_{\mu} = (0, C(x)^{-1/2}, 0, 0). \quad (6.57)$$

Con estas definiciones y usando la Ec. (6.18), para un campo de Maxwell las funciones Ω_{\pm} toman la forma:

$$\Omega_+ = \frac{1}{1 + \epsilon \kappa^2 \rho^q} \quad (6.58)$$

$$\Omega_- = \frac{1}{1 - \epsilon \kappa^2 \rho^q}. \quad (6.59)$$

Se puede comprobar fácilmente que estas expresiones coinciden con las dadas en (6.51) y (6.52) cuando ρ^q se escribe usando (6.54). Es pues inmediato comprobar que las funciones de la métrica en (6.32) nos llevan a $A(r(x)) = C(x)/\Omega_+$, $B(r(x)) = (dx/dr)^2 / (C(x)\Omega_+)$, y $r^2(x) = x^2/\Omega_-$, en completo acuerdo con el elemento de línea (6.50) y las definiciones introducidas hasta ahora.

Esto verifica que no sólo la teoría de Maxwell acoplada a RG, definida en la acción (6.29), se mapea en un modelo NED de tipo Born-Infeld acoplado a la gravedad GBI definida por la acción (6.30), sino que también sus soluciones se correlacionan entre sí. Realizada la comprobación para configuraciones electrostáticas. Estudiemos a continuación

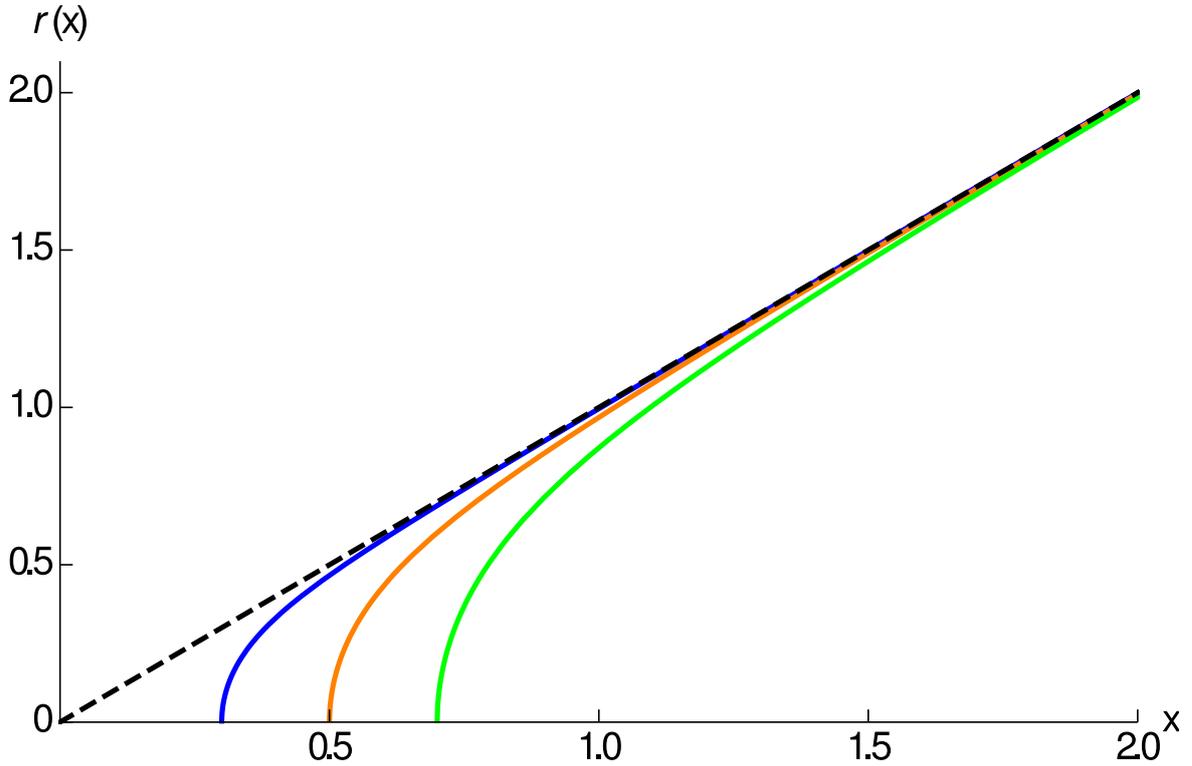


Fig. 6.1 Función radial $r(x)$ para el caso $s = +1$. De izquierda a derecha, las curvas representan $r_c = 0$ (caso RG, $r = x$, negro punteado), $r_c = 0.3$ (azul sólido), $r_c = 0.5$ (naranja sólido) y $r_c = 0.7$ (verde sólido). En cada caso, cuando $x = r_c$, la función radial $r(x)$ se anula, y las soluciones no pueden extenderse más allá de este punto.

las propiedades de dichas configuraciones, lo que nos dará información muy útil antes de abordar la estructura de sus correspondientes contrapartes para el caso con rotación.

6.3.3 Propiedades de las soluciones

A partir de la ecuación Ec.(6.43), la relación entre las funciones radiales en las geometrías $q_{\mu\nu}$ y $g_{\mu\nu}$ depende del signo de ε . Por inspección directa de esta ecuación para el caso $\varepsilon > 0$ (o equivalentemente, $s = +1$), vemos que $r(x)$ es positivo solo si $x > r_c$ como se muestra en la Fig.6.1. Por tanto, el área de las dos esferas $A = 4\pi r^2(x)$, sólo es positiva en esa región, y en consecuencia, la geometría sólo está definida para $x \geq r_c$, con $x = r_c$ representando su centro.

Para el caso $s = -1$, $r(x)$ tiene un mínimo en $x = r_c$, creciendo de nuevo en el intervalo $0 \leq x < r_c$, y tendiendo a infinito cuando $x \rightarrow 0$. El rebote en la función $r(x)$ señala la existencia de una estructura de tipo agujero de gusano [354], con la garganta localizada en $x = r_c$ (donde $r = \sqrt{2}r_c$), como es evidente de la figura 6.2. Dos comentarios son pertinentes

al respecto: Primero, a diferencia de otros agujeros de gusano encontrados en problemas previamente abordados en el enfoque de Palatini [279], aquí la coordenada x no se extiende sobre todo el eje real, lo que significa que estamos en presencia de una estructura de tipo agujero de gusano asimétrica. En segundo lugar, para escalas mucho mayores que r_c , es fácil comprobar que (6.50) recupera la solución de Reissner-Nordström (6.53) propia de RG ya que $\Omega_{\pm} \rightarrow 1$, esto significa que nuestra solución solo difiere de los resultados bien conocidos en RG en aquellas escalas en las que Ω_{\pm} se aleja de dicho límite (lo cual es válido para ambas ramas $s = \pm 1$). Por lo tanto, las soluciones así obtenidas en la escala astrofísica es de esperar que sean muy similares a las de agujero negro con carga en RG, pero con pequeñas correcciones, y eso sí, con una estructura de tipo agujero de gusano al acecho en su interior.

6.3.4 Horizontes

Por cálculo directo es inmediato comprobar que la norma de los vectores perpendiculares a las hipersuperficies $x = \text{constante}$, $n^{\mu} \equiv g^{\mu\nu} \partial_{\nu} x$, viene dada por:

$$n^{\mu} n_{\mu} = \frac{x^2 (r_q^2/2 + x^2 - r_s x)}{(x^4 + s r_c^4)}, \quad (6.60)$$

que, en general, es nula en:

$$x_{\pm}^{RN} = \frac{r_s \pm \sqrt{r_s^2 - 2r_q^2}}{2} = M \pm \sqrt{M^2 - \frac{\kappa^2 Q^2}{8\pi}}, \quad (6.61)$$

donde $x = x_{\pm}^{RN}$ representa la posición de los horizontes habituales de la solución Reissner-Nordström. La componente $g_{tt}(x)$ de la métrica definida en la ecuación (6.50) se puede expresar explícitamente en términos de la coordenada x como:

$$g_{tt}(x) = - \left(1 + s \frac{r_c^4}{x^4} \right) \left(1 - \frac{r_s}{x} + \frac{r_q^2}{2x^2} \right), \quad (6.62)$$

Consideremos primero el caso $\varepsilon > 0$ ($s = +1$). Teniendo en cuenta que el término dentro del primer paréntesis en (6.62) es siempre finito y positivo, la estructura de horizontes viene controlada por el término dentro del segundo paréntesis (similar a Reissner-Nordström), y como $x \geq r_c$ este término será también siempre finito y, además, sus raíces se corresponden con las de x_{\pm}^{RN} en Ec.(6.61). Por lo tanto, existen varias configuraciones posibles dependiendo de la elección de los parámetros del agujero negro y el parámetro característico de la gravedad GBI $|\varepsilon|$. La discusión se simplifica si se escribe la posición de los horizontes en términos

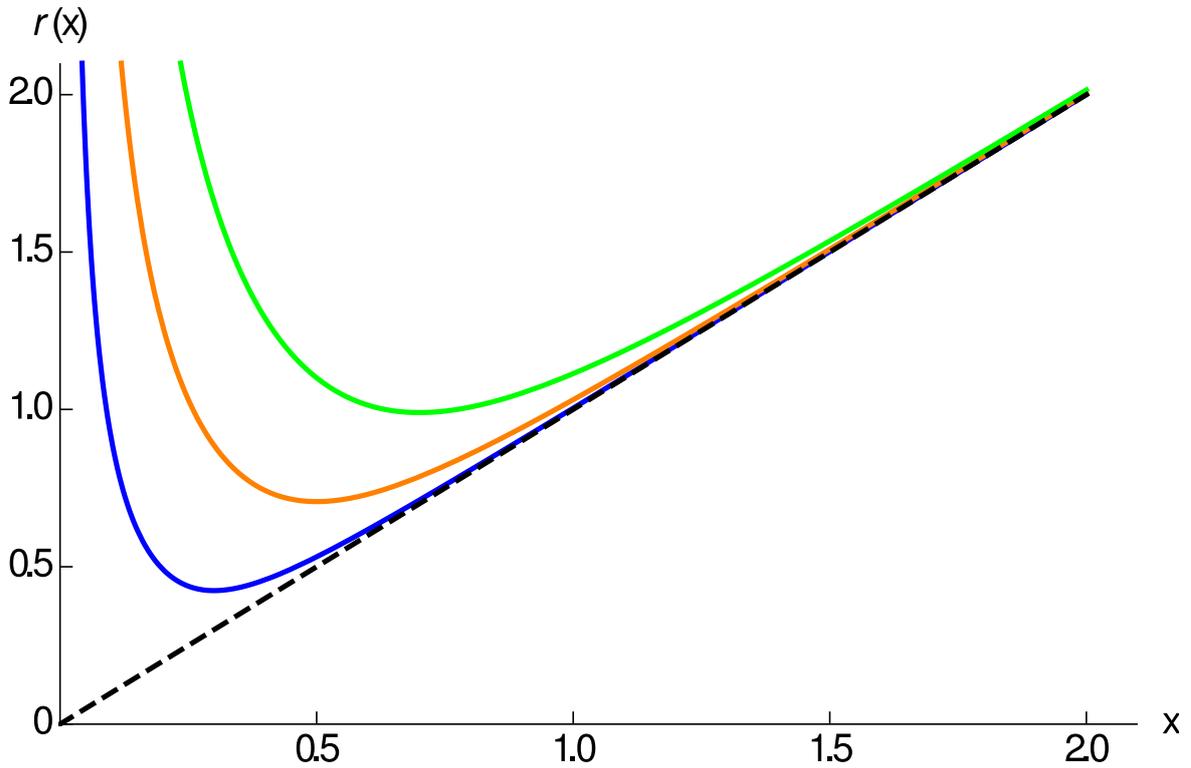


Fig. 6.2 Función radial $r(x)$ para el caso $s = -1$. Con la misma notación que en la figura 6.1. En este caso se produce un rebote en $x = r_c$ y para cada valor de r_c se señala la presencia de la garganta del agujero de gusano.

de $r(x)$ como $r_{\pm} = \sqrt{(x_{\pm}^{RN})^4 - r_c^4/x_{\pm}^{RN}}$. Lo que muestra claramente que cuando $x_{\pm}^{RN} > r_c$, se tienen soluciones tipo Reissner-Nordström con dos horizontes, un horizonte único pero degenerado (correspondiente a agujeros negros extremos) o completamente desprovistas de horizontes (soluciones desnudas). Para $x_{-}^{RN} < r_c < x_{+}^{RN}$, las soluciones son de tipo agujero negro de Schwarzschild con un único horizonte no degenerado. Finalmente, para $x_{\pm}^{RN} < r_c$ las soluciones no tienen horizontes. Para todos estos casos, la componente $g_{tt}(r)$ de la métrica es finita en $r = 0$ para cualquier valor de $r_c \neq 0$, tal y como se muestra en la figura 6.3. Asimismo, es interesante mencionar que esta estructura de horizonte es similar a la de ciertas familias de modelos NED acoplados a RG [124].

Para el caso $s = -1$, tenemos que $g_{tt}(x)$ se anula siempre en $x = r_c$, lo que puede comprobarse directamente de la ecuación (6.62). Sin embargo, no está claro si tal punto es una hipersuperficie nula o no ya que la norma (6.60) es allí divergente. Teniendo en cuenta que el vector de Killing temporal ∂_t siempre tiene norma nula en $x = r_c$ y que $n^{\mu}n_{\mu}$ cambia de signo en esta hipersuperficie, es conveniente reescribir la ecuación (6.50) en las

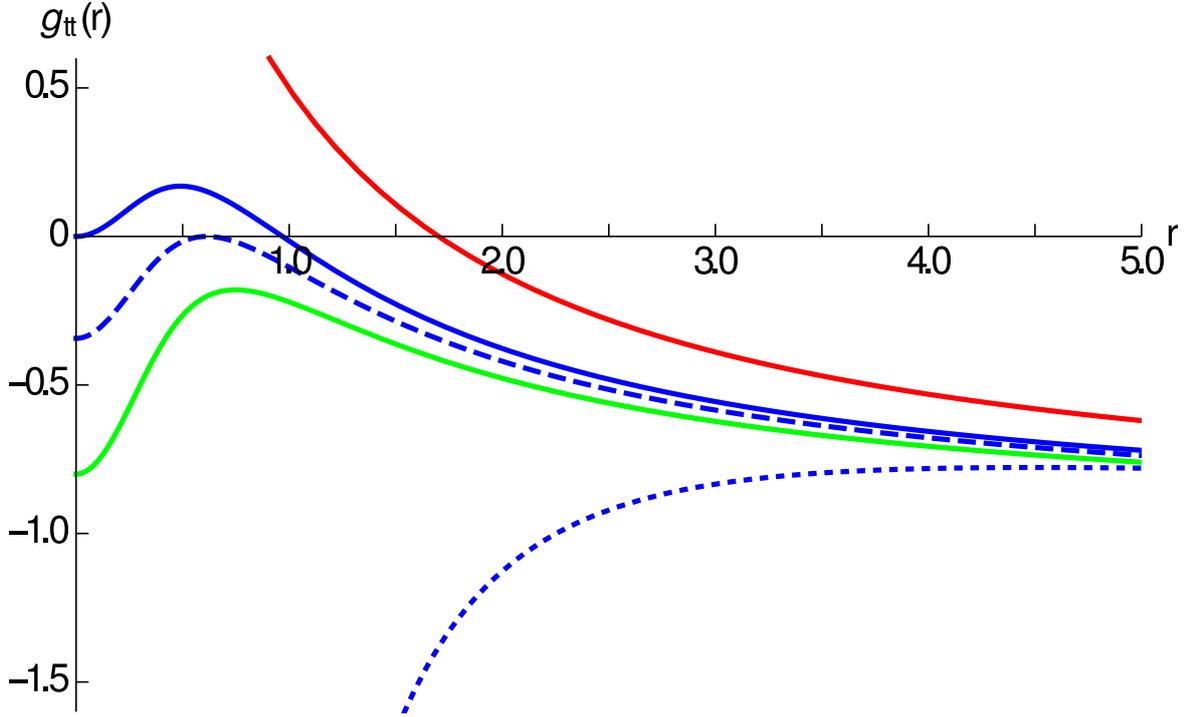


Fig. 6.3 Componente $g_{tt}(r)$, de la métrica. Para el caso $s = +1$ y $r_c = 0,5$. Encontramos i) soluciones tipo Reissner-Nordström con dos horizontes (azul sólido, $r_q = 1, r_s = 1.5$), un solo horizonte degenerado (azul discontinuo, $r_q = 1, r_s = \sqrt{2}$) y sin horizontes (azul punteado, $r_q = 3, r_s = 2$); ii) Soluciones tipo Schwarzschild con un solo horizonte (rojo, $r_q = 1, r_s = 2$); iii) soluciones sin horizontes (verde, $r_q = 0,5, r_s = 1,3$). Todas las soluciones son asintóticamente planas, $g_{tt} \rightarrow -1$ cuando $r \rightarrow \infty$.

coordenadas de Eddington-Finkelstein como:

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{sr_c^4}{x^4} \right) C(x) dv^2 + 2 \left(1 + \frac{sr_c^4}{x^4} \right) dv dx \quad (6.63)$$

$$+ r^2(x) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (6.64)$$

Ahora es evidente que para $s = -1$ la métrica es singular en $x = r_c$, lo que podría ser la causa de las patologías en la norma de las hipersuperficies $x = \text{constante}$. Podemos por lo tanto suponer que x no es una buena coordenada en $x = r_c$ por lo que una nueva coordenada $y(x)$ definida por $\pm \left(1 - \frac{r_c^4}{x^4} \right) dx = dy$ podría solucionar el problema en la métrica, con el signo positivo correspondiendo a $x > r_c$ y el negativo a $x < r_c$ para garantizar que la función y sea

monótona. El correspondiente cambio de coordenadas viene dado por:

$$y = \begin{cases} x + \frac{r_c^4}{3x^3} & \text{if } x \geq r_c \\ \frac{8}{3}r_c - \left(x + \frac{r_c^4}{3x^3}\right) & \text{if } 0 < x \leq r_c \end{cases}, \quad (6.65)$$

y la ecuación (6.63) pasa a escribirse como:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_c^4}{x(y)^4}\right) C[x(y)] dv^2 + 2dvdy \\ + \left(x(y)^2 + \frac{r_c^4}{x(y)^2}\right) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (6.66)$$

que ahora es no singular en $y(x = r_c) = 4r_c/3$. Se puede comprobar que la norma del vector perpendicular a la hipersuperficie $y = \text{constante}$ ⁵ viene ahora dada por:

$$\tilde{n}^\mu \tilde{n}_\mu = \left(1 - \frac{r_c^4}{x(y)^4}\right) \frac{(x(y) - x_+^{RN})(x(y) - x_-^{RN})}{2x^2}, \quad (6.67)$$

y claramente se anula en $x = x_\pm^{RN}$ y en $x = r_c$, siendo esto último inevitable mientras la carga eléctrica no sea nula. Como comparación con el caso $s = +1$, en Fig.6.4 se representa la componente g_{tt} como una función de la coordenada radial $r(x)$, donde observamos que esta componente de la métrica es cero en la garganta del agujero de gusano, $x = r_c$ o $r = \sqrt{2}r_c$, como era esperable .

6.3.5 Curvaturas

Un vistazo al comportamiento de los escalares de curvatura proporciona información útil adicional. De hecho, para $\varepsilon > 0$ se puede comprobar que los escalares de Ricci y Ricci cuadrado divergen en $x = r_c$, el primero como $R \sim 1/(x - r_c)^2$ y el último como $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} \sim 1/(x - r_c)^4$. Para $\varepsilon < 0$, se encuentra en cambio $R \sim 1/(x - r_c)^3$ y $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} \sim 1/(x - r_c)^6$.

Curiosamente, ese comportamiento general puede suavizarse con una elección específica de parámetros. En efecto, si establecemos:

$$r_S \equiv r_c + \frac{r_c^2}{2r_c}, \quad (6.68)$$

⁵Cabe señalar asimismo que este resultado es equivalente, salvo una constante, al de las hipersuperficies de área constante $A = 4\pi x^2(1 + r_c^4/x^4)$.

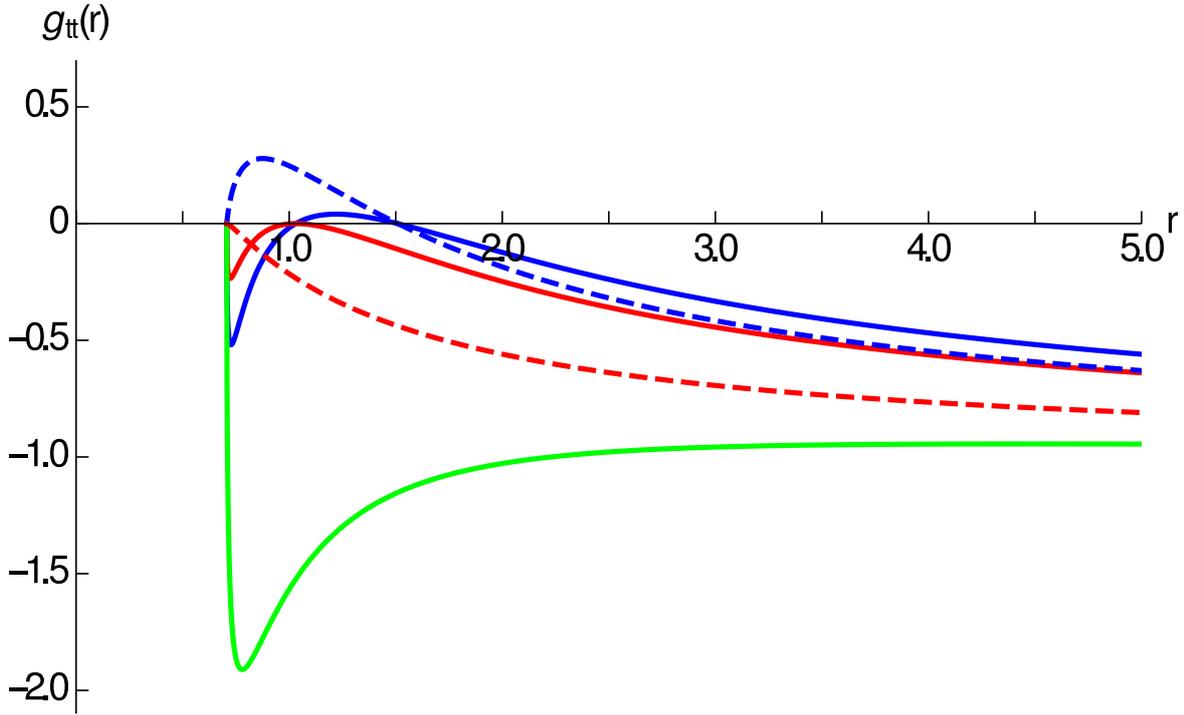


Fig. 6.4 Componente $g_{tt}(r)$ de la métrica para el caso $s = -1$, $r_c = 0.5$ y valores de $r_q = \sqrt{3}$, $r_s = 2.5$ (azul sólido); $r_q = \sqrt{1.5}$, $r_s = 2$ (azul discontinuo); $r_q = \sqrt{2}$, $r_s = 2$ (rojo sólido); $r_q = 1/\sqrt{2}$, $r_s = 1$ (rojo discontinuo) y $r_q = 3/2$, $r_s = 1/2$ (verde).

entonces para ambos signos de ε tenemos $R \sim 1/(x - r_c)$ y $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} \sim 1/(x - r_c)^2$. Además, para esa elección de r_s , se tiene:

$$x_-^{RN} = r_c \quad \text{and} \quad x_+^{RN} = \frac{r_q^2}{2r_c} \quad (6.69)$$

con $r_s = r_c + x_+^{RN} > r_c$. Teniendo en cuenta que estas cantidades están completamente determinadas por la carga (recordemos que $r_q^2 \equiv \kappa^2 Q^2 / 4\pi$ y $r_c^4 \equiv |\varepsilon| r_q^2 / 2$), cuando $s = +1$, x_+^{RN} representa un horizonte externo, mientras que $x = x_-^{RN}$ representa un horizonte interno, situado justo en el centro del objeto (área nula). Para $s = -1$, un vistazo a la ecuación (6.67) muestra que el vector perpendicular en $x = x_-^{RN} = r_c$ tiene norma nula y, por lo tanto, puede considerarse como un horizonte interno. Estas soluciones se caracterizan así por dos horizontes. Dado que $r_c^4 \equiv |\varepsilon| r_q^2 / 2$, tenemos que para esta familia de soluciones $x_-^{RN} \sim r_q^{1/2}$ y $x_+^{RN} \sim r_q^{3/2}$ lo que puede dar lugar a configuraciones con $x_-^{RN} > x_+^{RN}$. Así, la garganta del agujero de gusano puede estar dentro del horizonte, si $x_+^{RN} > r_c$, o fuera si $x_+^{RN} < r_c$. La igualdad ocurre cuando la condición extrema $x_+^{RN} = x_-^{RN} = r_c$ se satisface, lo que implica $r_c^2 = r_q^2 / 2$ o, equivalentemente, $r_q \equiv r_q^{ext} = \sqrt{2|\varepsilon|}$.

Volviendo a las curvaturas, si consideramos la restricción adicional:

$$r_q = \sqrt{\frac{22}{17}} r_c = \frac{11}{17} r_q^{ext}, \quad (6.70)$$

en el caso $\varepsilon < 0$ ($s = -1$) los invariantes de curvatura resultan completamente regulares (incluyendo el escalar de Kretschmann), mientras que ninguna elección de r_q puede evitar simultáneamente la divergencia de los dos escalares de curvatura para el caso en que $\varepsilon > 0$ ($s = +1$). Cabe señalar que esta configuración regular en el caso $s = -1$ debe considerarse como microscópica, ya que $|\varepsilon|$ es de esperar que sea una cantidad muy pequeña y estamos asumiendo que (6.68) puede ser al menos de orden r_c .

Como comentario final, notemos que los escalares de curvatura también son finitos cuando $x \rightarrow 0$ en el caso $\varepsilon < 0$, tomando los valores $R = 36/|\varepsilon|$, $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = 396/\varepsilon^2$, y $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}R^{\beta\mu\nu} = 408/\varepsilon^2$, respectivamente.

6.3.6 Gravedad superficial

Desde un punto de vista termodinámico, la gravedad superficial en los horizontes usuales toma la forma:

$$\kappa_\pm = \frac{x_\pm^{RN} - x_\mp^{RN}}{2(x_\pm^{RN})^2}, \quad (6.71)$$

independientemente del signo y valor de ε . Esto significa que la temperatura de estos horizontes, $T_\pm = \kappa_\pm/4\pi$, es exactamente la misma que en RG. Para aquellas configuraciones que satisfacen (6.68), la discusión depende del signo de ε de la siguiente forma.

Si $s = +1$, entonces $x_-^{RN} = r_c$ es una hipersuperficie nula (de área nula, véase la ecuación (6.43)) con una temperatura asociada dada por (6.71). El horizonte externo/interno tiene temperatura positiva/negativa hasta $r_q = \sqrt{2|\varepsilon|} \equiv r_q^{ext}$, lo que define la configuración de temperatura cero (degenerada). Para valores más pequeños de r_q , el horizonte externo desaparece y es el interno (con área nula y situado en $x_-^{RN} = r_c$) el que desarrolla una temperatura positiva. Esta temperatura crece ilimitadamente a medida que la carga llega a cero y r_c se contrae, lo que indica que la configuración extrema debe ser un punto de equilibrio [ver figura 6.5]. Se puede verificar que la entropía asociada a este horizonte se mantiene constante en el valor $S = \pi r_c^2$ independientemente de la temperatura, que diverge como $\sim 1/\sqrt{r_q}$. Obviamente, no hay una interpretación estadística natural de esta entropía en términos de estados microscópicos.

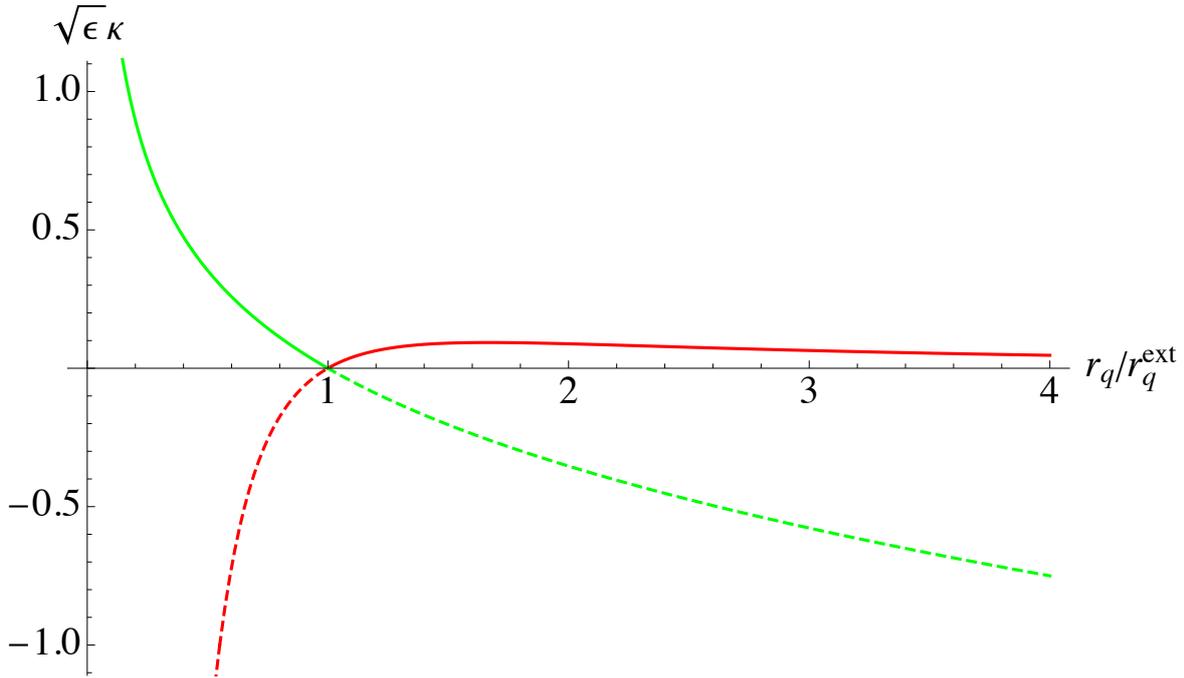


Fig. 6.5 Representación de la gravedad superficial cuando la ecuación (6.68) se cumple. La curva verde representa la temperatura del horizonte interno, κ_- , mientras que la roja corresponde al horizonte externo, κ_+ . Nótese que para $\kappa_+ = \kappa_- = 0$ tenemos el caso extremal ($r_q = \sqrt{2|\epsilon|}$). Recordemos que para esta elección de r_S el horizonte interno está fijado en la posición $x = r_c$.

Cuando $s = -1$, vemos que $x = r_c$ también representa un horizonte de eventos. En este caso, la gravedad de superficie toma la forma general:

$$\kappa_c = \lim_{x \rightarrow r_c} \frac{2r_c^2 + r_q^2 - 2r_c r_S}{4r_c^2(x - r_c)}, \quad (6.72)$$

que siempre es divergente excepto cuando se satisface la condición (6.68). En ese caso, conduce a $\kappa_c = (r_c - r_q^2/2r_c)/r_c^2$, que también se puede expresar como $\kappa_c = (x_-^{RN} - x_+^{RN})/r_c^2$, recuperando así la fórmula general (6.71). Este resultado refuerza aún más el carácter excepcional de las configuraciones que satisfacen la restricción (6.68). Nótese asimismo que el caso de temperatura cero ocurre cuando x_+^{RN} coincide con la garganta del agujero de gusano.

6.3.7 Geodésicas

Para obtener más información sobre la geometría de estas soluciones, centrémonos ahora en su estructura geodésica. La ecuación geodésica para un espacio-tiempo estático y con

simetría esférica estática [279] puede particularizarse para el caso que nos ocupa de la siguiente manera:

$$\left(1 + \frac{sr_c^4}{x^4}\right)^2 \left(\frac{dx}{du}\right)^2 = E^2 - V_{eff}, \quad (6.73)$$

donde u es el parámetro afín y V_{eff} el potencial efectivo, que se obtiene explícitamente como:

$$V_{eff} = \left(1 + \frac{sr_c^4}{x^4}\right) \left(1 - \frac{r_s}{x} + \frac{r_q^2}{2x^2}\right) \left(\frac{L^2 x^2}{x^4 - sr_c^4} - k\right), \quad (6.74)$$

donde E y L son la energía por unidad de masa y el momento angular por unidad de masa, respectivamente, y $k = 0, -1$ para geodésicas nulas y temporales. Para geodésicas radiales y nulas ($k = 0$), ($L = 0$) esta ecuación puede ser integrada exactamente como:

$$x \left(1 - \frac{sr_c^4}{3x^4}\right) = \pm E(u - u_0), \quad (6.75)$$

donde el signo \pm corresponde a geodésicas salientes/entrantes, y u_0 es una constante de integración. A grandes distancias $x \rightarrow \infty$, se encuentra el resultado de RG, $x = \pm E(u - u_0)$.

En el caso $s = +1$, la superficie $x = r_c$ se alcanza en un tiempo afín finito, como ocurría para $x = 0$ en el caso RG y, por tanto, se dice que estas soluciones son geodésicamente incompletas porque alcanzan una divergencia de curvatura y no hay posible extensión adicional más allá de este punto [ver Fig.6.6].

Cuando $s = -1$, la situación requiere un poco más de atención para asegurarnos de que las geodésicas salientes cumplen $dx/du \geq 0$ y las entrantes $dx/du \leq 0$ en todo su dominio. En este sentido, para las geodésicas salientes se tiene:

$$\left(\frac{r_c^4}{x^4} - 1\right) \frac{dx}{du} = E \quad \text{if } x \leq r_c \quad (6.76)$$

$$\left(1 - \frac{r_c^4}{x^4}\right) \frac{dx}{du} = E \quad \text{if } x \geq r_c, \quad (6.77)$$

cuya integración nos lleva a:

$$E \cdot u(x) = \begin{cases} \frac{8r_c}{3} - x \left(1 + \frac{r_c^4}{3x^4}\right) & \text{if } x \leq r_c \\ x \left(1 + \frac{r_c^4}{3x^4}\right) & \text{if } x \geq r_c \end{cases} \quad (6.78)$$

Para las geodésicas entrantes solo tenemos que cambiar el signo de E en la anterior expresión. Como se puede ver en la solución anterior, cuando $x \rightarrow \infty$ tenemos $u(x) \rightarrow +\infty$, mientras que para $x \rightarrow 0$ tenemos $u(x) \rightarrow -\infty$, lo que confirma que estas geodésicas serían completas

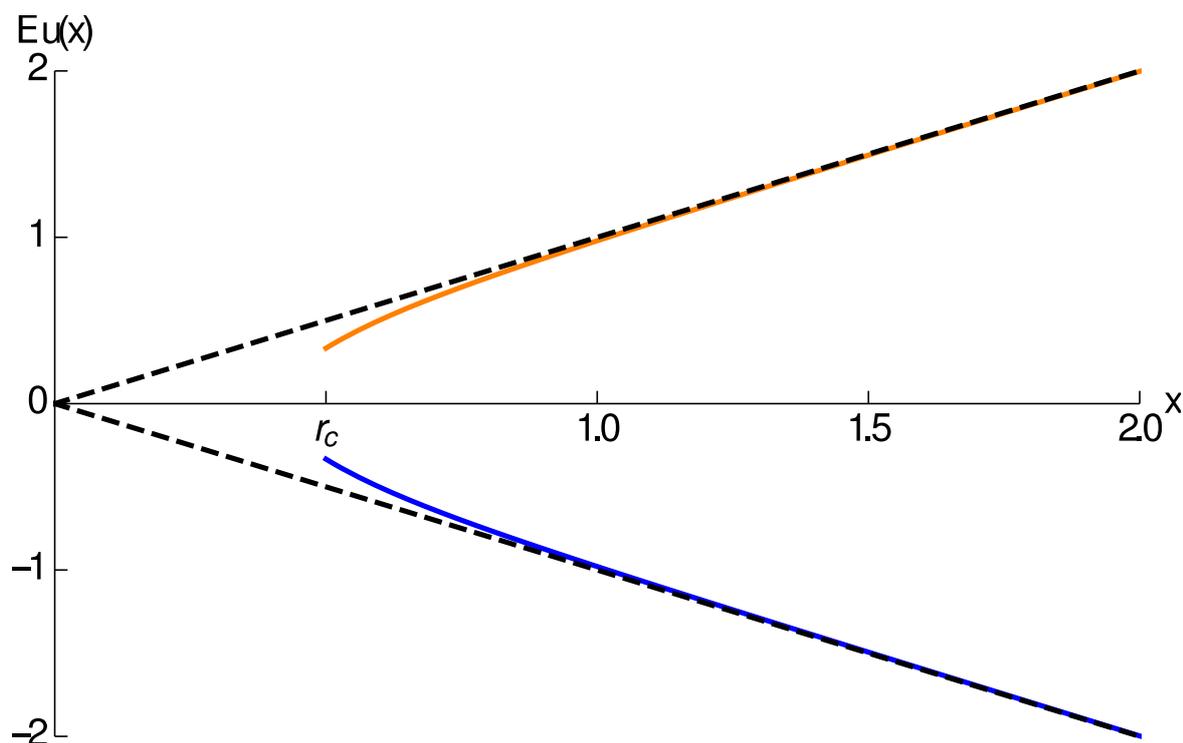


Fig. 6.6 Representación del parámetro afín $E \cdot u$ versus la coordenada radial x para geodésicas radiales nulas entrantes (azul) y salientes (naranja) en el caso $s = +1$ con $r_c = 0.5$ y $u_0 = 0$. Estas geodésicas alcanzan la superficie $x = r_c$ en un tiempo afín finito y acaban allí, al no haber un espacio-tiempo por el que puedan extenderse. La línea negra discontinua corresponde a las geodésicas radiales nulas, que son asimismo incompletas.

[ver Fig.6.7] si pudieran conectarse en la garganta del agujero de gusano, donde los escalares de curvatura en general son divergentes. En este sentido, es importante señalar que estas geodésicas nulas y radiales son insensibles a la dependencia de la métrica en r_q y r_s . Nótese también que, como se comentó en 6.3.5, hay una elección específica de parámetros para la cual no surgen divergencias de curvatura en el garganta, véase la ecuación (6.70). Como no hay razón para sospechar que las geodésicas radiales nulas están incompletas en ese caso, y la ecuación geodésica es la misma para todos los casos, parece legítimo aceptar su completitud cuando $s = -1$. Como comentario final al respecto, cabe señalar que incluso en el caso en que los escalares de Ricci, Ricci cuadrado, y Kretschman son finitos, siempre es posible construir nuevos escalares “ad hoc” tales que las divergencias pueden surgir en cualquier punto que deseemos. Dado que esta no es una categoría obvia o privilegiada de escalares, no está claro cuáles son las implicaciones que dicha divergencia particular de los escalares de curvatura puede tener para la extensibilidad de las geodésicas. La discusión de las geodésicas

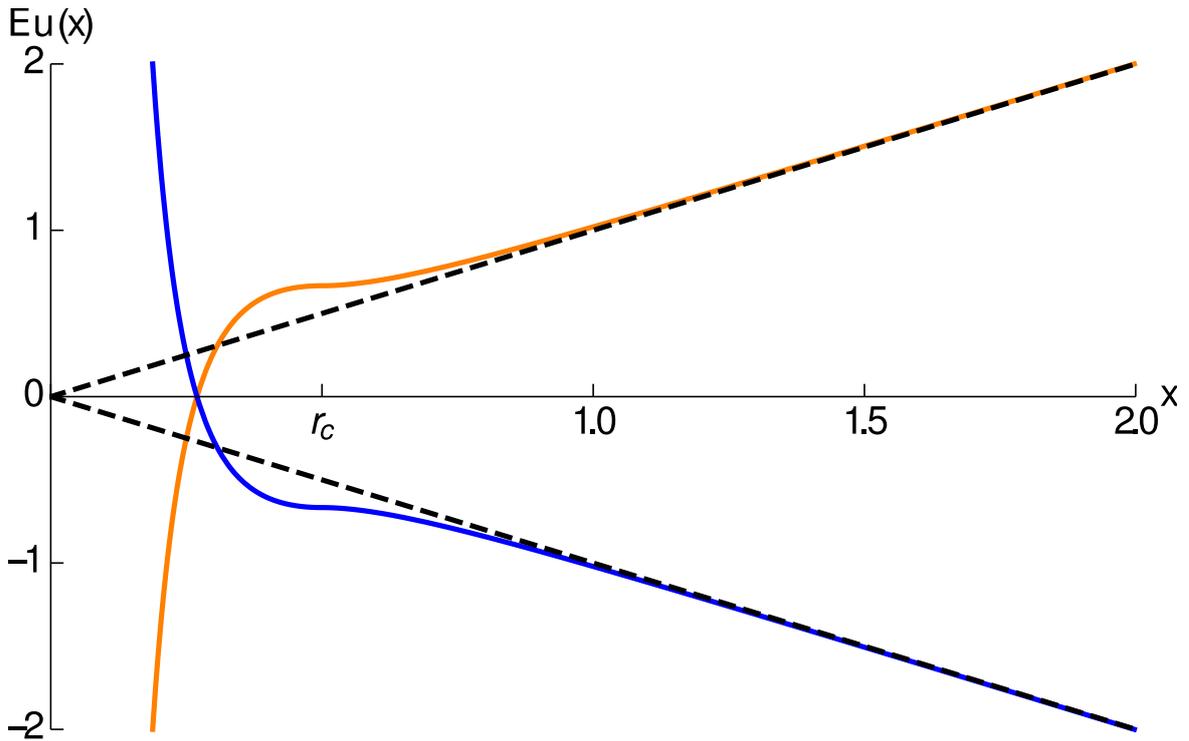


Fig. 6.7 El parámetro afín $E \cdot u$ versus la coordenada radial x para geodésicas radiales nulas entrantes (azul) y salientes (naranja) en el caso $s = -1$, con $r_c = 0.5$ y $u_0 = 0$. Como el rango de $u(x)$ cubre todo el eje real, estas geodésicas son completas. El resultado para RG se representa también (negro discontinuo) para compararlo con los resultados de nuestra geometría.

nulas temporales y no radiales presenta una fenomenología más rica que no estudiaremos aquí.

6.4 Solución de agujero negro en rotación

6.4.1 Desarrollo de la solución

Ocupémonos ahora de la derivación de la solución correspondiente a un agujero negro en rotación, que es el principal resultado de esta tesis. El intento de obtener soluciones con rotación a través de la resolución de las ecuaciones de campo es una cuestión altamente no trivial, un desafío para cualquier teoría modificada de la gravedad, que solo se puede afrontar una vez que se ha encontrado un *ansatz* razonable por algún medio, o a través de algún algoritmo adecuado, como por ejemplo el de Janis-Newman [270, 136, 28, 27, 327]. En nuestro caso usaremos el mismo enfoque del caso estático para mapear la solución con

carga y rotación (Kerr-Newman) de RG en la correspondiente solución para la gravedad GBI adaptándola adecuadamente a la particular estructura de soluciones con simetría axial. El procedimiento para lograr este objetivo es el siguiente:

1. Tomar la solución Kerr-Newman de RG en un sistema de coordenadas dado y calcular el correspondiente tensor de Einstein.
2. Interpretar esa solución como generada por el tensor energía-momento de un determinado fluido anisótropo. La comparación directa del tensor de Einstein/Kerr-Newman con el tensor energía-momento del fluido proporciona expresiones concretas para las funciones densidad/presión del fluido así como para la velocidad angular del fluido ω .
3. Utilizar estas expresiones para generar la correspondiente solución en GBI usando las relaciones (6.19).

Antes de continuar, notemos primero que, a diferencia del caso Reissner-Nordström, donde el vector v^μ sólo tiene componente temporal, para la solución de Kerr-Newman el vector de velocidad del fluido tiene una componente espacial, (suponiendo movimiento en la dirección ϕ únicamente) tendremos:

$$v^\mu = (v^t, 0, 0, v^\phi), \quad (6.79)$$

donde típicamente v^ϕ se escribe como $v^\phi = \omega v^t$, con ω representando la velocidad angular, es decir, $\omega \equiv d\phi/dt$. La normalización del vector $v^\mu v^\nu q_{\mu\nu} = -1$ implica :

$$v^t = \frac{1}{\sqrt{-(q_{tt} + \omega q_{t\phi} + \omega^2 q_{\theta\phi})}}, \quad (6.80)$$

pero no restringe la forma de ω , que debe ser fijada por otros medios. En este caso, ω representa la velocidad angular de los observadores que se mueven solidariamente con el fluido que modeliza el campo externo creado por una carga eléctrica en rotación. Recordemos que para un campo eléctrico de Maxwell, la densidad y las presiones del fluido equivalente satisfacen la ecuación (6.55). La normalización del vector espacial ξ^μ es suficiente para restringir su única componente espacial, $\xi^\mu = (0, \xi^x, 0, 0)$, siendo $\xi^x = 1/\sqrt{q_{xx}}$. Así, a partir de la comparación de los tensores de Einstein y el tensor de energía-momento del fluido podremos resolver para la densidad de energía ρ y la velocidad angular ω .

Escribamos ahora la solución de Kerr-Newman de RG usando coordenadas (t, x, θ, ϕ) en la forma de Boyer-Lindquist como [357]:

$$q_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -(1-f) & 0 & 0 & -af \sin^2 \theta \\ 0 & \frac{\Sigma}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma & 0 \\ -af \sin^2 \theta & 0 & 0 & (x^2 + a^2 + fa^2 \sin^2 \theta) \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (6.81)$$

donde $0 \leq a \leq 1$ es el parámetro de espín y se han aplicado las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned} f &= \frac{r_S x - r_q^2/2}{\Sigma} = \frac{x^2 + a^2 - \Delta}{\Sigma} \\ \Sigma &= x^2 + a^2 \cos^2 \theta \\ \Delta &= x^2 - r_S x + a^2 + r_q^2/2. \end{aligned} \quad (6.82)$$

El tensor de Einstein correspondiente para este elemento de línea puede escribirse convenientemente como :

$$G^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \frac{-r_q^2(x^2 + a^2[1 + \sin^2 \theta])}{2\Sigma^3} & 0 & 0 & \frac{ar_q^2(a^2 + r^2) \sin^2 \theta}{\Sigma^3} \\ 0 & \frac{-r_q^2}{2\Sigma^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r_q^2}{2\Sigma^2} & 0 \\ \frac{-ar_q^2}{\Sigma^3} & 0 & 0 & \frac{r_q^2(x^2 + a^2[1 + \sin^2 \theta])}{2\Sigma^3} \end{pmatrix} \quad (6.83)$$

y, de acuerdo con la ecuación (6.7), el tensor energía-momento del fluido se escribe como:

$$T^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} -\frac{\rho^q}{F_1} & 0 & 0 & F_2 \\ 0 & -\rho^q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^q & 0 \\ -F_3 & 0 & 0 & \frac{\rho^q}{F_1} \end{pmatrix}, \quad (6.84)$$

donde F_1 , F_2 , y F_3 son expresiones complicadas de las variables del fluido y de la métrica tendiendo a la unidad en el límite sin rotación, $a \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow 0$. Por ejemplo, la función F_1

toma la forma:

$$F_1 = \frac{\sin^2 \theta \left(\omega^2 (a^2 + x^2)^2 + a^2 - 2af\Sigma\omega \right)}{\Delta (1 - a^2\omega^2 \sin^4 \theta) + \sin^2 \theta \left(\omega^2 (a^2 + x^2)^2 - a^2 \right)} - \frac{\Delta (a^2\omega^2 \sin^4 \theta + 1)}{\Delta (1 - a^2\omega^2 \sin^4 \theta) + \sin^2 \theta \left(\omega^2 (a^2 + x^2)^2 - a^2 \right)},$$

por comparación directa entre las expresiones de $G^\mu{}_\nu$ y $\kappa^2 T^\mu{}_\nu$ es fácil ver que:

$$\kappa^2 \rho^q = \frac{r_q^2}{2\Sigma^2}, \quad (6.85)$$

que se puede interpretar como la densidad de energía de un campo electromagnético dotado de simetría axial y descrito por:

$$A_\mu = (A_t, 0, 0, A_\phi) = \frac{Qx}{\Sigma} (1, 0, 0, -a \sin^2 \theta), \quad (6.86)$$

de donde las componentes del tensor del campo electromagnético se obtienen inmediatamente de la forma habitual. Además, un vistazo a la expresión anterior para F_1 muestra que ω puede calcularse simplemente resolviendo una ecuación algebraica cuadrática, cuya solución física (rotación en la misma dirección que la del agujero negro) puede demostrarse que viene dada por:

$$\omega = \frac{a}{a^2 + x^2}. \quad (6.87)$$

Ahora ya tenemos todos los ingredientes necesarios para mapear la solución de Kerr-Newman de RG en una solución con rotación en la gravedad GBI acoplada a una electrodinámica de tipo Born-Infeld, dada por la acción (6.30). Con este objetivo hacemos un enfoque paralelo al del caso estático presentado en la sección 6.3.2 y lo aplicaremos al caso con rotación. Para ello, utilizaremos la métrica (6.81) como solución semilla junto con las

definiciones (6.82), y las siguientes expresiones:

$$\rho^q = \frac{r_q^2}{2\kappa^2\Sigma^2}, \quad (6.88)$$

$$p_{\perp}^q = \rho^q = -p_r^q, \quad (6.89)$$

$$v_{\mu} = \left(-\sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}}, 0, 0, a \sin^2 \theta \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}} \right), \quad (6.90)$$

$$\xi_{\mu} = \left(0, \sqrt{\frac{\Sigma}{\Delta}}, 0, 0 \right), \quad (6.91)$$

para la densidad de energía ρ^q y las presiones radial y tangencial p_r^q y p_{\perp}^q , y los vectores unitarios v_{μ} and ξ_{μ} . Ahora, usando la relación entre las métricas obtenida en (6.19), la métrica del espacio-tiempo $g_{\mu\nu}$ puede escribirse en este caso como:

$$g_{\mu\nu} = q_{\mu\nu} + \varepsilon\kappa^2\rho^q h_{\mu\nu}, \quad (6.92)$$

donde la pieza adicional originada por las correcciones de gravedad GBI viene dada por :

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{(\Delta+a^2\sin^2\theta)}{\Sigma} & 0 & 0 & \frac{a(\Delta+x^2+a^2)}{\Sigma}\sin^2\theta \\ 0 & \frac{\Sigma}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Sigma & 0 \\ \frac{a(\Delta+x^2+a^2)}{\Sigma}\sin^2\theta & 0 & 0 & -\left[\frac{(x^2+a^2)^2+a^2\Delta\sin^2\theta}{\Sigma}\right]\sin^2\theta \end{pmatrix}. \quad (6.93)$$

Por lo tanto, la solución final para un agujero negro con rotación en gravedad GBI acoplada a una electrodinámica de tipo Born-Infeld (es decir, la acción de (6.30)) se obtiene, en coordenadas de Boyer-Lindquist, como:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1-f+\varepsilon\kappa^2\rho^q\frac{(\Delta+a^2\sin^2\theta)}{\Sigma}\right)dt^2 - 2a\left(f-\varepsilon\kappa^2\rho^q\frac{(\Delta+x^2+a^2)}{\Sigma}\right)\sin^2\theta dtd\phi \\ &+ \frac{(1+\varepsilon\kappa^2\rho^q)\Sigma}{\Delta}dx^2 + (1-\varepsilon\kappa^2\rho^q)\Sigma d\theta^2 \\ &+ \left[(x^2+a^2+fa^2\sin^2\theta)-\varepsilon\kappa^2\rho^q\frac{(x^2+a^2)^2+a^2\Delta\sin^2\theta}{\Sigma}\right]\sin^2\theta d\phi^2, \end{aligned} \quad (6.94)$$

donde las correcciones en ε de la gravedad GBI respecto de la solución de Kerr-Newman de RG son evidentes, lo que constituye un resultado original de este trabajo.

Un aspecto básico a destacar es el hecho de que en el vacío, $r_q = 0$ (lo que implica $\rho^q = p_r^q = p_{\perp}^q = 0$), la solución coincide con la solución de Kerr de RG. Esto es consistente

con lo que ya sabemos sobre el comportamiento general de cualquier teoría de la gravedad RBG en ausencia de materia; sólo cuando la función de densidad ρ^q en (6.88) no se anula tenemos modificaciones en comparación con la solución RG. En efecto, lejos de las fuentes, el elemento de línea (6.94) se reduce a:

$$ds^2 = - \left[1 - \frac{2M}{r} + \mathcal{O}(r^{-2}) \right] dt^2 + \left[\frac{4aM \sin^2 \theta}{r} + \mathcal{O}(r^{-2}) \right] dt d\phi + [1 + \mathcal{O}(r^{-1})] (dr^2 + r^2 d\Omega^2), \quad (6.95)$$

que no es más que el límite asintótico de un cuerpo en rotación axialmente simétrico en coordenadas Boyer-Lindquist. Esto implica la consistencia de estos objetos con las observaciones del movimiento orbital de partículas de prueba alrededor de cualquiera de ellos. Los cambios inducidos por la teoría RBG con respecto a las soluciones RG serán más intensos en aquellas regiones donde la densidad de energía alcanza sus valores más altos, lo que en el presente caso es la región más interna (por la claridad de este trabajo, dejaremos de lado el análisis de las órbitas circulares fuera del horizonte de eventos, que precisan de un análisis separado que se llevará a cabo en otro lugar). Señalemos que, para agujeros negros de rotación lenta, $a \ll 1$, el elemento de línea (6.94) se escribe como:

$$ds^2 = \left[-\frac{(x^4 + sr_c^4)\Delta_0}{x^6} + \left(\frac{\cos^2 \theta \Delta_0}{x^4} + sr_c^4 \left(-\frac{1 + \sin^2 \theta}{x^6} + \frac{3 \cos^2 \theta \Delta_0}{x^8} \right) \right) a^2 + \mathcal{O}(a^4) \right] dt^2 + \left[2a \sin^2 \theta \left(\frac{r_q^2(x^4 + sr_c^4) - 2x(-2sr_c^4 x + r_S(x^4 + sr_c^4))}{2x^6} \right) + \mathcal{O}(a^3) \right] dt d\phi + \left[\frac{x^4 + sr_c^4}{x^2 \Delta_0} + \frac{-x^2(x^4 + sr_c^4) + \cos^2 \theta (x^4 - sr_c^4) \Delta_0}{x^2 \Delta_0^2} a^2 + \mathcal{O}(a^4) \right] dx^2 + \left[\left(x^2 - \frac{sr_c^4}{x^4} \right) + \cos^2 \theta \left(1 + \frac{sr_c^4}{x^4} \right) a^2 + \mathcal{O}(a^4) \right] d\theta^2 + \left[\left(x^2 - \frac{sr_c^4}{x^2} \right) + \mathcal{O}(a^4) \right] d\phi^2, \quad (6.96)$$

$$+ \frac{x^2(sr_c^4(-2 + 3 \cos^2 \theta) + x^4) - \sin^2 \theta (r_q^2(x^4 + sr_c^4)/2 + x(sr_c^4 x - r_S(x^4 + sr_c^4)))}{x^6} a^2 \Big] d\phi^2,$$

donde $\Delta_0 \equiv \Delta(a=0) = x^2 - r_S x + r_q^2/2$ y hemos usado que $\epsilon \kappa^2 \rho^q \equiv sr_c^4/\Sigma^2$ lo que se sigue de la ecuación (6.88). De esta expresión se ve claramente que la rotación induce correcciones lineales y cuadráticas a las soluciones esféricamente simétricas descritas en 6.3.1 y dadas por el elemento de línea (6.32).

Antes de concluir esta sección, escribiremos el elemento de línea (6.94) en coordenadas Eddington-Finkelstein dada por las transformaciones $dv = dt + \frac{(x^2+a^2)}{\Delta} dx$ and $d\varphi = d\phi + adx/\Delta$ como:

$$\begin{aligned} ds^2 = & - \left(1 - f + \varepsilon \kappa^2 \rho^q \frac{(\Delta + a^2 \sin^2 \theta)}{\Sigma} \right) dv^2 + 2(1 + \varepsilon \kappa^2 \rho^q) dv dx \\ & - 2a \sin^2 \theta (1 + \varepsilon \kappa^2 \rho^q) dx d\varphi + (1 - \varepsilon \kappa^2 \rho^q) \Sigma d\theta^2 + [(x^2 + a^2 + f a^2 \sin^2 \theta) - \\ & - \varepsilon \kappa^2 \rho^q \frac{(x^2 + a^2)^2 + a^2 \Delta \sin^2 \theta}{\Sigma}] \sin^2 \theta d\varphi^2 - 2a \sin^2 \theta \left(f - \varepsilon \kappa^2 \rho^q \frac{(\Delta + x^2 + a^2)}{\Sigma} \right) dv d\varphi . \end{aligned} \quad (6.97)$$

6.4.2 Propiedades de las soluciones

1. Horizontes y ergoregiones

En la solución con rotación obtenida anteriormente se puede verificar que los vectores normales a las hipersuperficies $x = \text{constante}$ tienen una norma dada por :

$$n^\mu n_\mu = \frac{\Sigma(x - x_\pm^{KN})(x - x_\pm^{KN})}{\Sigma^2 + sr_c^4} , \quad (6.98)$$

donde hemos definido:

$$x_\pm^{KN} = \frac{r_S \pm \sqrt{r_S^2 - 4(a^2 + r_q^2/2)}}{2} . \quad (6.99)$$

De esta expresión es evidente que las hipersuperficies $x = x_\pm^{KN}$ tienen norma nula, mientras que divergen si el denominador se anula cuando $s = -1$. Se puede comprobar que esta divergencia es de la misma naturaleza de la que se encuentra en el caso sin rotación, ya que la hipersuperficie $(\Sigma - sr_c^4/\Sigma) = \text{constante}$ tiene norma nula precisamente en $\Sigma = r_c^2$ cuando $s = -1$. Las dos hipersuperficies $x = x_\pm^{KN}$ resultan ser horizontes de Killing de la combinación:

$$\xi = \chi + \frac{a}{x^2 + a^2} m , \quad (6.100)$$

donde $\chi = \partial_t$ y $m = \partial_\phi$ son los vectores de Killing asociados a las traslaciones temporales y a las rotaciones alrededor del eje de simetría, respectivamente. Un vistazo a la norma de este vector ξ nos lleva a que $\Sigma = r_c^2$ también es un horizonte de Killing cuando $s = -1$:

$$\xi^\mu \xi_\mu = \frac{(x - x_+^{KN})(x - x_+^{KN})(\Sigma^2 + sr_c^4)}{(x^2 + a^2)\Sigma^2} . \quad (6.101)$$

Consideremos ahora las condiciones para la existencia de ergoregiones. La norma del vector de Killing χ viene dada por:

$$\chi^\mu \chi_\mu = \frac{(x-x_-^e)(x-x_+^e)}{(x^2+a^2 \cos^2 \theta^2)} + sr_c^4 \frac{(x-y_-^e)(x-y_+^e)}{(x^2+a^2 \cos^2 \theta^2)^3}, \quad (6.102)$$

y se anula cuando la condición:

$$\frac{(x-x_-^e)(x-x_+^e)}{(x^2+a^2 \cos^2 \theta^2)} = -sr_c^4 \frac{(x-y_-^e)(x-y_+^e)}{(x^2+a^2 \cos^2 \theta^2)^3}, \quad (6.103)$$

se satisface, donde hemos introducido las definiciones:

$$x_\pm^e = \frac{r_S \pm \sqrt{r_S^2 - 2r_q^2 - 4a^2 \cos^2 \theta}}{2} \quad (6.104)$$

$$y_\pm^e = \frac{r_S \pm \sqrt{r_S^2 - 2r_q^2 - 4a^2 (\sin^2 \theta + 1)}}{2}. \quad (6.105)$$

En general, las soluciones a la ecuación (6.103) son difíciles de obtener analíticamente, aunque alguna información útil puede obtenerse aunque sea de forma cualitativa. En primer lugar, teniendo en cuenta que :

$$x_-^e \leq y_-^e \leq y_+^e \leq x_+^e, \quad (6.106)$$

y que el signo en el lado izquierdo de (6.103) debe ser el mismo que en el lado derecho. De acuerdo a esto, si $s = 0$ (caso RG) entonces las únicas soluciones son $x = x_\pm^e$, que definen las ergoregiones habituales de la solución de Kerr-Newman. Si $s = +1$ entonces las soluciones deben satisfacer

$$x_-^e \leq x \leq y_-^e \quad \text{y} \quad y_+^e \leq x \leq x_+^e, \quad (6.107)$$

mientras que si $s = -1$ las soluciones satisfacen en cambio la relación:

$$x \leq x_-^e \quad y_-^e \leq x \leq y_+^e \quad \text{y} \quad x \geq x_+^e. \quad (6.108)$$

Las igualdades en las relaciones anteriores sirven para darnos cuenta de que en el eje de rotación ($\theta = 0, \pi$), se tiene $x_\pm^e = y_\pm^e$, lo que indica que las nuevas ergoregiones son deformaciones suaves de las presentes en las soluciones RG. Lejos del eje de rotación puede utilizarse un enfoque perturbativo para estimar correcciones de orden superior en algunos casos de interés. Dado que en el límite $r_c \rightarrow 0$ se recuperan las soluciones RG x_\pm^e , se pueden

obtener soluciones aproximadas en el límite astrofísico en el que r_c es mucho más pequeño que x_-^e (supuesto real). De hecho, tomando $x = x_{\pm}^e + \delta_{\pm}$ y usando Ec.(6.103) es verificar que:

$$\delta_{\pm} = \mp \frac{sr_c^4}{((x_{\pm}^e)^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2} \frac{(x_{\pm}^e - y_-^e)(x_{\pm}^e - y_+^e)}{(x_+^e - x_-^e)} + \mathcal{O}(r_c^8) \quad (6.109)$$

En el límite de rotación lenta, donde el elemento de línea viene dado por la ecuación (6.96), esta cantidad se reduce a :

$$\begin{aligned} \delta_{\pm} \approx & \mp s \frac{8a^2 \sin^2 \theta r_c^4}{\sqrt{r_S^2 - 2r_q^2} \left(r_q^2 + r_S \left(-r_S + \sqrt{r_S^2 - 2r_q^2} \right) \right)^2} \\ & + \mathcal{O}(a^4). \end{aligned} \quad (6.110)$$

Esto indica que los agujeros negros en rotación en extensiones de la RG pueden exhibir una ergoregión externa diferente de lo esperado en RG. Pueden obtenerse cotas a las desviaciones potenciales mediante la observación de los discos de acreción [32], sombras [359], u otros medios [83], a explorar en trabajos futuros. En este sentido, señalemos que, volviendo a la expresión exacta (6.102), se puede verificar que en la hipersuperficie $\Sigma = r_c^2$ se reduce a $\chi^\mu \chi_\mu = 2a^2 \sin^2 \theta / r_c^2$, que es nulo en el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$. Esto proporciona una solución exacta, aunque parcial, a la existencia de ergorregiones, cuya caracterización se estudiará en el futuro.

2. Divergencias de métrica y curvatura

Ya hemos visto que la hipersuperficie $\Sigma = r_c^2$ conduce a singularidades en la métrica cuando $s = -1$, ya que induce la desaparición del término cruzado $dvdx$ en la ecuación (6.97). Se pueden intuir problemas adicionales mirando los ceros de la componente $g_{\theta\theta}$ de la métrica. De la ecuación (6.94) hay, en principio, dos casos posibles:

$$\Sigma \equiv x^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0 \ ; \ \Sigma^2 - sr_c^4 = 0 \ , \quad (6.111)$$

El primero corresponde a la región donde la densidad de energía de campo electromagnético en RG diverge, véase (6.85), esto es:

$$x = 0 \ ; \ \theta = \pi/2 \ . \quad (6.112)$$

En cuanto a la segunda, sólo admite una solución real en el rama $s = +1$, donde se escribe como:

$$\Sigma = r_c^2 \leftrightarrow x^2 + a^2 \cos^2 \theta = r_c^2 \ . \quad (6.113)$$

En el límite de simetría esférica $a \rightarrow 0$ estudiado en la sección 6.3.1, el caso $s = +1$ que estamos considerando aquí se caracterizaba porque se anulaba el área de las dos esferas en $x = r_c$, y no era posible que x tome valores más pequeños (ya que, de lo contrario, la signatura de la métrica cambiaría). Ahora vemos que un momento angular no nulo tiene un impacto importante en esta relación. Como es evidente, en el plano ecuatorial ($\theta = \pi/2$) esta condición ocurre exactamente en $x = r_c$, como en el caso esférico. Considerando que valores más pequeños de x en el plano $\theta = \pi/2$ implicarían un cambio de signatura en la métrica esto sugiere que se debería descartar el primer caso en (6.111), $\Sigma = 0$, como no físico para este valor de s . Por el contrario, para $s = -1$, no hay cambio de signatura y $\Sigma = 0$ todavía representa una región físicamente aceptable (un límite no esférico de área infinita). Más información útil sobre la relevancia de las condiciones (6.111) se puede extraer observando los invariantes de curvatura. El escalar de Ricci, por ejemplo, tiene una estructura de la forma:

$$R = \frac{P_s(x, \theta; a, r_c^4, r_s, r_q^2)}{\Sigma(\Sigma - r_c^2)^3}, \quad (6.114)$$

donde $P_s(x, \theta; a, r_c^4, r_s, r_q^2)$ es un polinomio que se anula si $r_c \rightarrow 0$. El denominador de esta cantidad muestra los casos críticos identificados en (6.111) y plantea que el escalar de Ricci tiene problemas en $\Sigma = r_c^2$ independientemente del signo de ε . Algo similar sucede con $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ y $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}R^\beta{}^{\alpha\mu\nu}$ pero presentan una estructura matemática mucho más complicada que no arroja especial luz sobre la discusión. Vemos así que en la hipersuperficie $\Sigma^2 = r_c^4$ los invariantes divergen. Esto sucede, en particular, cuando $x = r_c$ en el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$, como en el caso con simetría esférica. A medida que se retrocede de $\theta = \pi/2$ hacia $\theta \rightarrow 0$ (el eje de la rotación) la condición $\Sigma = r_c^2$ extiende el rango de x por debajo del límite esférico $x = r_c$. Si $a^2 > r_c^2$, podemos llegar a $x = 0$ a un ángulo crítico θ_c tal que:

$$a^2 \cos^2 \theta_c = r_c^2. \quad (6.115)$$

Para ángulos dentro del intervalo $0 \leq \theta < \theta_c$ y $\pi/2 + \theta_c \leq \theta < \pi$, la condición no puede ser satisfecha. En el límite $r_c^2/a^2 \ll 1$, está claro que la divergencia se ubicará muy cerca del plano ecuatorial, estando completamente confinada en el plano en el límite RG $r_c \rightarrow 0$ en lo que se conoce como singularidad del anillo). Si $a^2 \leq r_c^2$ entonces entonces la condición puede satisfacerse para algún valor $0 < x < r_c$ y para cualquier ángulo azimutal $0 \leq \theta \leq \pi$. Un análisis más profundo en términos (posiblemente de alguna extensión) de coordenadas cartesianas de Kerr-Schild podría ayudar a entender mejor la geometría de esta singular región. Sin embargo, junto con su máxima extensión analítica, este es un aspecto no trivial para ser explorado en otra parte ya que la estructura general de la métrica mostrada en (6.19)

indica que $g_{\mu\nu}$ no se puede escribir en la forma estandar de Kerr-Schild incluso si $q_{\mu\nu}$ admite tal descomposición. El factor conforme frente a $q_{\mu\nu}$ es solo una de las razones en contra de esa posibilidad.

Antes de concluir este apartado, conviene señalar que la densidad de energía en $\Sigma = r_c^2$ es finita en el caso en que tenemos una estructura de agujero de gusano ($s = -1$) pero divergente en el caso $s = +1$, como se puede ver de (6.22), ya que $\tilde{\rho}_{GR} \equiv \varepsilon \kappa^2 \rho^q = s r_c^4 / \Sigma^2 = s$ cuando $\Sigma = r_c^2$. El comportamiento de las presiones angulares es justo el contrario, como muestra (6.23), siendo divergente en el caso del agujero de gusano y finito en el otro caso. Por otro lado, una mirada a la geometría inducida en las superficies de t y x constante, muestra que para $\Sigma = r_c^2$ las circunferencias ecuatoriales y polares (con $\theta = \pi/2$ y $\phi = \text{constante}$, respectivamente) en el caso de agujero de gusano tienen longitud propia dada por:

$$l_{eq} = 2\pi\sqrt{2}\frac{(r_c^2 + a^2)}{r_c} \quad \text{and} \quad l_{pol} = 2\sqrt{2}\pi r_c, \quad (6.116)$$

lo que ilustra la falta de simetría esférica debido a que el momento angular que no se anula.

6.5 Conclusión

Poner a prueba la hipótesis de Kerr sobre la naturaleza de los agujeros negros astrofísicos, es uno de los temas candentes en la investigación actual sobre la fiabilidad de la RG en comparación con otras teorías de la gravedad en el rango de campos gravitatorios intensos, gracias a la amplia disponibilidad de registros observacionales. Sin embargo, la escasez de soluciones rotacionales exactas disponibles en la literatura sobre teorías alternativas de la gravedad puede suponer una dificultad añadida para llevar a cabo en profundidad dichas comparaciones (ver [83] para una reciente discusión sobre este tema). Por tanto, la investigación de soluciones para agujeros negros en rotación en teorías de la gravedad modificadas más allá de la RG requiere del desarrollo de nuevas ideas y estrategias que atiendan a los desafíos específicos de este campo. En este capítulo hemos ilustrado esta idea mediante el uso de la recientemente desarrollada correspondencia que permite mapear las ecuaciones de campo de teorías RBG formuladas en espacios métrico-afines con el espacio de soluciones propias de la RG. Utilizando esta correspondencia, cualquier teoría RBG acoplada a una misma fuente de materia puede ser descrita por una densidad Lagrangiana diferente (en general no canónica) de forma que las soluciones de la primera pueden ser obtenidas a partir de las soluciones de la última mediante transformaciones puramente algebraicas. Esta correspondencia ha sido desarrollada para fluidos anisótropos genéricos como fuente de materia, siendo asimismo posible la extensión a otros escenarios. Mientras

que en anteriores trabajos la validez del método fue establecida mediante la re-derivación de soluciones con simetría esférica ya conocidas previamente, en este trabajo se ha hecho uso de la correspondencia para mostrar que la RG acoplada al electromagnetismo de Maxwell puede mapearse en la gravedad GBI acoplada, asimismo, al electromagnetismo de Born-Infeld. Con la ayuda de este resultado hemos procedido a resolver las ecuaciones de campo correspondientes al escenario electrostático y con simetría esférica, primero resolviendo las ecuaciones de campo, y después hemos comprobado que la aplicación del “mapping” nos lleva exactamente al mismo resultado pero de una forma mucho más simple. A continuación hemos discutido las propiedades de las configuraciones así obtenidas para ambos signos del parámetro ε característico de GBI. Para el caso $s = +1$ dichas configuraciones presentan un mínimo en la coordenada radial x dado por $x = r_c$ más allá del cual no es posible extender el espacio-tiempo asociado, mientras que en el caso $s = -1$ este radio mínimo representa la garganta de una estructura de tipo agujero de gusano. Estos dos comportamientos diferentes implican una descripción modificada de horizontes, curvaturas y geodésicas. De esa forma, en el caso de la estructura de agujero de gusano, los escalares de curvatura divergen en general en la garganta, pero existen configuraciones que sugieren que las geodésicas pueden ser completas. A partir de estos resultados se obtiene lo que es el principal logro de este capítulo, encontrar la contraparte en el lado GBI de la solución de Kerr-Newman propia de la RG. Para ello ha sido necesario llevar un cuidado especial, pero finalmente hemos obtenido dicha solución de forma exacta, tanto en coordenadas de Boyer-Lindquist como en coordenadas de Eddington-Finkelstein, donde las correcciones a la RG aparecen como nuevos términos en ε . Esta solución presenta varias propiedades distintivas como son una nueva estructura de horizontes y ergoregiones en comparación con las estructuras propias de la solución Kerr-Newman propia de la RG, así como una superficie no trivial con divergencias de curvatura, una estructura no totalmente esférica de tipo agujero de gusano y otros aspectos relacionados con las extensiones analíticas de la geometría y las elecciones de coordenadas, que deben ser exploradas en futuros trabajos. La línea básica de esta discusión es entonces la fiabilidad del procedimiento de “mapping” para encontrar soluciones analíticas exactas de interés en el contexto de la gravedad métrico-afín tal y como se ha considerado aquí. La implementación de tales soluciones y el análisis de sus propiedades resulta muy oportuno, dadas las oportunidades que actualmente ofrecen los escenarios astrofísicos para poner a prueba las teorías de gravedad modificada: el uso de las bases de datos observacionales disponibles procedentes de discos de acreción, lentes gravitacionales en el régimen fuerte, sombras, ondas gravitacionales generadas en la fusión de estrellas binarias, etc. En este sentido, a pesar de las limitaciones y de su relevancia física real, las soluciones exactas con rotación analizadas aquí son muy útiles, en el sentido de que enriquecen la discusión

teórica relacionada con las potenciales desviaciones que dichas soluciones muestran respecto a sus contrapartidas en GR. La exploración de familias de electromagnetismo no lineal y/o campos escalares, así como la extensión de estos resultados a otras teorías RBG, pueden ser mecanismos útiles para construir un catálogo de nuevas soluciones con rotación asociadas a modelos físicos más atractivos, así como identificar características generales que puedan ser comparadas con los datos procedentes de los distintos canales astronómicos. El trabajo en esa dirección es un territorio todavía poco explorado, en el momento actual.

Capítulo 7

Agujeros negros con rotación en GBI: un conjunto infinito de soluciones exactas

7.1 Introducción

Actualmente estamos asistiendo al comienzo de una nueva era en la física de la gravedad caracterizada por la consolidación de la astronomía multimensajero, es decir, de los resultados astronómicos proporcionados por distintos medios: radiación electromagnética (que ahora incluye sombras), ondas gravitacionales, neutrinos y rayos cósmicos. En lo que respecta a las ondas gravitacionales y sombras, son campos que muy recientemente han alcanzado lo que podríamos llamar su edad adulta. La detección de ondas gravitacionales a partir de fusiones binarias [2, 5], y el contorno del anillo de radiación inducido por el plasma sobrecalentado que rodea el objeto central supermasivo de la galaxia M87 [16] son poderosas herramientas puestas ahora a disposición de toda la comunidad que trabaja en la determinación de la naturaleza de los objetos compactos y en revelar la misma naturaleza íntima de la interacción gravitatoria en lo que se refiere a su (todavía muy poco estudiado régimen fuerte) [62].

Dentro del enorme acervo teórico de objetos compactos accesibles a las diversas baterías de tests [87], los agujeros negros siguen siendo los candidatos privilegiados. Los teoremas de singularidad [190], nuestra comprensión del colapso gravitacional [207] y la fenomenología electromagnética ampliamente comprobada [32], sitúan en un lugar privilegiado a la familia de soluciones Kerr(-Newman), descrita por masa, momento angular y carga (este último parámetro generalmente ignorado en entornos astrofísicos, ver sin embargo [376]) como el mejor ejemplo del paradigma del agujero negro dentro de la Relatividad General (RG). En la búsqueda de alternativas teóricas a dicha familia de soluciones, particularmente en el campo de las extensiones gravitacionales de RG, la mayoría de los modelos típicamente asumen un

movimiento de rotación lenta [293, 372, 44, 26, 259, 8], bien con el objetivo de disminuir el grado de dificultad en la resolución de las ecuaciones de campo de la teoría de la gravedad bajo consideración, bien para implementar recetas numéricas, desarrolladas totalmente en el escenario rotacional [98, 125, 81, 208].

El objetivo principal de este capítulo es utilizar las herramientas teóricas desarrolladas en los últimos años, con el objetivo de descifrar la estructura de las ecuaciones de campo de las teorías RBG para obtener una clase infinita de soluciones axisimétricas exactas usando el método de mapeo [14] presentado en el capítulo anterior para obtener una solución particular. Como sabemos, este método establece una correspondencia entre los espacios de soluciones de dos teorías RBG, y en particular permite generar soluciones para una teoría RBG dada a partir de una solución semilla en la RG, a través de transformaciones puramente algebraicas [13, 281, 168]. El punto crítico en este procedimiento es la identificación de los Lagrangianos de materia que nutren ambos marcos de trabajo (RBG y RG) protagonistas del proceso de mapeo. Este aspecto ya ha sido implementado sistemáticamente para varios tipos de campos de materia [12, 117]. En el presente trabajo consideraremos el caso de fluidos anisótropos como la fuente de materia, mientras que nuestra teoría RBG objetivo de estudio viene dada por la conocida como gravedad de Born-Infeld, GBI, una elección adecuada por su buen comportamiento algebraico, así como por sus múltiples aplicaciones en astrofísica y cosmología [58]. Al considerar la electrodinámica no lineal formulada en términos de fluidos anisótropos, obtendremos como principal resultado el hallazgo de la contraparte de la solución de Kerr-Newman en gravedad GBI acoplada al electromagnetismo de Maxwell. Las aplicaciones potenciales de este resultado novedoso en el ámbito de las ondas gravitacionales y de las sombras de objetos compactos serán asimismo discutidas.

7.2 Los dos marcos RBG y el método de mapeo

Las teorías RBG se construyen como contracciones de la métrica del espacio-tiempo $g_{\mu\nu}$ con la parte (simétrica) del tensor de Ricci de la conexión independiente, $R_{\mu\nu}(\Gamma)$, mediante potencias de la traza del objeto $M^\mu{}_\nu \equiv g^{\mu\alpha}R_{\alpha\nu}$. El requisito de trabajar con un Ricci simétrico se impone (principalmente) para garantizar la invariancia proyectiva, que salvaguarda la teoría contra inestabilidades fantasmales y trivializa el papel de la torsión [9, 52, 53]. La acción correspondiente se escribe como

$$\mathcal{S}_{RBG} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-\det(g)} \mathcal{L}_G(g_{\mu\nu}, R_{(\mu\nu)}(\Gamma)) \quad (7.1)$$

$$+ \mathcal{S}_m(g_{\mu\nu}, \Psi_m), \quad (7.2)$$

donde κ^2 es la constante de Newton en unidades adecuadas, y el Lagrangiano de gravedad \mathcal{L}_G se construye, como ya hemos indicado mediante contracciones del objeto $M^\mu{}_\nu$ mientras que el sector de la materia se implementa mediante el acoplamiento mínimo con un conjunto de campos de materia ψ_m mediante $\mathcal{S}_m = \int d^4x \sqrt{-\det(g)} \mathcal{L}_m(g_{\mu\nu}, \psi_m)$. Las ecuaciones de campo para la acción (7.1) se obtienen por tomando variaciones independientes con respecto a la métrica y la conexión (formalismo métrico-afín o de Palatini) y pueden ser convenientemente reescritas mediante la representación en un marco de trabajo de tipo Einstein (EF, “Einstein frame”, en su original en inglés) de la forma (ver [14] para más detalles)

$$G^\mu{}_\nu(q) = \tilde{T}^\mu{}_\nu(q), \quad (7.3)$$

mediante la introducción de una nueva métrica $q_{\mu\nu}$, que es compatible con la conexión independiente (es decir, es la conexión de Levi-Civita de q), y está relacionada con la métrica espacio-temporal a través de la relación algebraica

$$q_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} \Omega^\alpha{}_\nu, \quad (7.4)$$

donde la matriz de deformación $\Omega^\mu{}_\nu$ depende de la teoría RBG elegida, pero siempre se puede escribir “on shell” en función de los campos de materia (así como de la métrica espacio-temporal $g_{\mu\nu}$). El tensor de energía-momento que aparece en (7.3) está dado por

$$\tilde{T}^\mu{}_\nu(q) = \frac{1}{|\Omega|^{1/2}} \left(T^\mu{}_\nu(g) - \delta_\nu^\mu \left(\mathcal{L}_G(g, \psi_m) + \frac{T(g)}{2} \right) \right) \quad (7.5)$$

donde $T_{\mu\nu}(g) = \frac{-2}{\sqrt{-\det(g)}} \frac{\delta \mathcal{S}_m}{\delta g^{\mu\nu}}$ es el tensor energía-momento habitual mientras que las barras verticales denotan el correspondiente determinante. Teniendo en cuenta que las dependencias en g en el lado derecho de la ecuación (7.5) pueden ser reemplazadas sistemáticamente por sus contrapartes en q usando (7.4), las anteriores relaciones nos proporcionan una relación no solo entre la materia y los sectores gravitatorios de las dos teorías RBG, sino también entre sus correspondientes espacios de soluciones. Dado que la propia RG pertenece a la familia RBG a través de la elección trivial $\mathcal{L}_G = \text{tr}(M^\mu{}_\nu)$, el principal atractivo de este procedimiento radica en la posibilidad de mapear soluciones conocidas de RG en cualquier otra teoría RBG de interés.

En lo que se refiere a este trabajo implementaremos la anterior idea para el caso de fuentes de materia dadas por fluidos anisótropos, lo cual cubre muchos casos de interés físico, como (obviamente) fluidos perfectos así como campos escalares y electromagnéticos. En el

lado RBG, el tensor de energía-momento se escribe como:

$$T^{\mu}_{\nu}(g) = (\rho + p_{\perp})u^{\mu}u_{\nu} + p_{\perp}\delta^{\mu}_{\nu} + (p_r - p_{\perp})\chi^{\mu}\chi_{\nu}, \quad (7.6)$$

con $g^{\mu\nu}u_{\mu}u_{\nu} = -1$, y, $g^{\mu\nu}\chi_{\mu}\chi_{\nu} = 1$, vectores mutuamente ortogonales de tipo temporal y espacial respectivamente, mientras que $\{\rho, p_r, p_{\perp}\}$ son la densidad de energía, la presión radial y la presión tangencial, respectivamente. Del mismo modo, se puede introducir un tensor de energía-momento formalmente análogo en el EF como

$$\tilde{T}^{\mu}_{\nu}(q) = (\rho^q + p_{\perp}^q)v^{\mu}v_{\nu} + p_{\perp}^q\delta^{\mu}_{\nu} + (p_r^q - p_{\perp}^q)\xi^{\mu}\xi_{\nu}, \quad (7.7)$$

con nuevos vectores temporales y espaciales dados por $q^{\mu\nu}v_{\mu}v_{\nu} = -1$ y $q^{\mu\nu}\xi_{\mu}\xi_{\nu} = 1$, y las funciones características de los fluidos $\{\rho^q, p_r^q, p_{\perp}^q\}$. Usando la ecuación (7.5) y las identificaciones $u^{\mu}u_{\nu} = v^{\mu}v_{\nu}$ y $\chi^{\mu}\chi_{\nu} = \xi^{\mu}\xi_{\nu}$, encontramos las relaciones entre las funciones en cada “frame” como [14]

$$p_{\perp}^q = \frac{1}{|\Omega|^{1/2}} \left(\frac{\rho - p_r}{2} - \mathcal{L}_G \right) \quad (7.8)$$

$$\rho^q + p_{\perp}^q = \frac{(\rho + p_{\perp})}{|\Omega|^{1/2}} \quad (7.9)$$

$$p_r^q - p_{\perp}^q = \frac{(p_r - p_{\perp})}{|\Omega|^{1/2}}. \quad (7.10)$$

Por otro lado, la propia matriz de deformación puede escribirse como una serie de potencias infinitas del tensor energía-momento (ver [54] para más detalles), que en el presente caso puede reformularse en términos de las funciones del fluido (en el marco de Einstein) como $\Omega^{\mu}_{\nu} = \alpha\delta^{\mu}_{\nu} + \beta v^{\mu}v_{\nu} + \gamma\xi^{\mu}\xi_{\nu}$, con $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ funciones dependientes del modelo. Por lo tanto, las ecuaciones del “mapping” (7.8)-(7.10) proporcionan una relación entre las funciones que caracterizan el fluido en cada uno de los marcos de trabajo. Esto permite reconstruir los correspondientes Lagrangianos de materia mientras que la relación fundamental (7.4) mapea las soluciones para las métricas correspondientes en cada “frame”. Así, una vez que elegimos una teoría RBG específica y un determinado de campo de materia representado por el correspondiente fluido anisótropo, este procedimiento nos permite mapear cualquier solución específica de interés de dicha teoría RBG a una solución de cualquier otra teoría RBG, en particular, de la propia RG. Esto es así porque el mapeo es completamente general, independientemente de las simetrías de la métrica implicada; en otras palabras, mapea todos los espacios de soluciones $\text{GR} + \tilde{\mathcal{L}}_m(\Psi_m, q)$ y un dado $\text{RBG} + \mathcal{L}_m(\Psi_m, g)$.

Entre el amplio grupo de teorías RBG, la llamada gravedad de Born-Infeld (GBI) (“Eddington-inspired Born-Infeld gravity”, EiBI en su original en inglés) resulta ser una teoría particularmente adecuada para los cálculos. En efecto, en este caso la forma de la matriz de deformación viene dada por una simple relación algebraica (ver [58] para detalles)

$$|\Omega|^{1/2}(\Omega^{-1})^\mu{}_\nu = \lambda \delta^\mu_\nu - \varepsilon \kappa^2 T^\mu{}_\nu, \quad (7.11)$$

donde λ es una constante relacionada con el carácter asintótico de las soluciones (a partir de ahora establecemos $\lambda = 1$ para soluciones asintóticamente planas) mientras que el parámetro de longitud al cuadrado ε codifica las desviaciones con respecto a la RG, de manera que la densidad Lagrangiana de gravedad GBI se puede expresar como $\mathcal{L}_G = \frac{|\Omega|^{1/2}-1}{\varepsilon \kappa^2}$, y recupera la acción de Einstein-Hilbert en el límite $|R_{\mu\nu}| \ll \varepsilon^{-1}$. Combinando (7.11) con el conjunto de ecuaciones de mapeo (7.8)-(7.10), y utilizando el tensor de energía-momento (7.6), la relación fundamental (7.4) nos permite escribir la métrica espacio-temporal de forma compacta

$$g_{\mu\nu} = \left(1 - \frac{\varepsilon \kappa^2 (\rho^q - p_r^q)}{2}\right) q_{\mu\nu} - \varepsilon \kappa^2 [(\rho^q + p_\perp^q) v_\mu v_\nu + (p_r^q - p_\perp^q) \xi_\mu \xi_\nu], \quad (7.12)$$

donde el lado derecho solo involucra variables propias de la solución en el EF. Por lo tanto, dada una solución semilla obtenida en el contexto de la RG, es decir, una métrica $q_{\mu\nu}$ más una configuración de fluido dada por $\{\rho^q, p_r^q, p_\perp^q\}$ representando a la materia asociada a dicha solución, la ecuación anterior proporciona la solución RBG correspondiente. En lo que sigue particularizaremos este formalismo al caso de soluciones axialmente simétricas.

7.3 Agujeros negros en rotación

Consideremos ahora la parametrización general para una métrica estática, con simetría esférica, dada por

$$ds_q^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + h(r)d\Omega^2, \quad (7.13)$$

donde $d\Omega^2 = d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$. En lo que sigue, fijaremos la función radial como $h(r) = r^2$, de modo que el elemento de línea anterior, que tiene su origen en una solución de RG acoplada a alguna fuente de materia, se caracteriza por una sola función $f(r)$. En varios trabajos en los últimos años, el algoritmo de Janis-Newman (ver [136] para una revisión) se ha empleado para obtener la contraparte con simetría axial (7.13), es decir, con rotación alrededor de un eje. En coordenadas de Boyer-Lindquist, dicho elemento de línea se escribe como (ver

[28, 27, 348] para detalles sobre esta solución)

$$ds_q^2 = - \left(1 - \frac{2\eta r}{\Sigma} \right) dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - 2a \sin^2 \theta \frac{2\eta r}{\Sigma} dt d\phi \\ + \Sigma d\theta^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\Sigma} [(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta] d\phi^2, \quad (7.14)$$

con las siguientes definiciones

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (7.15)$$

$$2\eta = r(1 - f), \quad (7.16)$$

$$\Delta = r^2 f + a^2 = r^2 - 2\eta r + a^2, \quad (7.17)$$

donde $a = J/M$ es el parámetro de giro, con $0 < a \leq 1$ acotado superiormente por la condición de extremalidad $M = J$. La solución de Kerr-Newman pertenece a esta familia bajo la elección $f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}$, con M la masa ADM característica del espacio-tiempo y Q la carga eléctrica.

Debido a su carácter general, el elemento de línea (7.14) nos servirá como métrica inicial $q_{\mu\nu}$ para generar a partir de ella nuestro conjunto infinito de soluciones axisimétricas de la gravedad GBI. Suponiendo movimiento en la dirección ϕ , el vector unitario temporal del fluido (7.14) puede escribirse como $v^\mu = (v^t, 0, 0, v^\phi)$, con la parte angular dada por $v^\phi = \omega v^t$, donde $\omega \equiv d\phi/dt$ es la velocidad angular del fluido. Para fijar estas funciones v^t y ω , introducimos una base ortornormal $e_\alpha^{(\mu)}$ dada por la llamada tétrada de Carter, cuyas componentes toman la forma [91]

$$e_t^{(\mu)} = \frac{1}{\sqrt{\Sigma\Delta}}(r^2 + a^2, 0, 0, a); \quad e_r^{(\mu)} = \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}}(0, 1, 0, 0) \\ e_\theta^{(\mu)} = \frac{1}{\sqrt{\Sigma}}(0, 0, 1, 0); \quad e_\phi^{(\mu)} = \frac{-1}{\sqrt{\Sigma}\sin\theta}(a \sin^2 \theta, 0, 0, 1)$$

De la definición $q^{\mu\nu} v_\mu v_\nu = -1$ podemos identificar $v^t = \frac{r^2 + a^2}{\sqrt{\Sigma\Delta}}$ y $\omega = \frac{a}{r^2 + a^2}$, lo que implica que la expresión de la velocidad angular es completamente general para cualquier fluido compatible con la métrica (7.14). Hay que notar que esto generaliza el resultado particular obtenido en el capítulo anterior para la función ω . De manera similar, el vector unitario de tipo espacial $q^{\mu\nu} \xi_\mu \xi_\nu = 1$, viene dado por $\xi^\mu = (0, \frac{1}{\sqrt{q_{rr}}}, 0, 0) = \frac{\Delta}{\Sigma}(0, 1, 0, 0)$. A continuación, bajando índices con la métrica (7.14) y tras un poco de álgebra obtenemos las expresiones

$$v_\mu = \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}}(-1, 0, 0, a \sin^2 \theta); \quad \xi_\mu = \sqrt{\frac{\Sigma}{\Delta}}(0, 1, 0, 0). \quad (7.18)$$

Por lo tanto, la métrica GBI axialmente simétrica puede encontrarse a partir de la expresión general (7.12) escribiéndola formalmente como

$$g_{\mu\nu} = q_{\mu\nu} + \varepsilon \kappa^2 h_{\mu\nu}, \quad (7.19)$$

donde $q_{\mu\nu}$ es la métrica RG “semilla” (7.14), mientras que la corrección inducida por la gravedad GBI $h_{\mu\nu}$ se escribe como

$$h_{\mu\nu} = - \left[\frac{1}{2} (\rho^q - p_r^q) q_{\mu\nu} + (\rho^q + p_\perp^q) v_\mu v_\nu + (p_r^q - p_\perp^q) \xi_\mu \xi_\nu \right] \quad (7.20)$$

En esta expresión los vectores unitarios son los que aparecen en (7.18), mientras que los componentes del tensor energía-momento se encuentran a través de la proyección en la tétrada de Carter anterior y la comparación con las ecuaciones de Einstein (7.3). Lo que nos lleva a las expresiones

$$\rho^q = -p_r^q = \frac{2\eta' r^2}{\kappa^2 \Sigma^2}; \quad p_\perp^q = p_r^q - \frac{\eta'' r + 2\eta'}{\kappa^2 \Sigma}, \quad (7.21)$$

donde las primas denotan derivadas con respecto a la coordenada radial r . Dado que tanto ρ^q como p_\perp^q son funciones de dicha coordenada, las expresiones anteriores permiten, en principio, escribir la presión tangencial como una función de la densidad de energía, es decir, $p_\perp^q = K(\rho^q)$. Entonces, la corrección GBI (7.20) se simplifica a

$$h_{\mu\nu} = - \left[\rho^q q_{\mu\nu} + (\rho^q + K(\rho^q)) (v_\mu v_\nu - \xi_\mu \xi_\nu) \right] \quad (7.22)$$

Haciendo explícitos los vectores unitarios obtenidos en (7.18), las componentes de este término de corrección se pueden calcular como

$$h_{tt} = -\frac{1}{\Sigma} (\rho^q a^2 \sin^2 \theta + K(\rho^q) \Delta) \quad (7.23)$$

$$h_{rr} = \frac{\Sigma}{\Delta} K(\rho^q) \quad (7.24)$$

$$h_{\theta\theta} = -\Sigma \rho^q \quad (7.25)$$

$$h_{t\phi} = \frac{a \sin^2 \theta}{\Sigma} (\rho^q (r^2 + a^2) + K(\rho^q) \Delta) \quad (7.26)$$

$$h_{\phi\phi} = -\frac{\sin^2 \theta}{\Sigma} (\rho^q (r^2 + a^2)^2 + a^2 \sin^2 \theta K(\rho^q) \Delta) \quad (7.27)$$

Dado que el parámetro GBI está fuertemente constreñido por observaciones astrofísicas [24], de la física de partículas [116, 54], y cosmología [60], la métrica (7.19) típicamente implica leves desviaciones con respecto a las soluciones de RG en la escala cercana al horizonte o fotosfera, al menos para agujeros negros de tamaño astrofísico (e incluso más

pequeños para aquellos de tipo supermasivo), lo que plantea un desafío para su observación y detectabilidad a través de ondas gravitacionales y/o sombras. Sin embargo, aparecerán fuertes desviaciones a medida que nos acercamos a la región más interna de las soluciones, donde las correcciones inducidas por GBI pueden ser la contribución dominante. Este hecho puede dar lugar a estructuras causales y de singularidad notablemente diferentes de las que aparecen en RG. Bajo la presencia de horizontes estas modificaciones a la estructura causal pueden ser apenas perceptibles desde el exterior, mientras que sin dichas estructuras de horizonte, objetos compactos como por ejemplo agujeros de gusano atravesables, que también pueden surgir de estas soluciones (ver [285, 13] para ejemplos en el caso esférico), representan perspectivas mucho mejores desde un punto de vista observacional.

Ahora nos centraremos en fuentes de materia de tipo fluido anisótropo, como es el caso de las electrodinámicas no lineales (NEDs), para las cuales el procedimiento de mapeo es extraordinariamente simple, mientras que al mismo tiempo permite encontrar soluciones físicamente relevantes. Las NEDs están definidas por densidades Lagrangianas que en el EF toman la forma¹ $\mathcal{L}_m = \tilde{\varphi}(Z)$, con $Z = -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ es el tensor de intensidad de campo asociado al potencial vector A_μ , y $F^{\mu\nu} = q^{\mu\alpha}q^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}$. Las correspondientes ecuaciones de campo, $\nabla_\mu(\sqrt{-q}\tilde{\varphi}_Z F^{\mu\nu}) = 0$, permiten encontrar $Z = Z(\rho^q)$, por lo que se puede leer la relación $p_\perp^q = K(\rho^q)$ como la que caracteriza el modelo NED particular bajo consideración. Además, el interés por estos modelos surge de dos sutilezas características de los mismos. En primer lugar, la solución para el problema (electrostático) con simetría esférica para cualquier NED de la forma anterior dentro de la RG se conoce exactamente, y puede escribirse de modo general mediante la expresión [124]:

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{1}{r} \int_r^\infty R^2 T_0^0(R, Q) dR, \quad (7.28)$$

donde $T_0^0(r, Q) = \tilde{\varphi}(Z) - 2Z\tilde{\varphi}_Z$ es la componente temporal del tensor energía-momento en el mencionado escenario simétricamente esférico en el que el invariante de campo se resuelve como $Z\tilde{\varphi}_Z^2 = Q^2/r^4$. En tal caso, las expresiones (7.21) del caso con rotación se convierten en

$$\rho^q = -p_r^q = -\frac{r^4 T_0^0}{\Sigma^2}; \quad p_\perp^q = -\rho^q + \frac{4r^2 T_0^0 + r^3 (T_0^0)'}{2\Sigma}, \quad (7.29)$$

que a su vez puede interpretarse como las densidades de energía y presión generadas por un campo electromagnético axialmente simétrico con componentes $A_\mu = (A_t, 0, 0, A_\phi)$.

En segundo lugar, las ecuaciones de mapeo (7.8)-(7.10) proporcionan la correspondencia NED en los marcos RBG y RG, donde el primero se caracteriza por una nueva función

¹En el presente contexto despreciamos los campos magnéticos por simplicidad, aunque todo el procedimiento de mapeo funciona igual de bien si hubiéramos incluido tales campos como fuentes de materia.

$\mathcal{L}_m = \varphi(X)$, con $X = -\frac{1}{2}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$, donde $B_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$ pero $B^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}$, es decir, sus índices suben con $g^{\mu\nu}$ en lugar de $q^{\mu\nu}$. La forma explícita de la correspondencia fue elaborada en detalle en [117], encontrándose la relación específica entre las NEDs en cada uno de los marcos de trabajo. Por lo tanto, una vez que se define la NED objetivo en el RBG (o RG), es un entretenido ejercicio de álgebra encontrar su contraparte en el otro marco. Ahora podemos usar este resultado con el fin de resolver la contraparte del agujero negro de Kerr-Newman dentro de la gravedad GBI. Esto implica el acoplamiento de GBI a la electrodinámica de Maxwell, de tal manera que, de acuerdo con los resultados de [117], la NED correspondiente en el lado RG viene dado por (nuevamente nos restringimos a campos puramente eléctricos):

$$\varphi(X) = 2\beta^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{X}{\beta^2}} \right), \quad (7.30)$$

con la identificación de constantes

$$\beta^2 = -\frac{1}{2\epsilon\kappa^2}. \quad (7.31)$$

Resultado que se corresponde con la célebre electrodinámica de Born-Infeld (BI), siempre que nos atengamos a la identificación entre el parámetro de BI² β y el correspondiente a la gravedad GBI en la rama $\epsilon < 0$, de acuerdo con (7.31). Como es bien sabido, para soluciones electrostáticas esféricamente simétricas, la electrodinámica de BI produce un invariante de campo $X = \frac{\beta^2 Q^2}{\beta^2 r^4 + Q^2}$ lo que permite eliminar la divergencia debida a la propia energía del electrón, pero no la singularidad del agujero negro central cuando dicha electrodinámica se acopla a la RG, véase, [124]. Sin embargo cuando pasamos a las soluciones en correspondencia formadas por el acoplamiento de la gravedad GBI y la contraparte Maxwell (en el régimen no rotacional), que se discutieron en detalle en [11], se encuentra la completitud geodésica y el carácter libre de singularidades del espacio-tiempo correspondiente [284].

Para construir ahora la versión con rotación de la gravedad GBI y electromagnetismo de Maxwell utilizando el formalismo desarrollado anteriormente primero tenemos que calcular la siguiente cantidad que aparece en el EF mediante la ecuación (7.28):

$$T_0^0 = \frac{2\beta}{r^2} \left(\beta r^2 - \sqrt{\beta^2 r^4 + Q^2} \right), \quad (7.32)$$

²Si hubiéramos considerado campos magnéticos, no solo se hubieran generado los invariantes X y Z , sino también un invariante d asociado al campo dual $B_{\mu\nu}^* = -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}B^{\alpha\beta}$ hubiera hecho su aparición en (7.30) en su correcta forma BI. Por lo tanto, esta correspondencia es exacta para todas las configuraciones electromagnéticas. Ver [117] para más detalles.

La cual se reduce al resultado de la electrodinámica de Maxwell en el límite $\beta \rightarrow \infty$, es decir, $T_0^0 \sim Q^2/r^4 + \mathcal{O}(r^{-8})$. Sin embargo, el límite anterior no puede tomarse directamente ya que, a través de la identificación (7.31), esto implicaría asimismo considerar $\varepsilon \rightarrow 0$ y la gravedad GBI se reduciría a RG, recuperando así la solución habitual de Kerr-Newman. Incidentalmente, podemos darnos cuenta de que, si tratamos de mapear el sistema RG + Maxwell (es decir, la solución habitual de Kerr-Newmann), el procedimiento de “mapping” proporcionará la contraparte en el lado GBI en forma de la propia electrodinámica de BI (como vimos en el capítulo anterior), pero manteniéndose la identificación de las constantes EiBI/BI anteriores como correcta únicamente en la rama $\varepsilon > 0$. Las soluciones con rotación de tal teoría a través del “mapping” fueron encontradas y discutidas en detalle en [167]. Las soluciones de centros múltiples también fueron construidos de esa manera en [281].

En el presente sistema GBI + Maxwell bajo consideración, solo hemos de insertar la expresión (7.32) en las correspondientes expresiones para la densidad de energía y presiones en el caso con rotación, ecuación (7.29), para obtener

$$\rho^q = \frac{2\beta r^2}{\Sigma^2} \left(\sqrt{\beta^2 r^4 + Q^2} - \beta r^2 \right) \quad (7.33)$$

$$K = -\rho^q + \frac{2\beta}{\Sigma} \left(2\beta r^2 - \frac{2\beta^2 r^4 + Q^2}{\sqrt{\beta^2 r^4 + Q^2}} \right), \quad (7.34)$$

que, como era de esperar, se reducen a sus contrapartes sin rotación GBI+Maxwell en el límite $a \rightarrow 0$ (donde $\Sigma \rightarrow r^2$).

Ahora tenemos todo lo necesario para generar la contraparte de la solución de Kerr-Newman en el Sistema GBI+Maxwell a través de la ecuación (7.19). La métrica en el “background” $q_{\mu\nu}$ viene dada por el elemento de línea (7.14), caracterizado por la función con simetría esférica $f(r)$ a partir de (7.16) y viene definida por (7.28), tras insertar allí la expresión (7.32) para el campo electrostático de Born-Infeld. La correspondiente expresión admite una integración analítica para dar el resultado

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{2\beta^2}{3} \left[r^2 - \sqrt{r^4 + \frac{Q^2}{\beta^2}} + \frac{2Q^2}{\beta^2 r^2} {}_2F_1 \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \frac{-Q^2}{\beta^2 r^4} \right] \right] \quad (7.35)$$

donde ${}_2F_1[a, b, c; z]$ es una función hipergeométrica. Esto define inequívocamente la forma de la solución semilla (basada en RG) para el caso en rotación parametrizada por masa M , carga Q , espín a , y la constante de Born-Infeld β . En cuanto al término de corrección originado por la gravedad GBI, $h_{\mu\nu}$, sus componentes se dan en las ecuaciones (7.23)-(7.27), tras insertar las expresiones (7.33) y (7.34) para la densidad de energía y presión para el fluido en rotación

respectivamente. Esto completa nuestra construcción de la métrica en simetría axial del sistema GBI + Maxwell, es decir, la contraparte de la métrica de Kerr-Newman.

Notemos que en esta métrica, similar a la de Kerr-Newman, las dependencias en β^2 son reemplazadas por dependencias GBI en ε a través de la identificación (7.31), que por lo tanto se convierte en el único parámetro que codifica las desviaciones de esta métrica en rotación con respecto a la solución de Kerr-Newman de RG.

También cabe señalar que lejos de las fuentes, $r \rightarrow \infty$, donde la densidad de energía y la presión se aproximan a sus valores de vacío, $\rho^q \approx p^q_{\perp} \approx 0$, se tiene $g_{\mu\nu} \approx q_{\mu\nu}$, y el elemento de línea GBI/ Kerr-Newman se reduce a

$$ds_g^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \mathcal{O}(r^{-2}) \right) dt^2 + (1 + \mathcal{O}(r^{-1})) (dr^2 + r^2 d\Omega^2) + \left(\frac{4aM \sin^2 \theta}{r} + \mathcal{O}(r^{-2}) \right) dt d\phi, \quad (7.36)$$

de acuerdo con lo esperado en el límite de campo débil de la solución de Kerr-Newman de RG. Las correcciones GBI aparecen en el orden $\mathcal{O}(r^{-6})$ y por lo tanto se encuentran fuertemente suprimidas en este límite. Como consecuencia, esta métrica pasa de forma natural los mismos tests de campo débil que la solución de Kerr-Newman. Sin embargo, en el régimen de campo fuerte, las correcciones GBI en el parámetro ε , debidas al crecimiento de la densidad de energía y presión que aparecen en el término $h_{\mu\nu}$ de (7.19), no se pueden despreciar, de tal manera que en la región más interna de la solución pueden constituir la contribución dominante.

Debido a que las componentes g_{tt} y g_{rr} de esta solución poseen correcciones que dependen de la densidad de energía y de la presión (suprimidas por la escala de longitud de GBI), pueden surgir modificaciones relevantes en escenarios astrofísicos con respecto de sus contrapartes en RG. De hecho, esto puede afectar tanto a los (ergo-) horizontes como a la superficie tridimensional que caracteriza las geodésicas nulas inestables [205]. Dado que estas son las principales características geométricas necesarias para el análisis de la radiación de ondas gravitacionales [139] así como para el análisis de sombras y anillos de luz relacionados con los discos de acreción [163, 99], su estudio es de sumo interés. Por otra parte, la estructura de la singularidad en términos de completitud geodésica y el comportamiento de los invariantes de curvatura también se ve modificado. Por ejemplo, la singularidad de anillo característica de la solución de Kerr- Newman, en RG, puesta de manifiesto en los ceros de la componente $g_{\theta\theta} = \Sigma$, y para $\{r = 0, \theta = \pi/2\}$, se ve modificada en la presente geometría según $\Sigma(1 - \varepsilon \kappa^2 \rho^q) = 0$, donde las correcciones de densidad de energía que aparecen vía (7.33) adquieren de nuevo un protagonismo especial. Un análisis

en profundidad de estas características queda como cuestión abierta y será llevado a cabo en el futuro.

7.4 Conclusion

En este capítulo hemos combinado varios resultados teóricos encontrados en los últimos años para generar una clase infinita de soluciones axisimétricas exactas en teorías de gravedad modificada, las cuales constituyen un buen marco de trabajo para una descripción alternativa de agujeros negros más allá de la solución de Kerr-Newman.

Para obtener esta clase de soluciones axisimétricas, primero hemos considerado la técnica de Newman-Janis, la cual, partiendo de una métrica general dotada de simetría esférica, permite encontrar su contraparte giratoria, asumiendo la RG como la teoría de gravedad de partida. Al mismo tiempo, el uso de la tétrada de Carter permite encontrar la densidad de energía, presión y velocidad angular del fluido que genera tal solución con simetría axial, exigiendo el cumplimiento de las ecuaciones de Einstein. Esta familia general de soluciones con rotación en RG se convierte así en la semilla sobre la que utilizar el procedimiento de mapeo. En el caso de GBI, esto nos ha permitido encontrar su contraparte en rotación de forma exacta, la cual puede ser expresada como la solución de RG más una corrección en término(s) suprimido(s) por la escala propia de la gravedad GBI.

Usando el hecho de que las NEDs pueden ser descritas como fluidos anisótropos con $p_{\perp}^q = K(\rho^q)$, hemos obtenido en forma exacta para cualquier modelo de este tipo la correspondencia entre la gravedad GBI acoplada a un campo de Maxwell y la Relatividad General acoplada a una electrodinámica de tipo Born-Infeld. Hemos combinado ambos resultados para determinar la contrapartida de Kerr-Newman en el “frame” RBG. Conviene observar que esta identificación requiere que la constante GBI sea negativa, que es precisamente la rama de soluciones que, en el caso con simetría esférica, elimina el problema de la singularidad mediante la restauración de la completitud geodésica.

En nuestra opinión, esta solución de Kerr-Newman modificada del sistema GBI + Maxwell, que ilustra las capacidades del método de mapeo, es el resultado más importante de este capítulo (y posiblemente de esta tesis). Dicha solución se reduce a la ya conocida solución de Kerr-Newman propia de la RG en el límite de grandes distancias (campo débil) siendo por tanto automáticamente compatible con los movimientos orbitales estelares observados en tal régimen. Las posibles desviaciones de los resultados ofrecidos por la RG en el régimen fuerte quedan encapsuladas mediante un único parámetro adicional característico de la gravedad GBI. Para valores no nulos de la densidad de energía del campo de la materia (electromagnético), la física gravitacional modificada produce desviaciones

respecto a las predicciones de RG en términos de (ergo) horizontes, y superficies críticas (nulas) y en la estructura más interna del agujero negro, lo cual afecta al problema de la singularidad en forma de anillo característica de la solución Kerr-Newman. Estos aspectos son de gran interés no sólo desde un punto de vista puramente teórico, sino también desde el punto de vista de la observación astronómica multimensajero, ya que los efectos inducidos por la gravedad GBI fuera del horizonte de eventos es de esperar que se vean traducidos en modificaciones del patrón de ondas gravitacionales generadas por fusión de estrellas binarias, así como en la estructura óptica y sombras cuando son iluminadas por discos de acreción. Además, si la eliminación de las singularidades espacio-temporales en las soluciones con simetría esférica pueden extenderse al caso axisimétrico, esto implicaría que las soluciones de tipo Kerr-Newman sin horizonte (suplementadas con un adecuado mecanismo de colapso gravitacional) podrían ser interpretadas como objetos compactos, alternativos a los agujeros negros de la RG [330]. La combinación de estos resultados permitiría probar la existencia de nuevas dinámicas gravitatorias más allá de los actuales tests en el límite de campo débil [310].

Capítulo 8

Rotación en 2+1: BTZ en GBI

8.1 Introducción

En los dos capítulos anteriores, hemos construido soluciones con rotación en el modelo GBI usando la técnica de *mapping* que existe entre teorías RBG y la RG. Ahora pasaremos a estudiar otra familia de soluciones con rotación pero en escenarios de dimensiones inferiores, con la esperanza de aprender técnicas y lecciones que puedan ser de utilidad en el contexto de la materia condensada.

La métrica de Bañados-Teitelboim-Zanelli (BTZ) describe una solución con simetría axial de las ecuaciones de campo de Einstein-Maxwell en 2+1 dimensiones en la Relatividad General (GR) y en presencia de una constante cosmológica negativa. Originalmente, su interés se basó en el hecho de que dicha solución permite la existencia de un espacio Anti-de Sitter con masa negativa, desconectado del espectro de agujero negro por una separación en los valores de la masa [41, 40]. Dicha configuración no tiene un horizonte de eventos recubriéndola, pero los escalares de curvatura son finitos en toda la variedad, lo que permite visualizarla como una suerte de objeto desnudo, pero regular. Este descubrimiento inició la investigación en el campo de las singularidades de agujero negro suavizadas, en las que la región interna es reemplazada por núcleos de Sitter [128, 20, 239, 248], y del papel de la solución BTZ en el contexto de la correspondencia ADS/CFT [100] o del análisis de sus modos cuasi-normales [86]. Además, la solución BTZ se ha extendido para incluir la carga eléctrica [88, 96], y posteriormente generalizada para incluir campos de materia que presentan dependencias no lineales [95, 185, 157] así como descripciones que entran en el dominio cuántico [134].

Por otra parte, es un hecho bien conocido desde hace mucho tiempo que la RG requiere en el sector ultravioleta de la introducción de términos superiores en la curvatura, inversamente proporcionales a la masa de Planck [64, 295], para ser una teoría completa. En este sentido

ha surgido un considerable número de propuestas acerca de cómo implementar esta extensión ([112, 82, 106, 272]) aunque todas estas soluciones generalizadas deben ser capaces de resolver el problema que suponen las singularidades espacio-temporales que ocultan los agujeros negros (ver por ejemplo [325] para una discusión en profundidad de la naturaleza de estas singularidades y los teoremas que las predicen). Por lo tanto, el descubrimiento de soluciones exactas en tres dimensiones con interés físico en el marco de nuevas teorías de la gravedad despierta un gran interés en la literatura relacionada [276, 18, 187, 169, 343, 223, 74]. Debido a que dichas extensiones introducen habitualmente ecuaciones de campo de orden superior y/o aumentan considerablemente el carácter no lineal de las mismas, se han desarrollado varios procedimientos con el objetivo de permitir un acceso más directo a la estructura de las ecuaciones de campo. Uno de esos métodos, el algoritmo de Newman-Janis [270, 269] ha facilitado la obtención de un amplio número de nuevas soluciones, incluyendo agujeros negros en rotación o en ausencia de singularidades y las características principales de este tipo de soluciones han sido asimismo debatidas [35, 347, 350, 327, 188, 260, 328].

Otro método para generar soluciones ha sido desarrollado recientemente para teorías de la gravedad formuladas en espacios métrico-afines, en los que la conexión y la métrica son tratadas como objetos independientes [30]. Este es el método que desarrollamos en esta tesis. La investigación actual ha permitido identificar varias familias de dichas teorías basadas en el tensor de Ricci y sus contracciones (RBGs, Ricci-based gravities en su original en inglés) las cuales han demostrado su fiabilidad en bancos de pruebas tales como las observaciones de ondas gravitacionales o los tests en el sistema solar y permiten la introducción de un marco de trabajo Einsteiniano (EF) para representar las ecuaciones de campo [14]. Usando este marco de trabajo es posible establecer una correspondencia o “mapping” entre la RG acoplada a determinados campos de materia, descritos por una densidad Lagrangiana dada, y una teoría RBG acoplada a los mismos campos de materia, pero mediante una densidad Lagrangiana diferente [11, 12]. De esta forma, una vez que una solución semilla en el lado RG es conocida, es sencillo encontrar su contraparte en el lado RBG mediante transformaciones puramente algebraicas, como ya se ilustró en el capítulo anterior. En el vacío la correspondencia es trivial y es inmediato recuperar la RG y sus soluciones, pero en presencia de fuentes de materia se han obtenido nuevas soluciones exactas para la teoría RBG en escenarios con simetría axial [167, 330], e incluso configuraciones que carecen de simetrías [281] permiten explorar la fenomenología de la teorías métrico-afines de una forma mucho más eficiente [17].

El objetivo principal de este capítulo es el de utilizar el “mapping” anteriormente mencionado con el fin de generar la contraparte de la solución BTZ en una de las teorías que forman parte del grupo RBGs: la llamada gravedad de Born- Infeld (GBI) en su formu-

lación inspirada por Eddington (EiBI gravity en su original en inglés). Dicha teoría ha atraído un considerable interés en la literatura (para una revisión de los orígenes de esta teoría, así como sus diversas aplicaciones, consultar [58]). Desarrollaremos la estructura específica del “mapping” para campos electromagnéticos en dimensión 2+1 estableciendo la correspondencia entre las acciones de materia en cada uno de los marcos de trabajo, encontrando que la RG acoplada al electromagnetismo de Maxwell se corresponde con GBI acoplada a una electrodinámica no lineal, de tipo Born-Infeld. Comprobaremos la validez de esta solución al obtenerla de nuevo usando un fluido anisótropo que representa al campo electromagnético. Estudiaremos entonces las principales características de las nuevas configuraciones así obtenidas, que resultan ser cuantitativamente diferentes, dependiendo del signo del parámetro característico de la gravedad GBI. En particular, discutiremos las ergosferas y horizontes propios de estas soluciones, la estructura de la función radial y su impacto en las regiones internas, en especial en lo que concierne a la completitud de las geodésicas.

8.2 El “mapping” electromagnético en 2 + 1

Como se ha demostrado en el capítulo anterior (ver también [14]), en 3 + 1 dimensiones espacio-temporales, las ecuaciones de campo de la familia RBG pueden reducirse consistentemente a las ecuaciones de Einstein cuando la métrica se redefine adecuadamente y se incluyen interacciones no lineales en el sector de la materia. Para extender esta última afirmación a 2 + 1 dimensiones, es necesario revisar todos los pasos que llevaron al establecimiento de la correspondencia RBG-RG, poniendo especial atención a la dependencia que las cantidades geométricas implicadas pueden tener en el número de dimensiones del espacio-tiempo.

8.2.1 Compatibilidad métrica de las teorías RBG

En cuanto a las ecuaciones de campo originadas a partir de la variación de la acción RBG, su dependencia de la dimensión es manifiesta. De hecho, se puede comprobar explícitamente que la variación con respecto a la conexión conduce a la siguiente restricción cinemática:

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \nabla_{\mu} \left(\sqrt{|g|} \mathcal{L}^{\beta\lambda} \right) \delta_{\alpha\lambda}^{\mu\nu} = S_{\alpha\lambda}^{\nu} \mathcal{L}^{\beta\lambda} + 2S_{\lambda}^{\lambda\mu} \mathcal{L}^{\beta\lambda} \delta_{\alpha\lambda}^{\mu\nu} \quad (8.1)$$

donde se ha introducido el tensor

$$\mathcal{L}^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial R_{\mu\nu}}, \quad (8.2)$$

y $S_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}(\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda})$. Teniendo especial cuidado con los diferentes factores que dependen de la elección específica de un espacio-tiempo 2 + 1 dimensional, se pueden seguir los mismos pasos descritos en [288], reduciendo las ecuaciones de campo (8.1) a la siguiente relación

$$\nabla_{\lambda} q_{\mu\nu} = 2 \left(S_{\nu\lambda}^{\alpha} q_{\mu\alpha} - S^{\alpha}_{\alpha\beta} q_{\mu\gamma} \delta_{(\lambda}^{\beta} \delta_{\gamma)}^{\nu} \right), \quad (8.3)$$

donde la métrica auxiliar

$$q^{\mu\nu} \equiv \xi \left| \frac{\mathcal{L}}{g} \right| \mathcal{L}^{\mu\nu}, \quad (8.4)$$

se ha definido en términos del determinante \mathcal{L} de $\mathcal{L}^{\mu\nu}$ y de una constante arbitraria ξ . Realizando lo siguiente transformación proyectiva

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} - S^{\alpha}_{\alpha\mu} \delta_{\nu}^{\lambda} \quad (8.5)$$

las ecuaciones de campo (8.3) asumen el siguiente aspecto mucho más manejable

$$\tilde{\nabla}_{\lambda} q_{\mu\nu} = 2 \tilde{S}_{\nu\lambda}^{\alpha} q_{\mu\alpha}, \quad (8.6)$$

donde de ahora en adelante las tildes sobre las derivadas covariantes implican que están definidos con respecto a la conexión con tilde como se define en (8.5). A partir de (8.6), es sencillo escribir la conexión con tilde en términos de la métrica auxiliar para finalmente resolver la ecuación del campo de conexión como sigue

$$\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{(\alpha\nu)} = \frac{1}{2} q^{\lambda\mu} (\partial_{\alpha} q_{\mu\nu} + \partial_{\nu} q_{\alpha\mu} - \partial_{\mu} q_{\nu\alpha}) ; \tilde{S}_{\lambda\alpha\nu} = 0, \quad (8.7)$$

lo que nos abre la posibilidad de describir una teoría RBG como una (pseudo-) geometría de Riemann en términos de la métrica auxiliar $q_{\mu\nu}$

8.2.2 RBGs vistas como RG

En analogía con el caso en 3+1 dimensiones, la métrica auxiliar $q_{\mu\nu}$ puede considerarse como una solución de RG siempre que las ecuaciones de campo asociadas a la RBG compartan la misma dependencia de la materia que las ecuaciones de campo de Einstein cuando se expresan en términos de $q_{\mu\nu}$. Por lo tanto, definimos el Einstein Frame como la teoría basada en la acción

$$S_{GR} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^3x \sqrt{-q} \tilde{R}(\tilde{\Gamma}), \quad (8.8)$$

que es la formulación métrica de RG, donde los campos y variables inherentes a RG se caracterizan por una tilde. Un vistazo a las ecuaciones de campo para la métrica en los

marcos RBG y RG, que vienen dados por¹

$$\frac{\delta \mathcal{L}_G}{\delta R_{\mu\rho}} R_{\rho\nu}(\Gamma) = \frac{1}{2} T^\mu{}_\nu + \frac{1}{2} \mathcal{L}_G \delta^\mu{}_\nu, \quad (8.9)$$

y

$$q^{\mu\rho} R_{\rho\nu}(\tilde{\Gamma}) = \kappa^2 (\tilde{T}^\mu{}_\nu - \tilde{T} \delta^\mu{}_\nu), \quad (8.10)$$

respectivamente, la descripción efectiva de las dos teorías es equivalente si se cumple la siguiente condición

$$\sqrt{-q} (\tilde{T}^\mu{}_\nu - \tilde{T} \delta^\mu{}_\nu) = \sqrt{-g} (T^\mu{}_\nu + \mathcal{L}_G \delta^\mu{}_\nu), \quad (8.11)$$

donde la definición de la métrica auxiliar (8.4) ha sido reformulada de la siguiente manera

$$\sqrt{-q} q_{\mu\nu} = 2\kappa^2 \sqrt{-g} \frac{\delta \mathcal{L}_G}{\delta R_{\mu\nu}}, \quad (8.12)$$

fijando así la constante arbitraria en $\xi = (2\kappa^2)^{-2}$, donde $\kappa^2 = 8\pi G$ es la constante de Newton. De la definición de el tensor energía-momento, $T_{\mu\nu}(g) = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}}$, y su análogo en el EF $\tilde{T}_{\mu\nu}(q) = \frac{-2}{\sqrt{-q}} \frac{\delta \tilde{\mathcal{L}}_m}{\delta q^{\mu\nu}}$, puede demostrarse que la condición (8.11) proporciona la siguiente receta para relacionar los sectores de materia en cada “frame” :

$$\begin{aligned} & \sqrt{-g} \mathcal{L}_m(g, \Psi) \\ &= 2\sqrt{-q} \left(q^{\mu\nu} \frac{\delta \tilde{\mathcal{L}}_m(q, \Psi)}{\delta q^{\mu\nu}} - \tilde{\mathcal{L}}_m(q, \Psi) \right) - \sqrt{-q} \mathcal{L}_G, \end{aligned} \quad (8.13)$$

si el espacio de soluciones está restringido por las condiciones

$$\sqrt{-g} g^{\mu\rho} \frac{\delta \mathcal{L}_m(g, \Psi)}{\delta g^{\rho\nu}} = \sqrt{-q} q^{\mu\rho} \frac{\delta \tilde{\mathcal{L}}_m(q, \Psi)}{\delta q^{\rho\nu}}. \quad (8.14)$$

Para que estas parametrizaciones sean útiles, es necesario que la expresión explícita del Lagrangiano de gravedad en términos de los campos de materia sea conocida. Esta relación está codificada en las ecuaciones de campo asociadas a la variación de la métrica en el EF (8.10). Sin embargo, dependiendo de la teoría RBG específica elegida, puede resultar muy difícil expresar el Lagrangiano de gravedad en términos de campos de materia.

¹Nótese que la dependencia del Lagrangiano en $R^\mu{}_\nu$ permite usar la siguiente identidad $\frac{\delta \mathcal{L}_G(R^\mu{}_\nu)}{\delta g^{\rho\sigma}} = \frac{\delta \mathcal{L}_G(R^\mu{}_\nu)}{\delta R_{\alpha\beta}} g_{\alpha\rho} R_{\beta\sigma}$.

8.2.3 El “mapping” para la gravedad de Born-infeld

Ahora nos centraremos nuevamente en la gravedad GBI, cuya acción ya nos es conocida y viene dada por [58]

$$\mathcal{L}_{EiBI} = \frac{1}{\varepsilon \kappa^2} \int d^D x \left(\sqrt{-|g_{\mu\nu} + \varepsilon R_{\mu\nu}|} - \lambda \sqrt{-g} \right). \quad (8.15)$$

La gravedad GBI una teoría es particularmente amigable, ya que la cuestión planteada al final del apartado anterior se puede resolver fácilmente observando que la densidad lagrangiana GBI se puede expresar como

$$\mathcal{L}_{EiBI} = \frac{1}{\varepsilon \kappa^2} \left[8\kappa^6 \det \left(\frac{\delta \mathcal{L}_{EiBI}}{\delta R^\mu{}_\nu} \right) - \lambda \right], \quad (8.16)$$

lo que nos lleva al principal problema de este procedimiento, encontrar la dependencia funcional de $\frac{\delta \mathcal{L}_{EiBI}}{\delta R^\mu{}_\nu}$ con respecto al tensor energía-momento. En el presente caso, utilizando la definición de la métrica auxiliar expresada como

$$q_{\mu\nu} = \frac{1}{4\kappa^4} \det^{-1} \left(\frac{\delta \mathcal{L}_{EiBI}}{\delta R^\rho{}_\sigma} \right) \frac{\delta \mathcal{L}_{EiBI}}{\delta R^\lambda{}_\mu} g_{\lambda\nu}, \quad (8.17)$$

es fácil encontrar el tensor de Ricci en términos de la derivada del Lagrangiano de gravedad con respecto al propio tensor de Ricci

$$\varepsilon \tilde{R}^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu - (2\kappa^2)^{-2} g^{-1} \det^{-1} \left(\frac{\delta \mathcal{L}_{EiBI}}{\delta R_{\alpha\beta}} \right) \frac{\delta \mathcal{L}_{EiBI}}{\delta R_{\mu\rho}} g^{\rho\nu}, \quad (8.18)$$

de modo que las ecuaciones de campo (8.10) se pueden reformular de la siguiente manera

$$\det^{-1} \left(\frac{\delta \mathcal{L}_{EiBI}}{\delta R^\rho{}_\sigma} \right) \frac{\delta \mathcal{L}_{EiBI}}{\delta R^\nu{}_\mu} = 4\kappa^4 [\delta^\mu{}_\nu - \varepsilon \kappa^2 (\tilde{T}^\mu{}_\nu - \tilde{T} \delta^\mu{}_\nu)], \quad (8.19)$$

lo que lleva al mapeo general entre métricas simplemente reemplazando esta última ecuación en (8.17):

$$q^{\mu\nu} = [\delta^\mu{}_\lambda - \varepsilon \kappa^2 (\tilde{T}^\mu{}_\lambda - \tilde{T} \delta^\mu{}_\lambda)] g^{\lambda\nu}. \quad (8.20)$$

Además, la ecuación Eq.(8.19) proporciona el determinante

$$\det \left(\frac{\delta \mathcal{L}_{EiBI}}{\delta R^\rho{}_\sigma} \right) = \frac{1}{8\kappa^6} \det^{-1} [\delta^\mu{}_\nu - \varepsilon \kappa^2 (\tilde{T}^\mu{}_\nu - \tilde{T} \delta^\mu{}_\nu)]. \quad (8.21)$$

Usando esta última ecuación para simplificar (8.16), encontramos finalmente

$$\mathcal{L}_{EiBI} = \frac{1 - \lambda \sqrt{\det [\delta_\sigma^\rho - \epsilon \kappa^2 (\tilde{T}^\rho_\sigma - \tilde{T} \delta_\sigma^\rho)]}}{\epsilon \kappa^2 \sqrt{\det [\delta_\sigma^\rho - \epsilon \kappa^2 (\tilde{T}^\rho_\sigma - \tilde{T} \delta_\sigma^\rho)]}}, \quad (8.22)$$

que se puede sustituir en (8.13) para darnos

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{\epsilon \kappa^2} \left\{ \lambda - \frac{1 - \epsilon \kappa^2 (\tilde{\mathcal{L}}_m - \tilde{T})}{\sqrt{\det [\delta_\sigma^\rho - \epsilon \kappa^2 (\tilde{T}^\rho_\sigma - \tilde{T} \delta_\sigma^\rho)]}} \right\} \Big|_{q=q(g)}. \quad (8.23)$$

Señalemos que esto no deja de ser una parametrización del sector de la materia GBI ya que el lado derecho es una función de la métrica del EF mientras buscamos una Lagrangiana que depende totalmente de las cantidades en el lado GBI. En lugar de reemplazar la métrica, usemos el hecho de que el contenido de la materia viene dado por un campo electromagnético, lo que implica que el Lagrangiano de materia depende de un único invariante que puede escribirse en términos de la intensidad de campo $F_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu}A_{\nu]}$ como sigue

$$K = -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (8.24)$$

Esto es una consecuencia de la propiedad de reducción productos arbitrarios del tensor de intensidad de campo y su dual de acuerdo con la discusión dada en el Apéndice A de nuestro artículo [168]. Esta observación lleva a la intuición de que la métrica siempre está encapsulada en este invariante de modo que si encontramos una manera de relacionar los invariantes en marcos diferentes, entonces el tensor energía-momento en el EF podría escribirse en términos de campos de materia en el marco RBG. Siguiendo esta estrategia, notemos que la ecuación de mapeo (8.20) puede invertirse como:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= q_{\mu\nu} - \epsilon \kappa^2 (\tilde{T}_{\mu\nu} - \tilde{T} q_{\mu\nu}) \\ &= \left[1 + 2\epsilon \kappa^2 \left(\tilde{\mathcal{L}}_m - q^{\rho\sigma} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}_m}{\partial q^{\rho\sigma}} \right) \right] q_{\mu\nu} + 2\epsilon \kappa^2 \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}_m}{\partial q^{\mu\nu}}. \end{aligned} \quad (8.25)$$

Especificando esta ecuación al caso de un campo electromagnético libre (Maxwell) con una constante cosmológica en el EF, es decir $4\pi\tilde{\mathcal{L}}_m = \tilde{K}/2 - 4\pi\Lambda/\kappa^2$, con $\tilde{K} \equiv \frac{1}{2}q^{\mu\nu}F_{\mu\rho}q^{\rho\sigma}F_{\sigma\nu}$, encontramos:

$$g_{\mu\nu} = \left[1 - \epsilon \kappa^2 \left(\frac{\tilde{K}}{4\pi} + \frac{2\Lambda}{\kappa^2} \right) \right] q_{\mu\nu} + \frac{\epsilon \kappa^2}{4\pi} \tilde{K}_{\mu\nu}, \quad (8.26)$$

donde hemos introducido el tensor $\tilde{K}_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \tilde{K}}{\partial q^{\mu\nu}}$ y usado la identidad

$$\frac{\delta \tilde{\mathcal{L}}_m}{\delta q^{\mu\nu}} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}_m}{\partial \tilde{K}} \tilde{K}_{\mu\nu}. \quad (8.27)$$

Usando la siguiente relación de cierre (que se deriva en el Apéndice A mencionado antes)

$$K^\mu{}_\rho K^\rho{}_\nu = K K^\mu{}_\nu, \quad (8.28)$$

podemos calcular fácilmente la inversa de (8.26), esto es

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{\left[1 - \varepsilon \kappa^2 \left(\frac{\tilde{K}}{4\pi} + \frac{2\Lambda}{\kappa^2}\right)\right]} \left(q^{\mu\nu} - \frac{\varepsilon \kappa^2}{4\pi(1 - 2\varepsilon\Lambda)} \tilde{K}^{\mu\nu} \right), \quad (8.29)$$

para encontrar finalmente

$$K = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} F_{\mu\rho} g^{\rho\sigma} F_{\sigma\nu} = \tilde{K} \cdot \frac{(1 - \tilde{\varepsilon} \kappa^2 \tilde{K})^2}{\left[1 - \varepsilon \kappa^2 \left(\frac{\tilde{K}}{4\pi} + \frac{2\Lambda}{\kappa^2}\right)\right]^2}, \quad (8.30)$$

donde hemos definido $\tilde{\varepsilon} \equiv \varepsilon/(4\pi(1 - 2\varepsilon\Lambda))$. Teniendo en cuenta que la ecuación anterior se reduce a la relación trivial entre invariantes $K = \tilde{K}$ cuando el producto $\varepsilon\Lambda \rightarrow 0$, mientras que en el caso general (sorprendentemente) simplemente conduce a $K = \tilde{K}/(1 - 2\varepsilon\Lambda)^2$. Con este resultado en mano, podemos volver a la parametrización (8.23) para ver que la correspondiente densidad Lagrangiana en el lado RBG está dada por

$$\varepsilon \kappa^2 \mathcal{L}_m = \lambda - \frac{1 - \varepsilon \kappa^2 \left(\frac{\tilde{K}}{4\pi} + \frac{2\Lambda}{\kappa^2}\right)}{\sqrt{\det \left\{ \left[1 - \varepsilon \kappa^2 \left(\frac{\tilde{K}}{4\pi} + \frac{2\Lambda}{\kappa^2}\right)\right] \delta_\sigma^\rho + \frac{\varepsilon \kappa^2}{4\pi} \tilde{K}^\rho{}_\sigma \right\}}}.$$

Evaluando el determinante en el denominador de esta expresión usando la fórmula

$$\det(A\delta_\nu^\mu + BK^\mu{}_\nu) = A(A + BK)^2, \quad (8.31)$$

que se sigue de la regla de composición (8.28), y usando que $K = \tilde{K}/(1 - 2\varepsilon\Lambda)^2$ el sector de materia RBG finalmente puede escribirse como

$$\mathcal{L}_m(K) = \frac{1}{\varepsilon \kappa^2} \left(\lambda - \sqrt{\frac{1}{1 - 2\varepsilon\Lambda} - \frac{\varepsilon \kappa^2}{4\pi} K} \right). \quad (8.32)$$

Teniendo en cuenta que el término $\varepsilon\Lambda$ debe considerarse absolutamente insignificante porque implica el producto de dos cantidades infinitesimales. Expandiendo en serie este término en el Lagrangiano, encontramos

$$\mathcal{L}_m(K) \approx \frac{1}{\varepsilon\kappa^2} \left(\lambda - \sqrt{1 - 2\varepsilon\kappa^2 \left(\frac{K}{8\pi} - \frac{\Lambda}{\kappa^2} \right)} \right), \quad (8.33)$$

que representa una versión al estilo Born-Infeld del Lagrangiano de materia en el EF $\mathcal{L}_m = \frac{\tilde{K}}{8\pi} - \Lambda/\kappa^2$. Esto demuestra que las no linealidades que aparecen en el Lagrangiano de gravedad GBI son en cierta forma compensadas por la interacción no lineal con el campo electromagnético, dando lugar al análogo en 2+1 dimensiones de la electrodinámica de Born-Infeld, donde la intensidad de campo dual de Hodge está ausente ya que estamos trabajando en una teoría dimensional impar.

8.2.4 Enfoque alternativo: representación con fluidos anisotrópos

Un enfoque alternativo y más práctico para ilustrar el mapeo de soluciones entre las teorías RG y RBG consiste en describir el campo electromagnético como un determinado fluido de carácter anisótropo, tal y como se consideró por vez primera en [11] e hicimos en el capítulo anterior. Usaremos también dicho enfoque en esta sección para verificar nuestros resultados por partida doble, siguiendo para ello un planteamiento totalmente diferente al de la sección anterior. Para ello, en primer lugar establecemos el tensor energía-momento en el marco RBG como

$$T_{\mu\nu}(g) = (\rho + p_{\perp})u_{\mu}u_{\nu} + p_{\perp}g_{\mu\nu} + (p_r - p_{\perp})\chi_{\mu}\chi_{\nu}, \quad (8.34)$$

siendo $u^{\mu}u^{\nu}g_{\mu\nu} = -1$ y $\chi^{\mu}\chi^{\nu}g_{\mu\nu} = 1$ vectores temporales y espaciales y donde ρ es la densidad de energía, p_r la presión radial y p_{\perp} la tangencial. Del mismo modo, consideremos otro fluido anisótropo en el marco RG como

$$\tilde{T}_{\mu\nu}(q) = (\tilde{\rho} + \tilde{p}_{\perp})v_{\mu}v_{\nu} + \tilde{p}_{\perp}q_{\mu\nu} + (\tilde{p}_r - \tilde{p}_{\perp})\xi_{\mu}\xi_{\nu}, \quad (8.35)$$

Con nuevos vectores temporales y espaciales $v^{\mu}v^{\nu}q_{\mu\nu} = -1$ y $\xi^{\mu}\xi^{\nu}q_{\mu\nu} = 1$, y nuevas densidades y presiones, $(\tilde{\rho}, \tilde{p}_r, \tilde{p}_{\perp})$, caracterizando el fluido. La relación fundamental entre los sectores de materia está dada por (8.11), que podemos reescribir como

$$\sqrt{-q}\tilde{T}_{\nu}^{\mu}(q) = \sqrt{-g} \left[T^{\mu}_{\nu}(g) - \frac{1}{2}\delta_{\nu}^{\mu}(\mathcal{L}_G + T(g)) \right], \quad (8.36)$$

y que se puede reformular en términos de las variables del fluido anisótropo para obtener las correspondencias:

$$\sqrt{-q}\tilde{p}_\perp = \sqrt{-g}\left(\frac{\rho + p_\perp - p_r - \mathcal{L}_G}{2}\right) \quad (8.37)$$

$$\sqrt{-q}(\tilde{\rho} + \tilde{p}_\perp) = \sqrt{-g}(\rho + p_\perp) \quad (8.38)$$

$$\sqrt{-q}(\tilde{p}_r - \tilde{p}_\perp) = \sqrt{-g}(p_r + p_\perp) \quad (8.39)$$

Que nos permiten relacionar las funciones del fluido en cada uno de los marcos . La relación entre los determinantes de la métrica se establece una vez que se elige una teoría RBG particular, de modo que las ecuaciones de mapeo (8.37), (8.38) y (8.39) permiten asimismo relacionar las fuentes de materia en cada marco. Particularizando para la gravedad GBI podemos aprovechar la inversa (8.20) para encontrar :

$$g_{\mu\nu} = (1 + \varepsilon\kappa^2\tilde{T})q_{\mu\nu} - \varepsilon\kappa^2\tilde{T}_{\mu\nu} . \quad (8.40)$$

Como resultado, dada una métrica $q_{\mu\nu}$ que satisface las ecuaciones de Einstein $G_{\mu\nu}(q) = \kappa^2\tilde{T}_{\mu\nu}$, with $\tilde{T}_{\mu\nu}$ como en la ecuación (8.35), entonces $g_{\mu\nu}$ proporciona una solución a las ecuaciones GBI con el tensor energía-momento $T_{\mu\nu}$ de (8.34) como fuente. En términos de las variables del fluido anisótropo tenemos que

$$g_{\mu\nu} = [1 + \varepsilon\kappa^2(\tilde{p}_r - \tilde{\rho})]q_{\mu\nu} - \varepsilon\kappa^2(\tilde{\rho} + \tilde{p}_\perp)v_\mu v_\nu + (\tilde{p}_r - \tilde{p}_\perp)\xi_\mu\xi_\nu , \quad (8.41)$$

lo que proporciona la solución en 2 + 1 dimensiones de la gravedad GBI, una vez que se ha determinado una solución semilla en RG (según lo determinado por $\{\tilde{\rho}, \tilde{p}_r, \tilde{p}_\perp\}$) Una de nuestras tareas a continuación consistirá entonces en la identificación de las variables del fluido asociadas a la solución BTZ en RG para a partir de ellas construir una nueva solución en GBI.

8.3 Soluciones tipo BTZ en gravedad GBI

8.3.1 La solución BTZ en RG

Siguiendo la notación de Carlip [88], en un sistema de coordenadas estático y con simetría axial en 2+1 dimensiones (t, x, ϕ) , la solución BTZ viene dada por:

$$ds^2 = -(N^\perp)^2 dt^2 + f^{-2} dx^2 + x^2 (d\phi + N^\phi dt)^2 , \quad (8.42)$$

con las definiciones

$$N^\perp = f = \left(-M + \frac{x^2}{l^2} + \frac{J^2}{4x^2} \right)^{1/2}; N^\phi = -\frac{J}{2x^2}, \quad (8.43)$$

donde M es la masa ADM del sistema, $l = -\Lambda^{-2}$ la longitud AdS y J momento angular. Para estudiar la estructura de este elemento de línea con más detalle, es instructivo reescribirlo explícitamente como:

$$ds^2 = \left(M - \frac{x^2}{l^2} \right) dt^2 + f^{-2} dx^2 + x^2 d\phi^2 - J dt d\phi, \quad (8.44)$$

que es (quizás) una forma más canónica de expresar un elemento de línea axialmente simétrico y nos permite leer más fácilmente su estructura física. Por ejemplo, la componente g_{tt} presenta una única raíz que viene dada por:

$$x_{erg} = lM^{1/2}, \quad (8.45)$$

Cuya parte interna define la ergoregión, es decir, la región dentro de la cual el observador se ve obligado a rotar solidariamente con el agujero negro, $d\phi/dt > 0$. Por otro lado, los horizontes de Killing de esta geometría vienen dados por los ceros de $g^{xx} = f^2$, que son:

$$x_{\pm}^2 = \frac{Ml^2}{2} \left(1 \pm \left[1 - \left(\frac{J}{Ml} \right)^2 \right] \right), \quad (8.46)$$

y se corresponden con el horizonte de sucesos (exterior) y el horizonte interno respectivamente. Usando Ecs.(8.45) y (8.46) se pueden establecer las diferentes configuraciones en la solución BTZ. Para valores positivos de la masa $M > 0$, se encuentra un espectro de agujeros negros (cubierto por un ergohorizonte) siempre que $|J| \leq Ml$ (con el caso límite $J = Ml$ correspondiente al agujero negro extremal), y singularidades desnudas si $|J| > Ml$. Para masa y momento angular nulos $M = J = 0$, tenemos un agujero negro no masivo, correspondiente al espacio puramente de AdS. El santo grial de la solución BTZ corresponde al estado $M = -1, J = 0$ para el cual se tiene un núcleo regular de De Sitter, desconectado del espectro del agujero negro.

En lo que se refiere a este trabajo, estamos interesados en la generalización de la solución BTZ con carga eléctrica acoplada a un campo de Maxwell, $\mathcal{L}_m = \tilde{K}/2$. En tal caso, el campo electromagnético se caracteriza por $A_\mu = (\frac{1}{2}Q \log(x/x_0), 0, 0)$, con x_0 una escala de longitud

arbitraria , y Ec. (8.44) se generaliza a :

$$ds^2 = - \left(H(x) - \frac{J^2}{4x^2} \right) dt^2 + \frac{1}{H(x)} dx^2 + x^2 d\phi^2 - J dt d\phi , \quad (8.47)$$

con $H(x) = -M - \frac{Q^2}{2} \log(x/x_0) + \frac{x^2}{l^2} + \frac{J^2}{4x^2}$ y Q la carga eléctrica. Los ergohorizontes en este caso vienen dados por, $g_{tt} = 0$, y resultan ser:

$$x_{\pm} = \pm \frac{lQ}{2} PL \left[\frac{-4e^{-4M/Q^2}}{l^2 Q^2} \right]^{1/2} , \quad (8.48)$$

donde PL denota la solución principal de la función W de Lambert. Esto supone dos soluciones reales dependiendo de la combinación de los valores de $\{l, Q, M\}$, lo que significa que hay ramas de las soluciones donde la ergoregión está ausente de manera similar a la solución habitual en cuatro dimensiones, Kerr-(Newman) en RG. Para los horizontes $g^{xx} = H(x)$, no es posible una expresión concisa pero se puede estudiar la posición de los extremos de f^2 , resultando:

$$x_e = l \left(Q^2 \pm \sqrt{Q^4 + 16J^2/l^2/8} \right)^{1/2} . \quad (8.49)$$

De esta forma, escribiendo $H(x_e) = H_e$ y asumiendo $H_e < 0$ se puede demostrar fácilmente que se encuentran agujeros negros con dos horizontes cuando $M > H_e$, agujeros negros extremos si $M = H_e$, y singularidades desnudas en caso contrario. Esto último es asimismo válido para todos los casos en que $H_e > 0$. Vale la pena señalar que el estado de Sitter dado por $M = -1, J = 0$ propio de la solución no cargada desaparece siendo reemplazado por $g^{xx}(x \approx 0) \approx -\frac{Q^2}{2} \log x$, correspondiente a los agujeros negros con un solo horizonte no degenerado. Por lo tanto, la adición de carga a la solución BTZ destruye su rasgo más carismático.

8.3.2 Generando la solución GBI-BTZ: enfoque electromagnético

Vayamos ahora al punto más importante de nuestra discusión. El Mapeo de la solución BTZ cargada en la gravedad GBI es casi una cuestión trivial usando la ecuación (8.26) y sabiendo que el campo electromagnético en el EF está determinado por: $A_{\mu} = (\frac{1}{2}Q \log(x/x_0), 0, 0)$.

Con este valor de A_μ , encontramos:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{Q}{2x} & 0 \\ \frac{Q}{2x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.50)$$

lo que lleva a

$$\tilde{K}_{\mu\nu} = q^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha} F_{\beta\nu} = \frac{Q^2}{4x^2} \begin{pmatrix} -f & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{f} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.51)$$

y $\tilde{K} = q^{\mu\nu} \tilde{K}_{\mu\nu}/2 = Q^2/4x^2$. Como resultado obtenemos:

$$g_{\mu\nu} = \left[1 - \varepsilon \kappa^2 \left(\frac{Q^2}{16\pi x^2} + \frac{2\Lambda}{\kappa^2} \right) \right] q_{\mu\nu} + \frac{\varepsilon \kappa^2}{4\pi} \tilde{K}_{\mu\nu}, \quad (8.52)$$

y el elemento de línea

$$\begin{aligned} \frac{ds^2}{\eta} &= \left(M + \frac{Q^2}{2} \log \left(\frac{x}{x_0} \right) - \frac{x^2}{l^2} - \frac{\varepsilon \kappa^2 J^2 Q^2}{64\pi \eta x^4} \right) dt^2 \\ &+ H^{-1} dx^2 \\ &+ x^2 \left(1 - \frac{\varepsilon \kappa^2 Q^2}{16\pi \eta x^2} \right) d\phi^2 - J \left(1 - \frac{\varepsilon \kappa^2 Q^2}{16\pi \eta x^2} \right) dt d\phi, \end{aligned} \quad (8.53)$$

donde hemos introducido $\eta \equiv (1 - 2\varepsilon\Lambda)$. Nótese también que $\kappa^2 = 8\pi$ y $\Lambda = -1/l^2$. Esto concluye nuestra derivación del elemento de línea en la teoría de la gravedad GBI acoplada a la electrodinámica de Born- Infeld.

8.3.3 Generación de la solución GBI-BTZ: enfoque mediante fluidos anisótropos

Ahora derivaremos de nuevo el elemento de línea que acabamos de obtener pero usando el enfoque de fluido anisótropo. Con el objetivo de construir el tensor energía-momento fuente de la métrica en 2+1 dimensiones con rotación, en lo que es el primer paso necesario para generar la contrapartida de la métrica BTZ en gravedad GBI, partimos del elemento de línea (8.47) e introducimos el vector comóvil de tipo temporal convenientemente normalizado

$v^\mu = (v^t, 0, \omega v^t)$ (aquí ω denota la velocidad angular), que debe satisfacer

$$v^t = \pm \frac{2}{\sqrt{4J\omega + 4H - \frac{J^2}{x^2} - 4\omega^2 x^2}}. \quad (8.54)$$

De manera similar, el vector radial normalizado de tipo espacial viene dado por $\xi^\mu = (0, \xi^x, 0)$ lo que lleva a $\xi^x = H^{1/2}$. De esta manera, el tensor energía-momento de un fluido anisotrópico en el lado RG dado por la ecuación (8.35), se escribe explícitamente como

$$\tilde{T}_V^\mu(q) = \begin{pmatrix} \tilde{p}_\perp + \frac{(\tilde{\rho} + \tilde{p}_\perp)(4Hx^2 - J\tilde{J})}{\tilde{J}^2 - 4Hx^2} & 0 & \frac{2(\tilde{\rho} + \tilde{p}_\perp)x^2\tilde{J}}{\tilde{J}^2 - 4Hx^2} \\ 0 & \tilde{p}_r & 0 \\ \frac{(\tilde{\rho} + \tilde{p}_\perp)\omega(4Hx^2 - J\tilde{J})}{\tilde{J}^2 - 4Hx^2} & 0 & \tilde{p}_\perp + \frac{2(\tilde{\rho} + \tilde{p}_\perp)\omega x^2\tilde{J}}{\tilde{J}^2 - 4Hx^2} \end{pmatrix} \quad (8.55)$$

donde $\tilde{J} = J - 2\omega x^2$. Introduciendo la expresión anterior en el lado derecho de las ecuaciones de campo (8.10) podemos determinar las diferentes cantidades que caracterizan el fluido. En este sentido, la componente $(t\phi)$ de tales ecuaciones de campo conduce a $\omega = \frac{J}{2x^2}$, lo cual sustituido en las componentes (tt) , (xx) , y $(\phi\phi)$ nos da las funciones que aparecen en el tensor de energía-momento del fluido como:

$$\tilde{\rho} = -\tilde{p}_r = -\frac{J^2 + 2x^3 H'}{4\kappa^2 x^4}; \quad \tilde{p}_\perp = \frac{2x^4 H'' - 3J^2}{4\kappa^2 x^4} \quad (8.56)$$

Haciendo explícita la función $H(x)$ encontramos

$$\tilde{\rho} = -\tilde{p}_r = \frac{l^2 Q^2 - 4x^2}{4\kappa^2 l^2 x^2}; \quad \tilde{p}_\perp = \frac{l^2 Q^2 + 4x^2}{4\kappa^2 l^2 x^2} \quad (8.57)$$

lo que prueba que efectivamente estamos ante un campo de tipo Maxwell más una constante cosmológica como fuentes de materia de nuestra configuración. Lo que corresponde a la solución BTZ descrita en la sección anterior. Tenemos ya todos los ingredientes necesarios para construir el elemento de línea de gravedad GBI acoplada a la electrodinámica tipo Born-Infeld (8.33) usando la solución BTZ con carga (8.47) a modo de solución semilla y recopilando todas la definiciones anteriores podemos escribir la ecuación (8.41) encontrando

$$\begin{aligned} \frac{ds^2}{\tilde{\eta}} &= \left(M + \frac{Q^2}{2} \log\left(\frac{x}{x_0}\right) - \frac{x^2}{l^2} - \frac{\epsilon J^2 Q^2}{8\tilde{\eta} x^4} \right) dt^2 \\ &+ H^{-1} dx^2 \\ &+ x^2 \left(1 - \frac{\epsilon Q^2}{2\tilde{\eta} x^2} \right) d\phi^2 - J \left(1 - \frac{\epsilon Q^2}{2\tilde{\eta} x^2} \right) dt d\phi, \end{aligned} \quad (8.58)$$

donde $\tilde{\eta} = (1 + 2\varepsilon/l^2)$ coincide con nuestra definición de η haciendo la identificación $\Lambda = -1/l^2$. Como se puede ver, la Ec.(8.58) coincide exactamente con nuestro resultado anterior (8.53) y representa el principal resultado de este capítulo. Como hemos demostrado en secciones anteriores, esta solución corresponde a un objeto con simetría axial y cargado eléctricamente con una constante cosmológica en la teoría de la gravedad GBI acoplada a una electrodinámica de tipo Born-Infeld en un espacio-tiempo de $2 + 1$ dimensiones. En la siguiente sección procederemos al análisis de sus características más destacadas. Antes de entrar en ello, consideremos el hecho de que el factor conforme es esencialmente la unidad y no juega ningún papel relevante en la física, pudiendo reabsorberse en una redefinición global de unidades, por lo que de ahora en adelante lo omitiremos en nuestra discusión. Usaremos también la notación $\tilde{\varepsilon} \equiv \varepsilon/\tilde{\eta}$ con el fin de aligerar la notación general. Además, teniendo en cuenta que ε representa una cantidad muy pequeña frente a l^2 (ambas con dimensiones de longitud al cuadrado) supondremos a partir de este punto que $\tilde{\eta} > 0$ en todas partes independientemente del signo de ε .

8.4 Estructura de la solución GBI-BTZ

8.4.1 Función radial y estructuras de agujero de gusano

La primera diferencia notable de la solución GBI (8.58) con respecto a la solución BTZ cargada, convencional (8.47) se encuentra en el comportamiento de la coordenada radial $g_{\phi\phi}$. De hecho, en nuestra solución GBI, esta coordenada radial se escribe como

$$r^2(x) = x^2 - sx_c^2, \quad (8.59)$$

donde hemos definido

$$x_c^2 = \frac{|\tilde{\varepsilon}|Q^2}{2}. \quad (8.60)$$

Notemos que el dominio de definición de la coordenada x depende del signo $s = \pm 1$ de $\tilde{\varepsilon}$, lo cual va a tener un impacto no trivial en la estructura de las soluciones correspondientes $\tilde{\varepsilon} = s|\tilde{\varepsilon}|$ y dividiremos la discusión en los subcasos $s = +1$ y $s = -1$.

En el caso $s = -1$ se encuentra que la función radial $r^2(x)$ en la Eq.(8.59) tiene una circunferencia de radio mínimo $L_{min} = 2\pi x_c$ en $x = 0$. En este punto la función radial $r^2(x)$ rebota y la solución se extiende naturalmente al rango completo $x \in]-\infty, +\infty[$ (hay que tener cierta precaución con la función $\log(x/x_0)$ en la métrica, que debería ser considerada como $\log|x/x_0|$ si se consideran valores negativos de la variable x). Este es el comportamiento típico de una estructura de agujero de gusano, como se muestra en la Fig. 8.1, con $x = 0$

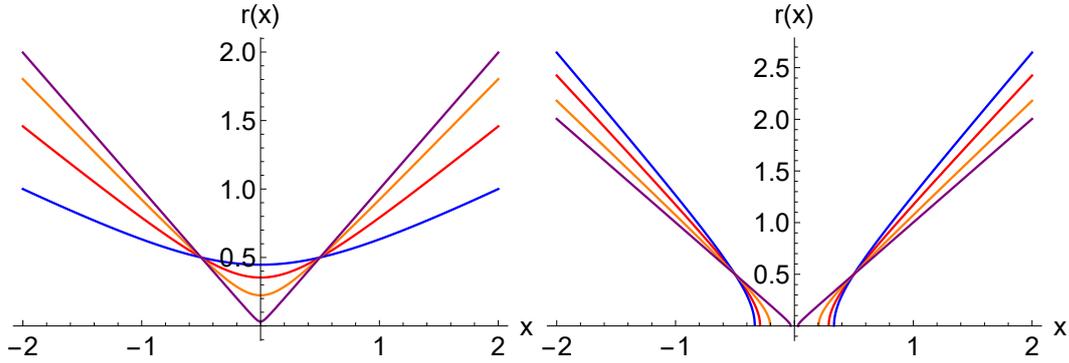


Fig. 8.1 Comportamiento de la función radial $r(x)$ en la Ec. (8.59) para los casos $s = -1$ (izquierda) y $s = +1$ (derecha). En este gráfico hemos tomado $Q = l^2 = 1$ y cuatro valores de $|\varepsilon| = 1/500$ (púrpura), $|\varepsilon| = 1/10$ (naranja), $|\varepsilon| = 1/4$ (rojo), and $|\varepsilon| = 0.4$ (azul).

($r = x_c$) representando su garganta. Y presenta una simetría circular a pesar de la simetría axial del espacio-tiempo, ya que las contribuciones del momento angular sólo aparecen en las componentes g_{tt} y $g_{t\phi}$ del elemento de línea. Cuando $\tilde{\varepsilon} \rightarrow 0$ tenemos que $r^2(x) \approx x^2$ y la garganta del agujero de gusano se cierra, recuperándose la singularidad puntual de la solución BTZ cargada.

En cuanto a la rama $s = +1$, se encuentra que el cero en la función radial tiene lugar en $x = x_c$, de modo que el espacio-tiempo se dividiría en dos regiones $x \in (-\infty, -x_c) \cup x \in (x_c, +\infty)$ causalmente desconectadas la una de la otra. De hecho, la región interna $|x| < x_c$ está prohibida porque implicaría un cambio de signatura en la métrica. También en este punto la componente $g_{t\phi}$ se anula lo que indica que la velocidad angular efectiva desaparece a medida que nos acercamos a ese centro.

8.4.2 Estructura del elemento de línea: ergosferas y horizontes

Estudiemos ahora la estructura de horizontes de esta solución. En primer lugar, observamos que la estructura asintótica de la componente g_{tt} está dada por

$$g_{tt}(x \approx \infty) \sim -\frac{x^2}{l^2} + \left(M + \frac{Q^2}{2} \log(x/x_0) \right) + \mathcal{O}(1/x^2) \quad (8.61)$$

siendo asintóticamente Anti-de Sitter. En cuanto a la existencia de una ergoregión, hay que buscar los ceros de g_{tt} , que vienen dados por las soluciones de la ecuación trascendental

$$\frac{x^2}{l^2} - \frac{Q^2}{2} \left(\log(x/x_0) - \frac{\tilde{\varepsilon} J^2}{4x^4} \right) - M = 0, \quad (8.62)$$

donde, a diferencia de los ergohorizontes del caso original BTZ cargado, ecuación Ec.(8.48), tenemos la contribución de un término cruzado que involucra el momento angular y la carga eléctrica y modulado por el parámetro GBI $\tilde{\epsilon}$. Por lo tanto, en el límite $J = 0$ se obtienen exactamente los mismos ergohorizontes que en el caso RG mientras que para $J \neq 0$ no se pueden encontrar soluciones exactas de esta ecuación. Para $J \neq 0$ el análisis debe dividirse en un caso con $M > 0$ y otro con $M < 0$. Suponiendo que l^2 es la mayor longitud de escala involucrada, si $M > 0$ entonces g_{tt} tiene un cero en el límite de grandes distancias de x cuando $x^2 \approx Ml^2$, mientras que para $M < 0$ no hay tal cero. En el límite opuesto, $x \rightarrow 0$, el signo de $\tilde{\epsilon}$ se vuelve relevante. Si $|\tilde{\epsilon}| > 0$ entonces Ec. (8.62) no tiene ceros cuando $x \rightarrow 0$. Sin embargo, si $\tilde{\epsilon} < 0$ entonces hay una competencia entre los dos términos divergentes multiplicados por Q^2 ya ya ya que $\lim_{x \rightarrow 0} \log(x/x_0) \rightarrow -\infty$ pero $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\tilde{\epsilon}J^2}{4x^4} \rightarrow +\infty$, lo que introduce un mínimo en g_{tt} . Como en este límite el término x^2/l^2 es despreciable y M es una constante, el elemento clave para ver si hay ceros en g_{tt} es la ubicación del mínimo definido por los términos en Q^2 . Este mínimo se encuentra en $x_m^4 = J^2|\tilde{\epsilon}|$, lo que implica que $g_{tt}|_{x_m} \approx M + Q^2 \left(1 + \log \left(\frac{J^2|\tilde{\epsilon}|}{x_0^4} \right) \right) / 8$. Si esta cantidad es negativa, entonces g_{tt} tendrá dos ceros adicionales en el entorno de x_m mientras no tendrá nuevos ceros si es positivo. Concluimos entonces que si $\tilde{\epsilon} < 0$ y $M > 0$, podemos tener hasta tres ergohorizontes [ver Fig. 8.2]. No es difícil ver que si $M < 0$, entonces el cero que se produce para grandes valores de x desaparece y el número máximo de ergoregiones se limita a dos. Si nos centramos ahora en el caso $\tilde{\epsilon} > 0$, entonces $M > 0$ permite un cero para grandes valores de x debido al término con l^2 , y hay otro cero para valores pequeños de x debido al hecho de que el término con Q^2 contribuye con el mismo signo pero opuesto a M . Si $M < 0$, entonces sólo un cero sería posible.

Para encontrar los horizontes de estas configuraciones, calculemos la norma de los vectores perpendiculares a la hipersuperficie $x = \text{constante}$, dados por:

$$\xi_\mu \xi^\mu = g^{xx} = H(x), \quad (8.63)$$

y, por lo tanto, los horizontes de Killing para esta geometría vienen dados por $H(x) = 0$, que es el mismo resultado que en RG. Por lo tanto, la discusión de la estructura de los horizontes es exactamente igual que en RG.

8.4.3 Completitud y regularidad geodésica

Abordemos ahora la cuestión de la regularidad de estas soluciones. Recordamos que en la solución BTZ cargada de RG el escalar de curvatura y el de Kretschmann son en general

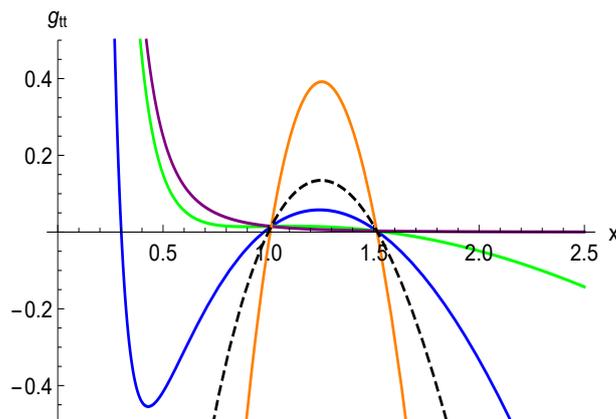


Fig. 8.2 El comportamiento de la componente g_{tt} para los parámetros $\{l = 1, M = 1, Q = 2.5, J = 0.2\}$ en los casos $s = -1$ con $\epsilon = -0.3$ (azul), $\epsilon = -0.47$ (verde), $\epsilon = -0.5$ (púrpura), $\epsilon = +1$ (naranja) y su comparación con el caso RG $\epsilon = 0$ (negro discontinuo). Aunque estos números no son muy razonables, ya que la carga no debería ser tan grande comparada con la masa mientras que la longitud cuadrada l^2 debería ser mayor comparada con M para evitar tener un universo demasiado pequeño, estos números se han elegido para remarcar la existencia de configuraciones adicionales en términos de ergosferas en comparación con las soluciones usuales BTZ en RG.

divergentes en $x = 0$. En particular, para el elemento de línea (8.47) están dados por

$$R_{\text{GR}} = \frac{-6}{l^2} + \frac{Q^2}{2x^2}; K_{\text{GR}} = \frac{12}{l^4} + \frac{3Q^4}{4x^4} - \frac{2Q^2}{l^2x^2}, \quad (8.64)$$

donde vemos que las piezas divergentes se deben a la contribución del campo eléctrico. Cuando la carga está ausente, se encuentra la conocida regularidad de las soluciones BTZ en el vacío. Realicemos ahora el mismo ejercicio para las soluciones GBI-BTZ. Centrándonos en las configuraciones $s = -1$, encontramos que la expansión de las curvaturas escalares en el entorno de la garganta del agujero de gusano $x = 0$, viene dada por:

$$R_{\text{EiBI}} \approx \frac{|\tilde{\epsilon}|^2 J^2 Q^2}{4x^6} + \mathcal{O}(1/x^4) \quad (8.65)$$

$$K_{\text{EiBI}} \approx \frac{11|\tilde{\epsilon}|^2 J^4 Q^4}{16x^{12}} + \mathcal{O}(1/x^{10}), \quad (8.66)$$

que se puede suavizar al orden $\mathcal{O}(1/x^2)$ y $\mathcal{O}(1/x^6)$ cuando $J = 0$, pero no más allá de manera similar a lo que ocurría en la solución BTZ con carga de RG. En el caso $s = +1$ encontramos:

$$R_{\text{EiBI}} \approx \frac{H(x_c)}{2(x-x_c)^2} + \mathcal{O}(1/(x-x_c)) \quad (8.67)$$

$$K_{\text{EiBI}} \approx \frac{H(x_c)^2}{4(x-x_c)^4} + \mathcal{O}(1/(x-x_c)^3), \quad (8.68)$$

donde x_c se definió en (8.60). Vemos así que independientemente del signo de ε , estas soluciones siempre tienen divergencias representada por polos de, al menos, el mismo orden que en RG. Para Discutir con rigor la regularidad (o no) de las configuraciones anteriores, necesitamos recurrir al análisis de completitud geodésica [325]. Esto es así porque, siendo geodésicas temporales y nulas, que están asociadas al movimiento en caída libre de los observadores físicos y a la transmisión de información, respectivamente, el requisito de su completitud es básico para la predictibilidad de la teoría correspondiente. Este análisis puede llevarse a cabo atendiendo a la existencia de dos cantidades conservadas $E = -g_{\mu\nu}\xi^\mu u^\nu$ y $L = g_{\mu\nu}\Phi^\mu u^\nu$, donde $\xi^\mu = (1, 0, 0)$ representa el vector de Killing temporal ∂_t y $\Phi^\mu = (0, 0, 1)$ es el vector de Killing angular ∂_ϕ , y teniendo en cuenta, asimismo que el hecho de que $c = -g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$ is $c = 0, 1$ para geodésicas nulas y temporales con vector tangente u^μ . Con estas tres constantes de movimiento se pueden derivar tres ecuaciones que determinan la evolución del vector tangente u^μ [92]. De las cargas conservadas, encontramos

$$\frac{dt}{Ed\lambda} = \frac{1}{H(x)} \left(1 - \frac{bJ}{2x^2} \right), \quad (8.69)$$

$$\frac{d\phi}{Ed\lambda} = \frac{1}{H(x)} \left(\frac{J}{4x^2} + b \frac{\left(H(x) - \frac{J^2}{4x^2} \left[1 - s \frac{x_c^2}{x^2} \right] \right)}{x^2 - sx_c^2} \right), \quad (8.70)$$

y combinando los anteriores resultados con $0 = g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$ tenemos

$$\left(\frac{dx}{Ed\lambda} \right)^2 = 1 - \frac{bJ}{x^2} - \frac{b^2 \left(H(x) - \frac{J^2}{4x^2} \left[1 - s \frac{x_c^2}{x^2} \right] \right)}{x^2 - sx_c^2}. \quad (8.71)$$

En las fórmulas anteriores hemos definido el parámetro de impacto $b \equiv L/E$. No proporecionaremos un análisis detallado de las curvas que se derivan de estas ecuaciones, en su lugar nos centraremos en sus propiedades cerca de $x = 0$ cuando $\tilde{\varepsilon} < 0$ (caso de agujero de gusano) y cerca de x_c cuando $\tilde{\varepsilon} > 0$, donde se sitúan las regiones potencialmente más peligrosas.

Considerando primero el caso $\tilde{\epsilon} \equiv -2l_\epsilon^2 < 0$, en el límite $x \rightarrow 0$ las ecuaciones relevantes con $J \neq 0$ se reducen a

$$\frac{d\phi}{Ed\lambda} \approx -\frac{b}{x^2}, \quad (8.72)$$

$$\left(\frac{dx}{Ed\lambda}\right)^2 \approx \frac{b^2 J^2}{4x^4}, \quad (8.73)$$

mientras que para el caso sin rotación $J = 0$ tenemos

$$\frac{d\phi}{Ed\lambda} \approx \frac{b}{l_\epsilon^2 Q^2}, \quad (8.74)$$

$$\left(\frac{dx}{Ed\lambda}\right)^2 \approx 1 - b^2 \frac{\left(M + \frac{Q^2}{2} \log\left(\frac{x}{x_0}\right)\right)}{l_\epsilon^2 Q^2}. \quad (8.75)$$

Es fácil ver que para $J \neq 0$ se puede alcanzar $x = 0$ en una cantidad finita de tiempo propio. Nótese también que aunque la velocidad angular $d\phi/d\lambda$ y la velocidad radial $dx/d\lambda$ divergen en ese punto, la relación $d\phi/dx = -2/J$ está bien definida siempre que $J \neq 0$. Por otro lado, cuando $J = 0$, el signo de M se vuelve relevante. Si $M > 0$, entonces algunas trayectorias de luz podrían rebotar en algún valor $x > 0$ (dependiendo en los parámetros del modelo), mientras que si $M < 0$ entonces en el límite $x \rightarrow 0$ el lado derecho de (8.75) siempre será definido positivo y dominado por

$$\left(\frac{dx}{Ed\lambda}\right)^2 \approx -\frac{b^2}{2l_\epsilon^2} \log\left(\frac{x}{x_0}\right), \quad (8.76)$$

lo que también implica que $x \rightarrow 0$ se alcanza en un tiempo propio finito (esto se puede verificar explícitamente vía integración numérica). Junto a la existencia de divergencias en los escalares de curvatura y en el elemento de línea cuando $x \rightarrow 0$, el hecho de alcanzar $x \rightarrow 0$ en un tiempo afín finito sugiere fuertemente que el espacio-tiempo es singular en ese punto independientemente del valor de J .

Consideremos ahora el caso $\tilde{\epsilon} > 0$. En el límite $x \rightarrow x_c$, las ecuaciones relevantes se reducen a

$$\frac{d\phi}{Ed\lambda} \approx \frac{b}{2x_c(x - x_c)}, \quad (8.77)$$

$$\left(\frac{dx}{Ed\lambda}\right)^2 \approx \frac{b^2 H(x_c)}{2x_c(x - x_c)}, \quad (8.78)$$

Tengamos en cuenta que, a diferencia del caso $\tilde{\epsilon} < 0$, el momento angular no juega ningún papel crucial más allá de su influencia en el signo del lado derecho de (8.78). Centrándonos en aquellas geodésicas que pueden llegar al centro, a saber, aquellas para las que $H(x_c) > 0$ los límites anteriores muestran que $x \rightarrow x_c$ siempre se alcanza en un tiempo afín finito, con $\phi_c \approx \phi_0 + \sqrt{2(x - x_c)/x_c H(x_c)}$ aproximándose a un valor finito y constante dado por ϕ_0 . Por las mismas razones que para $\tilde{\epsilon} < 0$, este caso es tan singular como en RG.

8.5 Conclusión

El objetivo principal de este capítulo ha sido la construcción de una solución exacta para una configuración de tipo BTZ con un término de constante cosmológica en el contexto de la gravedad de Born-Infeld. Para ello se ha utilizado nuevamente el método que permite generar soluciones en teorías del tipo RBG partiendo de soluciones ya conocidas en RG. Hemos mostrado explícitamente que la aplicación de este método a la RG acoplada al electromagnetismo de Maxwell en 2+1 dimensiones mapea dicho espacio de soluciones a las de la gravedad GBI acoplada a una electrodinámica de tipo Born-Infeld. Asimismo hemos podido obtener el elemento de línea de la teoría modificada siguiendo dos planteamientos distintos, el primero de ellos se centra exclusivamente en los campos electromagnéticos y el segundo modeliza el efecto de estos mediante la introducción de fluidos anisótropos equivalentes. Los resultados obtenidos coinciden y proporcionan una prueba no trivial de la consistencia de las relaciones introducidas por el “mapping” así como de su implementación. La discusión de las propiedades de las soluciones así obtenidas ha sido posteriormente dividida en dos casos, en función del signo s del parámetro característico de la gravedad GBI. Encontramos que en el caso $s = -1$ la función radial tiene un mínimo en $x = 0$ ($r = x_c > 0$), representando el comportamiento típico de una estructura de agujero de gusano. Dicha estructura puede estar recubierta por dos horizontes, o aparecer desnuda, a semejanza de lo que ocurría en la solución BTZ original de la RG, mientras que un ergohorizonte puede hacer acto de presencia, dependiendo asimismo de los valores numéricos de los parámetros que caracterizan el modelo. A pesar de la presencia del agujero de gusano, que en algunos casos puede remediar ciertas patologías, encontramos todavía divergencias de curvatura en la garganta del agujero de gusano, junto con una estructura de polos tan intensa o más que en su contrapartida en RG. Esto, junto con el hecho de que nada evita que las geodésicas nulas alcancen esta región en un tiempo propio finito sugiere que el espacio-tiempo resultante sigue siendo tan singular como lo era en el caso de la solución BTZ cargada en el contexto de la RG. Algo similar ocurre en el caso $s = +1$, a pesar de que ahora los invariantes de curvatura divergen en valores finitos de la coordenada radial $x = x_c$ donde la función radial

se anula, lo que representa el centro de la solución. Los resultados presentados en este capítulo suponen una nueva prueba de la utilidad del mecanismo que denominamos como “mapping” para obtener soluciones analíticas de interés observacional y/o teórico en teorías de gravedad modificada. Confiamos en poder ofrecer más información sobre la utilidad del método en escenarios más atractivos físicamente en 2+1 y dimensiones mayores como podría ser, por ejemplo, el acoplamiento directo la gravedad GBI u otras teorías de la gravedad a la electrodinámica de Maxwell. Dichas soluciones deben estar en correspondencia con soluciones de las ecuaciones de Einstein acopladas a teorías de electrodinámica no lineal. En este campo hay todavía muchas cuestiones a desarrollar en futuros trabajos, aunque en el próximo capítulo aportaremos algunos resultados prometedores y de gran generalidad.

Parte III

Más allá.

Capítulo 9

Términos de superficie y acciones “on shell”

9.1 Gravedad GBI y términos de superficie

Iniciamos la exploración de otros temas más allá de la rotación analizando los términos de superficie que aparecen al considerar variaciones en la acción. En el marco de una teoría RBG en el formalismo métrico-afín este problema ha sido analizado recientemente para teorías de tipo $f(R)$ [318], y en esta sección vamos a realizar un análisis similar para GBI. Consideremos entonces como punto de partida nuestra acción total dada por:

$$S_T = S_{BI} + S_M = \frac{1}{k^2 \varepsilon} \int d^d r \left[\sqrt{-|g_{\mu\nu} + \varepsilon R_{\mu\nu}(\Gamma)|} - \lambda \sqrt{-g} \right] + S_M(g_{\mu\nu}, \Psi). \quad (9.1)$$

Definiendo $q_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \varepsilon R_{\mu\nu}(\Gamma)$, denotando su inversa formalmente como $q^{\mu\nu}$ y tomando variaciones en la acción podemos escribir:

$$\delta S_T = \delta S_{BI} + \delta S_M = \frac{1}{2k^2 \varepsilon} \int d^d r \left[(\sqrt{-q} q^{\mu\nu} - \lambda \sqrt{-g} g^{\mu\nu}) \delta g_{\mu\nu} + \varepsilon \sqrt{-q} q^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right] + \delta S_M \quad (9.2)$$

el tensor energía-momento determinado por (5.10) y (5.11) nos proporciona las ecuaciones de campo ya conocidas para el tensor métrico:

$$\sqrt{-q} q^{\mu\nu} = \sqrt{-g} (\lambda g^{\mu\nu} - k^2 \varepsilon T^{\mu\nu}) \quad (9.3)$$

Tomando variaciones de la acción respecto de la conexión vamos a obtener dos contribu-

ciones:

1. Ecuaciones de campo para la conexión.
2. Términos de superficie asociados.

Para obtener y discutir las ecuaciones de movimiento para la conexión, continuaremos con el principio variacional que hemos iniciado, que también producirá los correspondientes términos de superficie, pero para el análisis de estos últimos, tomaremos un camino alternativo que nos facilitará el análisis. Suponiendo torsión nula (para aligerar la presentación, pues el resultado final será el mismo que con torsión) y usando $\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda$ (ver anexo, A) la parte de la variación sobre la conexión nos queda:

$$\begin{aligned} \delta S_\Gamma(\Gamma) &= \frac{1}{2k^2 \varepsilon} \int d^d x \sqrt{-q} q^{\mu\nu} \varepsilon \delta R_{\mu\nu} = \\ &= \frac{1}{2k^2} \int d^d x \sqrt{-q} q^{\mu\nu} (\nabla_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda) \end{aligned} \quad (9.4)$$

integrando por partes tenemos:

$$\begin{aligned} \delta S_\Gamma(\Gamma) &= \frac{1}{2k^2} \int d^d x \left\{ \nabla_\lambda [\sqrt{-q} q^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \sqrt{-q} q^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\rho\mu}^\rho] - \right. \\ &\quad \left. - \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda (\nabla_\lambda [\sqrt{-q} q^{\mu\nu}] - \delta_\lambda^\nu \nabla_\rho [\sqrt{-q} q^{\mu\rho}]) \right\}. \end{aligned} \quad (9.5)$$

El primero de los términos presentes en esta expresión es un término de superficie:

$$\delta S_\Gamma(\Gamma)_{(I)} = \frac{1}{2k^2} \int d^d x \nabla_\lambda [\sqrt{-q} q^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \sqrt{-q} q^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\rho\mu}^\rho], \quad (9.6)$$

mientras que el segundo nos proporciona las ecuaciones de movimiento:

$$\delta S_\Gamma(\Gamma)_{(II)} = -\frac{1}{2k^2} \int d^d x \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda (\nabla_\lambda [\sqrt{-q} q^{\mu\nu}] - \delta_\lambda^\nu \nabla_\rho [\sqrt{-q} q^{\mu\rho}]) \quad (9.7)$$

si la materia no está acoplada a la conexión tenemos $\frac{\delta S_M}{\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda} = 0$ lo que implica que $\nabla_\lambda [\sqrt{-q} q^{\mu\nu}] = 0$ y, como ya sabemos, la solución para la conexión física es la conexión de Levi-Civita para el tensor $q_{\mu\nu}$.

Analicemos ahora el término de superficie dado por (9.6). Consideremos para ello la evaluación de la cantidad $\nabla_\sigma (\sqrt{-q} V^\sigma)$ siendo V^σ un vector arbitrario de la variedad. Teniendo en cuenta que el tensor totalmente antisimétrico se escribe en dimensión d como $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta\dots} = \sqrt{-g} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta\dots}$ y tomando la derivada covariante del lado izquierdo tenemos el resultado:

$$\nabla_\mu \sqrt{-q} = \partial_\mu \sqrt{-q} - \sqrt{-q} \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma \quad (9.8)$$

(en dimensiones pequeñas, por ejemplo $d = 4$ el ejercicio es directo si se deriva covariantemente $\nabla_\mu \varepsilon_{0123} = \nabla_\mu \sqrt{-q}$ y se utilizan las propiedades del objeto $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ para reordenar los sumandos resultantes). A partir de este resultado es inmediato obtener que en ausencia de torsión se tiene $\nabla_\sigma(\sqrt{-q}V^\sigma) = \partial_\sigma(\sqrt{-q}V^\sigma)$. Definiendo ahora $V^\sigma = \sqrt{-q}(q^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\sigma - q^{\mu\sigma} \delta\Gamma_{\lambda\mu}^\lambda)$ y usando el teorema de Gauss en la forma, (3.33):

$$\int_V d^d x \nabla_\alpha J^\alpha = \int_S d^n x n_\alpha J^\alpha \quad (9.9)$$

donde la integral del lado derecho se evalúa en la superficie de dimensión $n = d - 1$ y n_α es el vector perpendicular a la superficie que encierra el volumen V , podemos escribir la integral Σ como:

$$\Sigma = \delta S_\Gamma(\Gamma)_{(I)} = \frac{1}{2k^2} \int_S d^{d-1} x \sqrt{-\gamma_q} \varepsilon n_\alpha v^\alpha \quad (9.10)$$

con $v^\alpha = q^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha - q^{\mu\alpha} \delta\Gamma_{\lambda\mu}^\lambda$ y γ_q el determinante de la métrica inducida por $q_{\mu\nu}$ en la superficie frontera S , n^α el mencionado vector normal a la superficie, y $\varepsilon = \pm 1$, dependiendo si la superficie es temporal o espacial [Blau]. En los cálculos relacionados con la correspondencia AdS/CFT [268], la superficie frontera va a estar orientada según la condición $r = \text{constante}$, luego $n^r \equiv \hat{u}_r$ es un vector de tipo espacial y todos los vectores contenidos en la superficie serán de tipo temporal. La superficie que nos interesa es del tipo temporal, y en este caso el parámetro ε va a tener el valor $+1$.

Llegados a este punto, y a la vista de que las ecuaciones de movimiento implican que la conexión está totalmente determinada por el campo $q_{\mu\nu}$, es tentador pensar que las variaciones de la conexión van a estar generadas por las variaciones de $q_{\mu\nu}$. Sin embargo, hay que tener en cuenta que, según el principio variacional, las ecuaciones de movimiento surgen como un extremo del funcional de la acción pero que las variaciones posibles de los campos no están restringidas a las configuraciones que coinciden con dicho extremo. De hecho, la conexión posee una parte tensorial de rango 3 cuyas variaciones no pueden estar contenidas en su totalidad dentro de las variaciones del tensor de rango dos $q_{\mu\nu}$. Es por ello que no podemos usar las ecuaciones de movimiento para artificialmente restringir el espectro de variaciones de la conexión. Para atacar esta cuestión con toda generalidad, vamos a reconsiderar los términos de superficie desde una perspectiva alternativa.

El término asociado a la variación del tensor de Ricci en (9.2) tiene la misma estructura que el que encontramos en la formulación à la Palatini de la RG, por lo que conviene analizarlo con calma para entender cuál es su contribución a los términos de superficie de la

acción. Para ello, procederemos siguiendo la sugerencia propuesta en [45], aunque usaremos una maquinaria matemática menos sofisticada (pero igualmente robusta). La clave está en descomponer la conexión en una parte asociada a una métrica más un tensor de rango tres, es decir, consideraremos que $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = L_{\beta\gamma}^{\alpha} + A_{\beta\gamma}^{\alpha}$, donde $L_{\beta\gamma}^{\alpha}$ representa la conexión de Levi-Civita construida con la métrica $q_{\mu\nu}$. Hay que notar que elegimos $q_{\mu\nu}$ en lugar de $g_{\mu\nu}$ para que la comparación con el caso de GR estándar sea más evidente. Además, sabemos que las ecuaciones de movimiento elegirán esa métrica como la asociada a la conexión independiente, por lo que, en cierta manera, se puede decir que el grueso de las variaciones de la conexión vendrá capturado por las variaciones de esa métrica, aunque puede haber variaciones adicionales debido a las contribuciones del tensor de rango tres que parametriza la diferencia entre $L_{\beta\gamma}^{\alpha}$ y $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$. De esta manera, vamos a descomponer el tensor de Ricci como

$$R_{\mu\nu}(\Gamma) = R_{\mu\nu}(L) + \nabla_{\alpha}^L A_{\nu\mu}^{\alpha} - \nabla_{\nu}^L A_{\alpha\mu}^{\alpha} + A_{\kappa\lambda}^{\kappa} A_{\nu\mu}^{\lambda} - A_{\nu\lambda}^{\kappa} A_{\kappa\mu}^{\lambda}, \quad (9.11)$$

donde las derivadas covariantes son las asociadas a la métrica $q_{\mu\nu}$. Esta estructura pone de manifiesto que los términos de superficie asociados a $\sqrt{-q}q^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}$ en la variación de la acción pueden descomponerse en una contribución asociada a la parte de Levi-Civita, que es bien conocida en la literatura (véase, por ejemplo, el capítulo 4 del libro de Poisson) más la contribución debida a los grados de libertad tensoriales asociados a la conexión, que en este caso vienen codificados en el tensor $A_{\nu\mu}^{\alpha}$. Dado que sólo estamos interesados en los términos de superficie asociados a la conexión independiente, un cálculo sencillo siguiendo los pasos mostrados en las derivaciones de más arriba nos muestra que esos términos son de la forma

$$I_{\Gamma} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-q} \nabla_{\alpha}^L \left[q^{\mu\nu} \delta A_{\mu\nu}^{\alpha} - q^{\alpha\beta} \delta A_{\lambda\beta}^{\lambda} \right] = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^3x \sqrt{|\gamma|} \left[n_{\alpha} q^{\mu\nu} \delta A_{\mu\nu}^{\alpha} - n^{\alpha} \delta A_{\lambda\alpha}^{\lambda} \right] \quad (9.12)$$

donde hemos introducido el vector n_{α} normal a la hipersuperficie (con norma $\varepsilon = n_{\alpha}n^{\alpha} = \pm 1$) que delimita el 4-volumen de integración y $|\gamma|$ denota el determinante de la métrica inducida en dicha hipersuperficie, $q^{\alpha\beta} = (\gamma_q^{\alpha\beta} + \varepsilon n^{\alpha}n^{\beta})$.

Una vez obtenido este resultado, es hora de considerar cómo sería el término de superficie correspondiente a la versión métrico-afín de la RG. Para ello, siguiendo a [45], proponemos que la curvatura extrínseca se construya como

$$K_{\alpha\beta}(\Gamma) = \frac{1}{2} \gamma_{\alpha}^{\mu} \gamma_{\beta}^{\nu} \left[\nabla_{\mu} n_{\nu} + q_{\mu\lambda} \nabla_{\nu} n^{\lambda} \right], \quad (9.13)$$

de tal manera que puede ser descompuesta como

$$K_{\alpha\beta}(\Gamma) = K_{\alpha\beta}(L) - \frac{1}{2} \gamma_{\alpha}^{\mu} \gamma_{\beta}^{\nu} \left[A_{\mu\nu}^{\lambda} n_{\lambda} - q_{\mu\rho} A_{\nu\lambda}^{\rho} n^{\lambda} \right], \quad (9.14)$$

lo que nos lleva a que

$$K(\Gamma) = q^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}(\Gamma) = K(L) - \frac{1}{2} \gamma^{\mu\nu} \left[A_{\mu\nu}^\lambda n_\lambda - q_{\mu\rho} A_{\nu\lambda}^\rho n^\lambda \right]. \quad (9.15)$$

Según esto, el término de Gibbons-Hawking-York à la Palatini, se puede escribir como

$$S_{GHY} = \frac{1}{\kappa^2} \int d^3x \sqrt{|\gamma|} \left[K(L) - \frac{1}{2} \gamma^{\mu\nu} \left[A_{\mu\nu}^\lambda n_\lambda - q_{\mu\rho} A_{\nu\lambda}^\rho n^\lambda \right] \right]. \quad (9.16)$$

Variando respecto de $A_{\nu\lambda}^\rho$, llegamos a

$$\delta_A S_{GHY} = -\frac{1}{2\kappa^2} \int d^3x \sqrt{|\gamma|} \left[\gamma^{\mu\nu} \delta A_{\mu\nu}^\lambda n_\lambda - \gamma^{\mu\nu} q_{\mu\rho} n^\lambda \delta A_{\nu\lambda}^\rho \right]. \quad (9.17)$$

Usando en esta expresión la relación $\gamma^{\mu\nu} q_{\mu\rho} = \delta_\rho^\nu - \varepsilon n^\nu n_\rho$ y reescribiendo $\gamma^{\mu\nu} = q^{\mu\nu} - \varepsilon n^\mu n^\nu$, el resultado final se puede escribir como

$$\delta_A S_{GHY} = -\frac{1}{2\kappa^2} \int d^3x \sqrt{|\gamma|} \left[n_\alpha q^{\mu\nu} \delta A_{\mu\nu}^\alpha - n^\alpha \delta A_{\lambda\alpha}^\lambda \right], \quad (9.18)$$

que es exactamente de la misma forma que (9.12) pero con el signo contrario. Por tanto, si a la acción original se le añade este término de superficie, las contribuciones debidas a la conexión independiente procedente de ambas partes se cancelarán idénticamente. Esto demuestra que los grados de libertad asociados a la conexión no generan nuevas contribuciones que exijan nuevos términos de superficie más allá del usual de Gibbons-Hawking-York adaptado al caso de Palatini (véase la fórmula (9.13)). La demostración que hemos presentado aquí es aplicable a todas aquellas teorías métrico-afines que admitan una representación de tipo Einstein frame, como es el caso de las RBGs, entre muchas otras.

Como comentario final, hay que notar que la adición del término de Gibbons-Hawking-York à la Palatini garantiza que las variaciones asociadas a la conexión independiente en la frontera de la variedad son idénticamente nulas siempre, sin necesidad de exigir que deban anularse en dicha frontera. De hecho, es evidente que en la frontera la variación (9.12) se anula porque, por construcción, la frontera se define como el lugar donde las variaciones de los campos son cero. Esto quiere decir que sin modificar el término de Gibbons-Hawking-York, habríamos llegado a un principio variacional bien definido. Sin embargo, la corrección añadida mejora el resultado final al hacer la variación en la superficie idénticamente nula en todas partes, no solo en esa frontera. Otro aspecto destacable de esta definición de curvatura

extrínseca en (9.14) es que se trata de una cantidad invariante proyectiva, por lo que en teorías en las que la torsión es un grado de libertad proyectivo, la torsión no aparece en $K_{\alpha\beta}$.

Vamos a utilizar estos resultados para calcular las respectivas funciones termodinámicas y las acciones on-shell que nos dan la función de partición en el contexto de la correspondencia AdS/CFT para nuestras soluciones de tipo BTZ.

9.2 Acción on-shell y función de partición

En esta sección vamos a llevar a cabo una primera toma de contacto con la formulación Euclidea de la acción y sus aplicaciones en el contexto de holografía. Para ello, vamos a considerar el ejemplo más sencillo en 2+1 dimensiones, que consiste en la dinámica gravitatoria en presencia de energía de vacío, es decir, una constante cosmológica. Para no excedernos en trivialidades, consideraremos la teoría de gravedad de Born-Infeld. Aprovecharemos también este ejemplo para recordar algunos resultados asociados al mapping entre teorías. En particular, vamos a considerar la relación que liga la RG+ Λ en 2+1 con la teoría EiBI+otra Λ_{eff} , tal y como se describe en [168].

Al usar el mapping para ir de RG+ Λ a EiBI, encontramos que el Lagrangiano de materia (asociado a la constante cosmológica) en el frame RBG es de la forma

$$S_M = \frac{1}{\epsilon k^2} \int d^3r \sqrt{-g} \left[\lambda - \frac{1}{\sqrt{1-2\epsilon\Lambda}} \right]. \quad (9.19)$$

Es interesante ver que con esta acción de materia, la teoría completa de materia y gravedad se puede escribir como

$$S_{2+1} = \frac{1}{\epsilon \kappa^2} \int d^3x \left[\sqrt{-|g_{\mu\nu} + \epsilon R_{\mu\nu}|} - \tilde{\lambda} \sqrt{-g} \right], \quad (9.20)$$

donde hemos usado la notación $\tilde{\lambda} \equiv 1/\sqrt{1-2\epsilon\Lambda}$. El tensor energía momento asociado a la acción de materia (9.19) es

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{1}{k^2 \epsilon} (\lambda - \sqrt{1+2\epsilon\Lambda}) g^{\mu\nu}, \quad (9.21)$$

y la relación entre métricas viene dada por

$$g_{\mu\nu} = (1-2\epsilon\Lambda) q_{\mu\nu}. \quad (9.22)$$

Como ejemplo particular, podemos pensar en las soluciones de tipo BTZ de la RG en 2+1 dimensiones, en las que el elemento de línea puede escribirse como [168]

$$q_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -H^2(x)dt^2 + \frac{1}{H^2(x)}dx^2 + x^2d\varphi^2 \quad (9.23)$$

siendo $H(x) = -M + \frac{x^2}{L^2} = -M - x^2\Lambda$ y $\Lambda = 1/L^2$. En el Einstein frame, este elemento de línea es solución de la acción

$$S_{EF} = \frac{1}{2k^2} \int d^3x \sqrt{-q} (\tilde{R}(\Gamma, q) - 2\Lambda) = S_{EH} + \tilde{S}_M, \quad (9.24)$$

donde $\tilde{\mathcal{L}}_M = -\frac{\Lambda}{k^2}$.

Vamos ahora a realizar algunas comprobaciones sencillas de la equivalencia práctica entre ambos “frames”. A partir de la métrica $q_{\mu\nu}$ el cálculo del objeto $R(q) = q^{\mu\rho}R_{\rho\mu}(q)$ es inmediato al saber que $R_{\rho\mu}(q) = 2\Lambda q_{\rho\mu}$ y obtenemos $R(q) = 6\Lambda$. Por otra parte, podemos calcular directamente \mathcal{L}_G escribiendo la acción en la forma:

$$\begin{aligned} S_{BI} &= \frac{1}{\epsilon k^2} \int d^3r \left[\sqrt{-\text{Det}[g_{\mu\nu} + \epsilon R_{\mu\nu}(q, \Gamma)]} - \lambda \sqrt{-g} \right] = \\ &= \frac{1}{\epsilon k^2} \int d^3r \sqrt{-g} \left[\sqrt{\frac{-q}{-g}} - \lambda \right] = \int d^3r \sqrt{-g} \mathcal{L}_G, \end{aligned} \quad (9.25)$$

que nos permite reexpresar $\mathcal{L}_G = \frac{1}{\epsilon k^2} \left[\sqrt{\frac{-q}{-g}} - \lambda \right]$ como

$$\mathcal{L}_G = \frac{1}{\epsilon k^2} \left[(1 - 2\epsilon\Lambda)^{\frac{-3}{2}} - \lambda \right] \quad (9.26)$$

Usando estos resultados para $q^{\mu\rho}R_{\rho\nu}(q)$, $T^\mu{}_\nu$ y \mathcal{L}_G en (5.38), encontramos una identidad, lo que confirma la consistencia de todas las fórmulas derivadas hasta el momento.

Con todos estos ingredientes bien determinados vamos a calcular la acción completa on-shell en el RF así como las funciones termodinámicas asociadas. Nuestra discusión del apartado anterior nos permite considerar una acción total estructurada alrededor de una acción en el “bulk”, un término de superficie de tipo Gibbons-Hawking y un contratérmino, tal y como indicamos en el capítulo 4:

$$S_T = S_{Bulk} + S_{GHY} + S_{CT} \quad (9.27)$$

¿Qué elemento de línea vamos a utilizar? A partir de (9.22):

$$ds_3^2 = (1 - 2\varepsilon\Lambda) \left[\left(M - \frac{x^2}{L^2}\right) dt^2 + \frac{1}{-M + \frac{x^2}{L^2}} dx^2 + x^2 d\varphi^2 \right]. \quad (9.28)$$

Cambiamos ahora a la métrica euclídea mediante la sustitución $t_E = it$:

$$ds_{3E}^2 = (1 - 2\varepsilon\Lambda) \left[\left(-M + \frac{x^2}{L^2}\right) dt_E^2 + \frac{1}{-M + \frac{x^2}{L^2}} dx^2 + x^2 d\varphi^2 \right]. \quad (9.29)$$

Definiendo $h(x)$ como

$$\left(-M + \frac{x^2}{L^2}\right) = \frac{x^2}{L^2} \left(1 - \frac{ML^2}{x^2}\right) \equiv \frac{x^2}{L^2} h(x), \quad (9.30)$$

el elemento de línea pasa a ser

$$ds_{3E}^2 = (1 - 2\varepsilon\Lambda) \left[\frac{x^2}{L^2} h(x) dt_E^2 + \frac{L^2}{h(x)x^2} dx^2 + x^2 d\varphi^2 \right]. \quad (9.31)$$

Definimos asimismo la variable radial $u = \frac{x_0}{x}$ con $\left(\frac{dx}{x}\right)^2 = \left(\frac{du}{u}\right)^2$. En la nueva coordenada radial el elemento de línea toma la forma

$$ds_{3E}^2 = (1 - 2\varepsilon\Lambda) \left\{ \frac{1}{u^2} \frac{x_0^2}{L^2} (h(u) dt_E^2 + L^2 d\varphi^2) + \frac{L^2}{h(u)u^2} du^2 \right\} \quad (9.32)$$

en el formalismo de Lorentz teníamos que el término S_{Bulk} (en el RF) se puede escribir como

$$S_{Bulk} = S_{BI} + S_M = \int d^3r \sqrt{-g} \mathcal{L}_G + \frac{1}{k^2 \varepsilon} \int d^3r \sqrt{-g} \left(\lambda - \sqrt{(1 + 2\varepsilon\Lambda)} \right) \quad (9.33)$$

con \mathcal{L}_G dado por (9.26) es decir:

$$S_{Bulk} = \frac{2\Lambda}{k^2} (1 - 2\varepsilon\Lambda)^{-\frac{3}{2}} \int d^3r \sqrt{-g} \quad (9.34)$$

Si ahora pasamos a la signatura euclidiana los cambios se traducen en $d^3x = d\varphi dx dt \rightarrow i d\varphi dx dt_E \sqrt{-g} \rightarrow i (1 - 2\varepsilon\Lambda)^{\frac{3}{2}} \sqrt{g_E} = i (1 - 2\varepsilon\Lambda)^{\frac{3}{2}} \frac{x_0^2}{u^3}$ lo que implica:

$$S_{Bulk} = \frac{2}{L^2 k^2} \int du dt_E d\varphi \frac{x_0^2}{u^3} \quad (9.35)$$

Veamos ahora los límites de integración: en la variable radial original tenemos que integrar desde x_0 (posición del horizonte) hasta $x = \infty$. Con el cambio de variable la integración va desde $u = 1$ hasta $u = 0$, luego la acción “on shell” en el “bulk” nos da la contribución:

$$S_{Bulk} = \frac{2}{L^2 k^2} \int_0^\beta dt_E \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 du \frac{x_0^2}{u^3} = \frac{2\pi x_0^2 \beta}{L^2 k^2} \left(\frac{1}{u^2} - 1 \right) \Big|_{u \rightarrow 0} \quad (9.36)$$

siendo $\beta = \frac{1}{T_h}$ el inverso de la temperatura Hawking. Consideremos ahora la contribución del término de superficie: en el apartado anterior hemos demostrado que para la gravedad de Born-Infeld el término de superficie que debemos de añadir para tener variación neta nula en la frontera es justamente el término de Gibbons-Hawking-York. Nuestra hipersuperficie viene caracterizada por $r = \text{constante}$, con lo que el vector normal apunta en la dirección radial $n^r = \hat{u}_r$. Asimismo, como ya hemos comentado, se trata de un vector de tipo espacial y por tanto todos los vectores contenidos en la superficie serán de tipo temporal, luego la superficie es asimismo temporal y el parámetro ε asociado a la acción de Gibbons-Hawking toma el valor $+1$. Entonces en el formalismo lorentziano tendremos:

$$S_{GHY} = \frac{1}{k^2} \int_S d\varphi dt \sqrt{-\gamma_q} K \quad (9.37)$$

Al pasar a la signatura euclídea tenemos un cambio de signo asociado:

$$S_{GHY(\text{Euclideo})} = -\frac{1}{k^2} \int_S d\varphi dt_E \sqrt{\gamma_q} K \quad (9.38)$$

siendo $K = \gamma_q^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}$ la curvatura escalar extrínseca, con $\gamma_{\alpha\beta}$ la métrica inducida por $q_{\mu\nu}$ en la superficie y γ_q el correspondiente determinante. Para una métrica diagonal, la curvatura extrínseca $K_{\alpha\beta}$ puede calcularse de acuerdo a la relación [268] $K_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} n^u \partial_u \gamma_{\alpha\beta}^q$. Con n^u el vector radial unitario dirigido en el sentido de crecimiento (decrecimiento) de la variable $r(u)$. A partir de esta expresión, y utilizando de nuevo la relación entre la derivada del determinante de una matriz y su traza, (ver fórmula A.2 del anexo) tendremos:

$$K = \frac{n^u}{2} \gamma_q^{\alpha\beta} \partial_u \gamma_{\alpha\beta}^q = n^u \frac{1}{\sqrt{\gamma_q}} \partial_u \sqrt{\gamma_q}. \quad (9.39)$$

Si usamos la descomposición ADM de la métrica $q_{\mu\nu}$ tendremos:

$$ds^2 = q_{uu} du^2 + \gamma_{\alpha\beta}^q dx^\alpha dx^\beta = \frac{1}{u^2} \frac{x_0^2}{L^2} \left(h(u) dt_E^2 + L^2 d\varphi^2 \right) + \frac{L^2}{u^2 h(u)} du^2 \quad (9.40)$$

siendo $x_0 = \sqrt{ML}$ la posición del horizonte y $u = \frac{x_0}{x}$. Recordemos asimismo que $h(u)$ viene dado por la relación $h(u) = 1 - u^2$ y que n^u es un vector unitario ($1 = q_{uu} n^u n^u$) y que apunta en la dirección en que la variable u decrece, por lo que lo escribiremos como $n^u = -\frac{u}{L} \sqrt{h(u)}$.

Con todo ello tendremos:

$$\sqrt{\gamma_q} K = n^u \partial_u \sqrt{\gamma_q} = -\frac{x_0^2 u}{L^2} \sqrt{h(u)} \partial_u \left[\frac{1}{u^2} \sqrt{1-u^2} \right] \quad (9.41)$$

En la frontera, $u \rightarrow 0$ y podemos hacer el desarrollo $\sqrt{h(u)} = \sqrt{1-u^2} \simeq 1 - \frac{u^2}{2}$, con lo que nos queda, finalmente:

$$\begin{aligned} S_{GHY(\text{Euclideo})} &= -\frac{1}{k^2} \int_0^\beta dt_E \int_0^{2\pi} d\varphi \left(2 \frac{x_0^2}{L^2} \frac{1}{u^2} - \frac{x_0^2}{L^2} \right)_{u=0} = \\ &= \frac{2\pi}{L^2} \frac{x_0^2 \beta}{k^2} \left(1 - \frac{2}{u^2} \right)_{u=0} \end{aligned} \quad (9.42)$$

Consideremos por último la contribución debida al contratérmino: como acabamos de ver tanto S_{Bulk} como S_{GHY} divergen cuando $u \rightarrow 0$. Para cancelar esta divergencia es necesario añadir a la acción un nuevo término de superficie (S_{CT}). En la correspondencia AdS/CFT las propiedades de la teoría gauge dual que vive en la superficie vienen determinadas por la teoría gravitatoria que vive en el “bulk” y la anterior divergencia se interpreta desde el punto de vista de la teoría gauge como su divergencia ultravioleta. El procedimiento entonces para manejar la divergencia es el habitual en las teorías gauge: se añade un número finito de contratérminos a la acción original. Siguiendo esta prescripción añadimos un contratérmino a la acción gravitatoria, con el fin de obtener una función de partición finita. El procedimiento tal y como ya hemos comentado en el capítulo 4 se conoce como “renormalización holográfica”. En nuestro caso es sencillo ver que el contratérmino (que siempre se construye exclusivamente mediante cantidades de la superficie frontera) viene dado por: $S_{CT} = \frac{1}{2k^2} \int d^2x \frac{2}{L} \sqrt{\gamma_q} = \frac{2\pi}{L^2} \frac{x_0^2 \beta}{k^2} \left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{2} \right)_{u=0}$. Sumando las tres contribuciones obtenemos:

$$\begin{aligned} S_T &= S_{Bulk} + S_{GHY} + S_{CT} = \\ &= \frac{2\pi \beta x_0^2}{k^2 L^2} \left(\frac{1}{u^2} - 1 + 1 - \frac{2}{u^2} + \frac{1}{u^2} - \frac{1}{2} \right)_{u=0} = -\frac{\pi \beta x_0^2}{k^2 L^2} \end{aligned} \quad (9.43)$$

la acción euclidea on-shell está directamente relacionada [268] con la función de partición de la teoría gauge y con la energía libre de la misma mediante las relaciones $Z = e^{-S_E}$ y $S_E = \beta F$, siendo F la energía libre. El diccionario AdS/CFT nos permite entonces despejar la energía libre característica de la teoría gauge como $F = \frac{-\pi x_0^2}{k^2 L^2}$. Si ahora calculamos la temperatura de Hawking (4.63) tendremos finalmente:

$$F = -\frac{4\pi^3}{k^2} L^2 T_H^2 \quad (9.44)$$

que es nuestro resultado final en ausencia de materia, resultado totalmente equivalente al obtenido en el contexto de la RG, de acuerdo con el hecho de que en ausencia de materia ambas teorías son equivalentes. En la siguiente sección introduciremos la materia en forma de campo electromagnético y veremos su contribución a las expresiones “on shell” de la acción.

9.3 Cálculo de las acciones “on shell” en diferentes escenarios GBI

En esta sección vamos a realizar cálculos explícitos de las acciones on-shell asociadas a distintos escenarios GBI en presencia de la materia representada por el electromagnetismo de Maxwell o soluciones de tipo NED (electromagnetismo de Born-Infeld). Dichos cálculos servirán de complemento a capítulos anteriores y a lo expuesto en diversos artículos en los que se ha explorado ampliamente este tipo de soluciones [168, 49, 167, 50, 282]. Uno de los aspectos interesantes de dichas familias de soluciones es el carácter en general finito de las integraciones espaciales de la acción. Comenzaremos revisando dicha característica en el contexto d -dimensional del electromagnetismo de Maxwell acoplado a GBI (trabajo completamente deducido en [50]: resumimos y revisamos aquí dichos resultados), partiendo para ello de la resolución directa de las ya conocidas ecuaciones para métrica y conexión y exploraremos posteriormente en cálculos propios las particularidades de dicho procedimiento de cálculo de la acción espacial on-shell en el caso de $2 + 1$ dimensiones, o del electromagnetismo no líneal.

9.3.1 Electromagnetismo de Maxwell en d dimensiones

La acción total viene descrita por la ecuación (9.1) con S_M generada por el electromagnetismo de Maxwell:

$$S_T = S_{GBI} + S_{E-M} = -\frac{1}{k^2 \epsilon} \int d^d r \left[\sqrt{-|g_{\mu\nu} + \epsilon R_{\mu\nu}(\Gamma)|} - \lambda \sqrt{-g} \right] - \frac{1}{16\pi} \int d^d r \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (9.45)$$

siendo $d^d r = r^2 d\Omega_{(d-2)}^2$ el elemento de volumen asociado en d dimensiones. Si asumimos que la solución para la métrica espacio-temporal $g_{\mu\nu}$ viene dada por una simetría esférica en el subespacio de dimensión $d - 2$ [50] y por una materia electromagnética que presenta

asimismo simetría radial, el elemento de línea se escribirá como:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{tt} dt^2 + g_{rr} dr^2 + r^2 d\Omega_{(d-2)}^2 \\ d\Omega_{(d-2)}^2 &= d\theta_1^2 \sum_{i=2}^{d-3} \prod_{j=1}^{i-2} \sin^2 \theta_j d\theta_i^2 \end{aligned} \quad (9.46)$$

y el elemento de volumen $d^d r$ puede escribirse como $d^d r = dt dr d\omega_{(d-2)}$ con $\omega_{(d-2)} = 2\pi \frac{d-1}{\Gamma(\frac{d-1}{2})}$ (es un ejercicio directo comprobar que la anterior definición de ω_{d-2} nos devuelve los familiares resultados para $d = 4$ y $d = 3$). Para dicha distribución estática y radial el tensor campo electromagnético $F^{\mu\nu}$ viene caracterizado por una única variable independiente, la coordenada radial, de forma que la ecuación de Maxwell $\nabla_\mu(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}) = 0$ ofrece como solución:

$$F^{tr} = \frac{q}{r^{d-2} \sqrt{-g_{tt}g_{rr}}} \quad (9.47)$$

siendo q una constante de integración que asociaremos de manera natural con la carga eléctrica, pero es necesario ser cuidadoso con su dimensionalidad pues de (9.45) y (9.47) se sigue inmediatamente que las dimensiones de la carga eléctrica dependen asimismo de la dimensión del espacio-tiempo. En el caso $d = 4$ y en el sistema de unidades naturales cgs la carga eléctrica se mide en Coulombs. Sin embargo no es así para el caso $d = 3$, donde la carga eléctrica tiene dimensiones $\frac{1}{\sqrt{L}}$ de acuerdo con las anteriores expresiones. No obstante, en las referencias habituales en las que tratamos campos electromagnéticos en $(2+1)$ dimensiones en el contexto GBI es asimismo habitual encontrar la carga eléctrica definida sin dimensiones (esto se consigue introduciendo una potencia inversa de la longitud de Planck en la definición de la acción electromagnética de materia). Dicha adimensionalidad de la carga eléctrica en un espacio de dimensión menor permite parametrizar las estructuras de agujero de gusano que emergen de manera natural de las ecuaciones de movimiento en términos sencillos, usando únicamente el parámetro ε de la gravedad de Born-Infeld, pero pueden llevar a confusiones. Retomaremos esta reflexión en secciones posteriores cuando analicemos las soluciones tipo BTZ las estructuras de agujero de gusano asociadas y la forma de la ecuación de Dirac.

A partir de la definición (5.10) del tensor energía- momento asociado a la materia, un cálculo directo nos lleva a la expresión:

$$T_\mu^\nu = \frac{X}{8\pi} \begin{pmatrix} -I_{2 \times 2} & 0_{(d-2) \times 2} \\ 0_{2 \times (d-2)} & I_{(d-2) \times (d-2)} \end{pmatrix} \quad (9.48)$$

siendo $X = -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{q^2}{r^{2(d-2)}}$. De la anterior expresión se deduce directamente la forma de la matriz de deformación (5.30):

$$\widehat{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega_+ I_{2 \times 2} & 0_{(d-2) \times 2} \\ 0_{2 \times (d-2)} & \Omega_- I_{2 \times 2} \end{pmatrix} \quad (9.49)$$

con Ω_+ y Ω_- funciones dadas por [50]:

$$\begin{aligned} \Omega_- &= (\lambda + \widetilde{X})^{\frac{2}{d-2}} \\ \Omega_+ &= \frac{\lambda - \widetilde{X}}{(\lambda + \widetilde{X})^{\frac{d-4}{d-2}}} \end{aligned} \quad (9.50)$$

con $\widetilde{X} \equiv \frac{k^2 \varepsilon}{8\pi} X$. Una vez encontrada la matriz de deformación es asimismo inmediato encontrar la forma explícita del lagrangiano de gravedad introducido en (5.32):

$$L_G = \frac{\Omega_+ \Omega_-^{\frac{d-2}{2}} - \lambda}{k^2 \varepsilon} \quad (9.51)$$

con lo que ya tenemos todos los ingredientes necesarios para resolver (5.32) y obtener explícitamente el tensor $q_{\mu\nu}$. Para ello el truco es siempre el mismo, consideramos que $q_{\mu\nu}$ hace el papel de métrica espacio-temporal en un marco de trabajo asimilable a la Relatividad General, (EF): dicha idea como hemos comentado fundamenta el “mapping” entre espacios de soluciones, pero podemos asumirla asimismo para atacar directamente el problema resolviendo ecuaciones de movimiento si consideramos que el elemento de línea asociado a $q_{\mu\nu}$ puede escribirse “a la Schwarzschild”:

$$q_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -A(x) dt^2 + \frac{1}{A(x)} dx^2 + x^2 d\Omega_{(d-2)}^2 \quad (9.52)$$

lo que permite encontrar soluciones para $A(x)$ a partir de (5.32). Por otra parte, de (5.29), (9.46) y (9.51) podemos establecer una relación entre las variables radiales x y $r(x)$:

$$\begin{aligned} x^2 &= r^2 \Omega_- \\ \frac{dx}{dr} &= \frac{\lambda - \widetilde{X}}{\lambda + \widetilde{X}} \sqrt{\Omega_-} \end{aligned} \quad (9.53)$$

la primera de estas ecuaciones fundamenta la emergencia de estructuras de tipo agujero de gusano de manera natural en las teorías RBG formuladas en el escenario métrico-afín

[278]: ilustraremos más adelante esta idea detalladamente cuando rehagamos las soluciones halladas en [168] via “mapping” resolviendo directamente las ecuaciones de movimiento. Si ahora consideramos las soluciones sin constante cosmológica ($\lambda = 1$) y el caso en que $\varepsilon < 0$ un cálculo directo a partir de (9.53) nos da la información relacionada con la estructura del agujero de gusano: la variable $r(x)$ alcanza un valor mínimo en $x = 0$ dado por $r = r_c$ con $r_c^{2(d-2)} = -k^2 \varepsilon \frac{q^2}{8\pi}$. Introduciendo la variable adimensional $z = \frac{r}{r_c}$ estamos ya en condiciones de elaborar on-shell (9.45) en términos de una integración sobre la variable radial z . A partir de (9.52) y (9.53) el elemento de línea asociado a $g_{\mu\nu}$ puede escribirse como:

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -\frac{A(x)}{\Omega_+} dt^2 + \frac{\Omega_+}{A(x)} \left(\frac{dx}{\Omega_+} \right)^2 + r^2(x) d\Omega_{(d-2)}^2 \quad (9.54)$$

lo que nos da la estructura $\sqrt{-g} d^d x = \frac{1}{\Omega_+} r^{(d-2)}(x) d^d x$. La acción de materia puede a su vez escribirse como $S_M = \int d^d x \sqrt{-g} \frac{\tilde{X}}{k^2 \varepsilon}$ y (9.45) pasa a escribirse on-shell como:

$$S_T = \frac{c}{k^2 \varepsilon} \int dt dx \frac{1}{\Omega_+} r^{(d-2)}(x) d\omega_{(d-2)} \left(\sqrt{|\hat{\Omega}|} - 1 + \tilde{X} \right) \quad (9.55)$$

utilizando (9.50) para Ω_+ y Ω_- en función de $\tilde{X} = -\frac{1}{z^{2(d-2)}}$ y la relación entre elementos diferenciales radiales (9.53) la última igualdad pasa a escribirse como:

$$S_T = 2 \frac{\omega_{d-2}}{k^2 \varepsilon} r_c^{d-1} \int c dt \int_0^\infty dz z^{d-2} \frac{1 - \tilde{X}}{(1 + \tilde{X})^{\frac{1}{d-2}}} \left((1 + \tilde{X})^{\frac{2}{d-2}} - 1 \right) \quad (9.56)$$

donde hemos añadido un factor 2 para dar cuenta de la integración a ambos lados del agujero de gusano. Sustituyendo $\tilde{X} = -\frac{1}{z^{2(d-2)}}$ la integral radial está lista para su cálculo explícito:

$$\begin{aligned} I(z) &= \int dz z^{d-2} \frac{1 - \tilde{X}}{(1 + \tilde{X})^{\frac{1}{d-2}}} \left((1 + \tilde{X})^{\frac{2}{d-2}} - 1 \right) = \\ &= \frac{1}{(d-1)(d-3) z^{d+1}} \left((d-1) z^4 {}_2F_1 \left\{ \frac{1}{d-2}, \frac{d-3}{2d-4}, \frac{3d-7}{2d-4}, z^{4-2d} \right\} + \right. \\ &\quad \left. + (d-3) \left[(1 - z^{4-2d})^{\frac{1}{d-2}} (z^{2d} - z^4) z^{2d} {}_2F_1 \left\{ \frac{1}{d-2}, -\frac{(d-1)}{2d-4}, \frac{d-3}{2d-4}, z^{4-2d} \right\} \right] \right) \end{aligned} \quad (9.57)$$

Consideremos algunos casos particulares: para $d = 4$ y $z \rightarrow \infty$ el desarrollo en serie de la anterior ecuación nos da el resultado $I(z \rightarrow \infty) \simeq \frac{-1}{z}$ que es el comportamiento típico de las soluciones Reissner-Nordström, anulándose en el infinito. Resultado esperable, ya que a grandes distancias comparadas con $r_c \simeq \sqrt{-\varepsilon}$ los efectos característicos de la gravedad

de Born-Infeld son despreciables y debemos recuperar el comportamiento propio de la RG. Cerca de $z = 1$, en el entorno del agujero de gusano, el desarrollo en serie para $d = 4$ nos da el resultado:

$$I(z \simeq 1) \simeq \frac{\sqrt{\pi}}{3} \left(3 \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{3}{4})} - \frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(-\frac{1}{4})} \right) - 2\sqrt{z-1} + \frac{11}{6} (z-1)^{\frac{3}{2}} \quad (9.58)$$

es decir: en la garganta del agujero de gusano tenemos que para el caso $d = 4$ el resultado de la acción espacial va a ser finito.

9.3.2 Electromagnetismo de Maxwell (d=3)

La acción espacial para el caso $d = 3$ (soluciones tipo BTZ) presenta características especiales debido al carácter logarítmico del campo electromagnético asociado [49], lo que va a darnos un resultado no finito. Consideremos el caso $\varepsilon < 0$. La acción total del sistema viene dada por:

$$S_T = S_G + S_M = \frac{1}{k^2 \varepsilon} \int d^3 r \sqrt{-g} \left(\sqrt{|\widehat{\Omega}|} - \lambda \right) - \frac{1}{16\pi L p} \int d^3 r \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (9.59)$$

siguiendo el procedimiento general de la sección anterior encontramos para ($\varepsilon < 0$) [49]:

$$\widehat{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega_+ I_{2 \times 2} & 0_{1 \times 2} \\ 0_{2 \times 1} & \Omega_- \end{pmatrix} \quad (9.60)$$

$$\{\Omega_-, \Omega_+\} = \{(\lambda + X)^2, (\lambda + X)(\lambda - X)\} \quad (9.61)$$

con $|\sqrt{|\widehat{\Omega}|}| = \Omega_+ \sqrt{\Omega_-}$ y $X = \varepsilon \frac{Q^2}{r^2} < 0$. El elemento de línea, por su parte, vendrá dado por:

$$ds^2 = -A(r) dt^2 + \frac{1}{A(r)} \left(\frac{dx}{\Omega_+} \right)^2 + r^2(x) d\theta^2 \quad (9.62)$$

con $\sqrt{-g} d^3 r = c dt dr d\theta \frac{r}{\sqrt{\Omega_-}}$. Introduciendo como de costumbre la relación entre coordenadas radiales $x^2 = r^2 \Omega_-$ y usando $X = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{Q^2}{r^2}$ la acción on-shell al completo se

escribe como:

$$S_T = \frac{1}{k^2 \varepsilon} \int dt dr d\theta r \left[(\lambda^2 - \varepsilon^2 \frac{Q^4}{r^4}) - \frac{\lambda}{\lambda + \varepsilon \frac{Q^2}{r^2}} \right] + \frac{Q^2}{k^2} \int dt dr d\theta \frac{1}{r (\lambda + \varepsilon \frac{Q^2}{r^2})} \quad (9.63)$$

definiendo $r_{min}^2 = -\varepsilon \frac{Q^2}{\lambda}$ e introduciendo la variable $z = \frac{r}{r_{min}}$ la integral nos queda:

$$S_T = 2\pi \frac{\beta Q^2}{\lambda k^2} \int dz \left[\frac{z}{z^2 - 1} - \lambda^2 \frac{z^4 - 1}{z^3} - \frac{z^3}{z^2 - 1} \right] \quad (9.64)$$

con $\beta \equiv \int c dt$. Realizando la integración en z encontramos el resultado:

$$I(z) = \int dz \left[\frac{z}{z^2 - 1} - \lambda^2 \frac{z^4 - 1}{z^3} + \frac{z^3}{z^2 - 1} \right] = \quad (9.65)$$

$$= \frac{z^2}{2} - \frac{\lambda^2}{2z^2} - \frac{1}{2} (z^2 - 1) \lambda^2 + \ln(z^2 - 1) \quad (9.66)$$

la integral presenta varias divergencias: por un lado una divergencia logarítmica, tanto en $(z = 1)$ (garganta del agujero de gusano) como en $z = \infty$ debido a la existencia del campo electromagnético. Para verlo consideremos la sustitución de la función $I(z) = \frac{z^2}{2} - \frac{\lambda^2}{2z^2} - \frac{1}{2} (z^2 - 1) \lambda^2 + \ln(z^2 - 1)$ en los límites superior e inferior de la acción espacial, $z = 1$ (garganta del agujero de gusano) y $z = \infty$ y supongamos $\lambda = 1$ es decir, soluciones asintóticamente planas: a grandes distancias la función va como $\frac{1}{2} + 2 \ln z$ mientras que cerca del agujero de gusano se comporta como $\ln 2 + \ln(z - 1)$. Definiendo en esta región la variable $y = \frac{1}{z-1}$ la función diverge aquí como $-\ln y$ con $y \rightarrow \infty$, luego ambas divergencias en el infinito y en el agujero de gusano son de tipo logarítmico. La otra divergencia se produce en el infinito y tiene que ver con la presencia de la constante cosmológica, λ . Para $\lambda = 1$, esa divergencia en el infinito se anula.

9.3.3 GBI + electromagnetismo de Born-Infeld (d=3)

En este apartado calculamos la acción espacial on-shell para las soluciones encontradas en la referencia [168]: la acción completa del sistema viene en este caso dada por:

$$S_T = S_G + S_M = \frac{1}{k^2 \varepsilon} \int d^3 r \left(\sqrt{-|g_{\mu\nu} + \varepsilon R_{\mu\nu}(\Gamma)|} - \lambda \sqrt{-g} \right) + \frac{1}{k^2 \varepsilon} \int d^3 r \sqrt{-g} [\lambda - \sqrt{1 - 2\varepsilon(K - \Lambda)}] \quad (9.67)$$

en el EF tenemos las soluciones de tipo BTZ con carga eléctrica habituales en el contexto de la RG:

$$q_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \varepsilon R_{\mu\nu}(\Gamma) = -H(x)dt^2 + \frac{1}{H(x)}(dx)^2 + x^2 d\theta^2 \quad (9.68)$$

con $H(x) = -M + \frac{x^2}{L^2} - \frac{Q^2}{2} \ln[\frac{x}{x_0}]$. La solución en el RBG frame obtenida vía “mapping” viene dada por [168]:

$$ds^2 = -\eta H(x)dt^2 + \frac{\eta}{H(x)}(dx)^2 + \eta x^2 \left(1 - \frac{\varepsilon Q^2}{2\eta x^2}\right) d\theta^2 \quad (9.69)$$

siendo $\eta = \frac{L^2 + 2\varepsilon}{L^2} \simeq 1$. Para $\varepsilon < 0$ la variable radial $r^2(x) = x^2 - \varepsilon \frac{Q^2}{2\eta}$ alcanza un valor mínimo, r_{min} . En el sector electromagnético tenemos la relación $K = \frac{Q^2}{4\eta^2 x^2} \simeq \frac{Q^2}{4x^2}$ lo que implica:

$$\sqrt{1 - 2\varepsilon(K - \Lambda)} = \sqrt{1 + 2\varepsilon\Lambda - \varepsilon \frac{Q^2}{2\eta^2 x^2}} \simeq \sqrt{\Delta + \frac{r_{min}^2}{x^2}} \quad (9.70)$$

con $\Delta = 1 + 2\varepsilon\Lambda \simeq 1$ y para la acción on-shell tendremos:

$$S_T = \frac{1}{k^2 \varepsilon} \int d^3x \left[|x| - |x| \sqrt{1 + \frac{r_{min}^2}{x^2}} \sqrt{\Delta + \frac{r_{min}^2}{x^2}} \right] \quad (9.71)$$

haciendo los habituales cambios de variable $r^2 = x^2 + r_{min}^2$, $z = \frac{r}{r_{min}}$ la anterior ecuación nos queda:

$$S_T = -\pi \frac{\beta}{\eta k^2} Q^2 \int_1^\infty z dz \left(1 - \sqrt{\frac{z^2}{z^2 - 1}} \sqrt{\Delta + \frac{1}{z^2 - 1}}\right) \quad (9.72)$$

podemos escribir el integrando como:

$$\begin{aligned} G(z) &= z \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 - 1}} \sqrt{\frac{\Delta z^2 - \Delta + 1}{z^2 - 1}}\right) = z \left(1 - \frac{z^2 \sqrt{\Delta}}{z^2 - 1} \sqrt{1 + \frac{1 - \Delta}{z^2 \Delta}}\right) \simeq \\ &\simeq z \left(1 - \frac{z^2 \sqrt{\Delta}}{z^2 - 1} \left(1 + \frac{1 - \Delta}{2z^2 \Delta}\right)\right) = z - \frac{z^3}{z^2 - 1} \sqrt{\Delta} + \frac{\sqrt{\Delta}(\Delta - 1)}{2\Delta(z^2 - 1)} \end{aligned} \quad (9.73)$$

que admite la solución :

$$\begin{aligned} S_T &= \pi \frac{\beta}{k^2} Q^2 \left(-\frac{z^2}{2} + \sqrt{\Delta} \frac{z^2}{2} + \sqrt{\Delta} \frac{\ln[z^2 - 1]}{2} - \frac{(\Delta - 1)}{4\sqrt{\Delta}} \ln \frac{z - 1}{z + 1}\right) = \\ &= \pi \frac{\beta}{k^2} Q^2 I(z) \end{aligned} \quad (9.74)$$

si desarrollamos en serie la función del integrando en el entorno de $z = 1$ y $z = \infty$ obtenemos:

$$\begin{aligned} I(z \simeq 1) &\simeq -\frac{(\sqrt{\Delta}-1)}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \left(\ln 2 + \ln[z-1] \right) - \frac{(\Delta-1)}{4\sqrt{\Delta}} \left(\ln[z-1] - \ln 2 \right) \\ I(z \simeq \infty) &\simeq \frac{z^2}{2} (\sqrt{\Delta}-1) + \sqrt{\Delta} \ln z \end{aligned} \quad (9.75)$$

9.3.4 GBI + electromagnetismo de Born-Infeld (d=4)

En este caso acudimos a la referencia [167] para estudiar la estructura de la acción espacial on-shell. Vamos a generalizar los razonamientos utilizados allí para incorporar el efecto de una constante cosmológica no nula. El espacio de soluciones en el EF viene dado por el acoplamiento de la curvatura escalar R al electromagnetismo de Maxwell:

$$S_T = \frac{1}{2k^2} \int d^4x \sqrt{-q} (R - 2\Lambda) + \frac{1}{8\pi} \int d^4x \sqrt{-q} [X] \quad (9.76)$$

con $X = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$. El lagrangiano de materia viene caracterizado entonces por la función $\varphi[X] \equiv (X - \frac{\Lambda}{L_p^2})$ cuyo tensor energía-momento expresado en función de los parámetros característicos de un fluido anisótropo equivalente puede escribirse como [11]:

$$\begin{aligned} T_\nu^\mu &= \frac{1}{8\pi} \text{Diag}\{\varphi - 2X\varphi_X, \varphi - 2X\varphi_X, X, X\} = \\ &= \text{Diag}\{-\rho^{GR}, P_R^{GR}, P_T^{GR}, P_T^{GR}\} \end{aligned} \quad (9.77)$$

$$\begin{aligned} \rho^{GR} &= \frac{1}{8\pi} (X + \Delta) = -P_R^{GR} \\ P_T^{GR} &= \frac{1}{8\pi} (X - \Delta) \end{aligned} \quad (9.78)$$

con $\Delta = \frac{\Lambda}{L_p^2}$. La correspondencia entre “frames” viene dada por las relaciones [11]:

$$\begin{aligned} \lambda + k^2 \varepsilon \rho^{BI} &= \frac{1}{1 - k^2 \varepsilon \rho^{GR}} \\ \lambda - k^2 \varepsilon P_T^{BI} &= \frac{1}{1 + k^2 \varepsilon P_T^{GR}} \\ k^2 \varepsilon \rho^{BI} &= \frac{\lambda k^2 \varepsilon \rho^{GR} - (\lambda - 1)}{1 - k^2 \varepsilon \rho^{GR}} \\ k^2 \varepsilon P_T^{BI} &= \frac{\lambda k^2 \varepsilon P_T^{GR} + (\lambda - 1)}{1 + k^2 \varepsilon P_T^{GR}} \end{aligned} \quad (9.79)$$

a partir de (9.77) y la primera de las ecuaciones (9.79) es inmediato asimismo:

$$k^2 \varepsilon \rho^{GR} = k^2 \varepsilon \left(P_T^{GR} + \frac{\Delta}{4\pi} \right) = \frac{(\lambda - 1) + k^2 \varepsilon \rho^{BI}}{\lambda + k^2 \varepsilon \rho^{BI}} \quad (9.80)$$

lo que nos permite reescribir la última de las expresiones (9.79) como:

$$k^2 \varepsilon P_T^{BI} = \frac{a k^2 \varepsilon \rho^{BI} + b}{c k^2 \varepsilon \rho^{BI} + a} \quad (9.81)$$

siendo: $a = \lambda (2 - \bar{\Delta}) - 1$, $b = \lambda (\lambda^2 - 1 - \lambda \bar{\Delta})$, $c = 2 - \bar{\Delta}$, $\bar{\Delta} = \frac{\Delta}{4\pi}$. En el lado GBI tenemos las presiones y densidades del fluido correspondiente dadas por:

$$\begin{aligned} T_v^{\mu(BI)} &= \frac{1}{8\pi} \text{Diag}\{\varphi^{BI} - 2\varphi^{BI} \varphi_X^{BI}, \varphi^{BI} - 2\varphi^{BI} \varphi_X^{BI}, \varphi^{BI}, \varphi^{BI}\} \\ &= \text{Diag}\{-\rho^{BI}, P_R^{BI}, P_T^{BI}, P_T^{BI}\} \end{aligned} \quad (9.82)$$

es decir, $P_T^{BI} = \frac{1}{8\pi} \varphi^{BI}[X]$ con lo que podremos usar de nuevo (9.81) para escribir la función $\varphi^{BI}[X]$ como:

$$\varphi^{BI}[X] = 8\pi \left(\frac{a \rho^{BI}}{c k^2 \varepsilon \rho^{BI} + a} + \frac{1}{k^2 \varepsilon} \frac{b}{c k^2 \varepsilon \rho^{BI} + a} \right) \quad (9.83)$$

podemos despejar ρ^{BI} de la anterior ecuación, obteniendo:

$$8\pi \rho^{BI} = \frac{\Psi - d}{1 - e\Psi} \quad (9.84)$$

con $\varphi^{BI}[X] \equiv \Psi[X]$, $d = 8\pi \frac{\lambda}{k^2 \varepsilon} (\lambda^2 - 1 - \lambda \bar{\Delta})$ y $e = \frac{k^2 \varepsilon}{8\pi} \frac{2 - \bar{\Delta}}{\lambda (2 - \bar{\Delta}) - 1}$. De (9.82) tenemos $\frac{1}{8\pi} (\varphi_{BI} - 2\varphi_{BI} \varphi_{BI_X}) = -\rho^{BI}$ y utilizando (9.84) obtenemos la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \Psi - 2X \frac{d\Psi}{dX} &= \frac{d - \Psi}{1 - e\Psi} \\ \frac{dX}{X} &= 2\Psi \frac{d(e\Psi - 1)}{e\Psi^2 + d - 2\Psi} \end{aligned} \quad (9.85)$$

que se puede integrar para dar:

$$\begin{aligned} \ln X &= \ln[e\Psi^2 + d - 2\Psi] + C_1 \\ X &= C_2 [e\Psi^2 + d - 2\Psi] \end{aligned} \quad (9.86)$$

ecuación de segundo grado en Ψ . Resolviéndola obtenemos:

$$\Psi = \frac{1 \pm \sqrt{1 - de + e \frac{X}{C_2}}}{e} \quad (9.87)$$

para $e \rightarrow 0$ hemos de recuperar el electromagnetismo de Maxwell caracterizado por $\varphi = X - \Delta$. Al desarrollar en serie la raíz vemos que nos hemos de quedar con la segunda de las soluciones :

$$\Psi \simeq \frac{d}{2} - \frac{X}{2C_2} + O[e]. \quad (9.88)$$

tomando $C_2 = -\frac{1}{2}$ nos queda $\Psi \simeq (X + \frac{d}{2})$ con:

$$\begin{aligned} \frac{d}{2} &= \frac{4\pi\lambda}{\epsilon k^2} (\lambda^2 - 1 - \lambda\bar{\Delta}) \\ &\simeq \frac{1}{L_p^2} \left(\frac{(\lambda - 1)}{\epsilon} - 2\Lambda \right) = -\frac{\Lambda}{L_p^2} \end{aligned} \quad (9.89)$$

considerando $e \simeq \frac{\epsilon k^2}{\lambda 4\pi}$ un cálculo directo nos lleva finalmente a:

$$\Psi \simeq 4\pi \frac{1}{k^2 \epsilon} \left(\lambda - \sqrt{1 - \frac{k^2 \epsilon}{2\pi} \left(X - \frac{\Lambda}{L_p^2} \right)} \right) \quad (9.90)$$

consideremos ahora la métrica $q_{\mu\nu}$ en el EF, donde se corresponde con las soluciones tipo Reissner-Nordström en presencia de constante cosmológica:

$$\begin{aligned} ds_q^2 &= -\left(1 - \frac{r_s}{x} + \frac{r_q^2}{2x^2} - \frac{\Lambda}{3}x^2\right) dt^2 + \\ &+ \frac{1}{\left(1 - \frac{r_s}{x} + \frac{r_q^2}{2x^2} - \frac{\Lambda}{3}x^2\right)} dx^2 + x^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \end{aligned} \quad (9.91)$$

Con $r_s = 2M_0$ y $r_q^2 = \frac{Q^2 k^2}{4\pi} = 2Q^2 L_p^2$. Teniendo en cuenta que $X = \frac{Q^2}{x^4}$ las componentes T_ν^μ del correspondiente fluido anisótropo vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \rho^{GR} &= \frac{\Delta}{8\pi} + \frac{r_q^2}{2k^2 x^4} = -P_R^{GR} \\ P_T^{GR} &= -\frac{\Delta}{8\pi} + \frac{r_q^2}{2k^2 x^4} \end{aligned} \quad (9.92)$$

Y a partir de ellas la matriz de deformación se escribe como:

$$\begin{aligned} \left(\Omega_{\nu}^{\mu}\right)^{-1} &= 1 - \frac{k^2 \varepsilon}{2} \left(\frac{\Delta}{4\pi} + \frac{r_q^2}{k^2 x^4} \right) \delta_{\nu}^{\mu} - \varepsilon \frac{r_q^2}{x^4} \text{Diag}\{-1, 0, 0, 0\} + \\ &+ \varepsilon \frac{r_q^2}{x^4} \text{Diag}\{0, 1, 0, 0\} \end{aligned} \quad (9.93)$$

introduciendo $r_c^4 = |\varepsilon| \frac{Q^2 k^2}{8\pi} = |\varepsilon| \frac{r_q^2}{2}$ y $\eta = 1 - 2\varepsilon\Lambda = 1 - 2(\lambda - 1)$ nos queda para el caso $\varepsilon = -1$:

$$\begin{aligned} \Omega_+ &= \frac{1}{1 - \varepsilon\Lambda + \varepsilon \frac{r_q^2}{2x^4}} = \frac{1}{\eta - \frac{r_c^4}{x^4}} \\ \Omega_- &= \frac{1}{1 - \varepsilon\Lambda - \varepsilon \frac{r_q^2}{2x^4}} = \frac{1}{\eta + \frac{r_c^4}{x^4}} \end{aligned} \quad (9.94)$$

usando $x^4 = r^4 \Omega_-^2$ podemos escribir la matriz de deformación como:

$$\begin{aligned} \Omega_+ &= \frac{1}{2\eta} \left(1 + \frac{r^2}{\sqrt{r^4 - 4\eta r_c^4}} \right) \\ \Omega_- &= \frac{1}{2\eta} \left(1 + \frac{\sqrt{r^4 - 4\eta r_c^4}}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (9.95)$$

en el sistema de coordenadas $\{t, x, \theta, \varphi\}$ la métrica espacio-temporal se escribe como:

$$ds_g^2 = -\frac{C(x)}{\Omega_+} dt^2 + \frac{\Omega_+}{C(x)} dx^2 + r^2(x) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (9.96)$$

usando de nuevo la relación entre coordenadas radiales y diferenciando tenemos:

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} &= \frac{r^2 \sin \theta}{\sqrt{\Omega_-}} \\ \sqrt{-q} &= \sqrt{-g} \sqrt{|\widehat{\Omega}|} = \sqrt{-g} \Omega_+ \Omega_- \end{aligned} \quad (9.97)$$

calculemos ahora la cantidad $X = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$: teniendo en cuenta que en el EF el electromagnetismo es el de Maxwell, es decir, se cumple $F_{tx} = \frac{Q}{x^2}$ y usando asimismo las relaciones:

$$\begin{aligned} F^{tx} &= -F_{tx} \\ \{F_{tr}, F^{tr}\} &= \left\{ \frac{dx}{dr} F_{tx}, g^{tt} g^{rr} F_{tr} \right\} \end{aligned} \quad (9.98)$$

en la base $\{t, r, \theta, \varphi\}$ tendremos:

$$X = -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\left(\frac{dx}{dr}\right)^2 g^{tt}g^{rr}(F_{tx})^2 \quad (9.99)$$

usando $g^{tt} = -\frac{\Omega_+}{C(x)}$, $g^{rr} = \left(\frac{dr}{dx}\right)^2 C(x)\Omega_+$ un cálculo directo lleva a:

$$X = \frac{Q^2}{r^4 - 4\eta r_c^4} \quad (9.100)$$

y usando de nuevo (9.90):

$$\begin{aligned} \psi &= \varphi^{BI} = \frac{4\pi}{k^2\varepsilon} \left[\lambda - \sqrt{1 - \frac{k^2\varepsilon}{2\pi} \left(X - \frac{\Lambda}{L_p^2} \right)} \right] = \\ &= \frac{4\pi}{k^2\varepsilon} \left[\lambda - \sqrt{1 - \frac{k^2\varepsilon}{2\pi} \left(\frac{Q^2}{r^4 - 4\eta r_c^4} - \frac{\Lambda}{L_p^2} \right)} \right] \end{aligned} \quad (9.101)$$

tomando $\eta \simeq 1$, $k^2 = 8\pi L_p^2$ y $r_c^4 = |\varepsilon| \frac{Q^2 k^2}{8\pi}$ tenemos:

$$\varphi_{BI} \simeq \frac{4\pi}{k^2\varepsilon} \left(\lambda - \sqrt{\frac{r^4}{r^4 - 4r_c^4} + 4\varepsilon\Lambda} \right) \quad (9.102)$$

desarrollando en serie la raíz:

$$\varphi_{BI} \simeq \frac{4\pi}{k^2\varepsilon} \left(\lambda - \frac{r^2}{\sqrt{r^4 - 4r_c^4}} - 2\varepsilon\Lambda\sqrt{1 - \frac{4r_c^4}{r^4}} \right) \quad (9.103)$$

que puede expresarse finalmente como $\varphi_{BI} \simeq \frac{4\pi}{k^2\varepsilon} \left(\lambda + 1 - 2\Omega_+ - \Delta\sqrt{1 - 4\frac{r_c^4}{r^4}} \right)$. A partir de aquí la acción total en el RF se escribirá como:

$$S_T = \frac{1}{\varepsilon k^2} \int d^4r \sqrt{-g} \left[\Omega_+ \Omega_- - \lambda + \frac{1}{8\pi} \left(4\pi(\lambda + 1) - 8\pi\Omega_+ - 8\pi\varepsilon\Lambda\sqrt{1 - 4\frac{r_c^4}{r^4}} \right) \right] \quad (9.104)$$

haciendo el cambio $z = \frac{r}{r_{min}}$ con $r_{min}^4 = 4r_c^4$ la integral se escribe como:

$$\begin{aligned}
S_T = 4\pi \frac{\beta r_{min}^3}{k^2 \varepsilon} \int_1^\infty dz \left[\frac{1-\lambda}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{z}{\sqrt{z^4-1}} \left(z^2 + \sqrt{z^4-1}\right)^{\frac{3}{2}} - \right. \\
\left. - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} z^3 \left(z^2 + \sqrt{z^4-1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{z^4-1}} - \sqrt{2} \varepsilon \Lambda \frac{z \sqrt{z^4-1}}{\sqrt{z^2 + \sqrt{z^4-1}}} \right] \quad (9.105)
\end{aligned}$$

la primera integral, relacionada con la constante cosmológica, nos dará un resultado divergente. Veamos la contribución de los dos siguientes términos:

$$\int_1^\infty dz \left(\frac{z}{2\sqrt{z^4-1}} \left(z^2 + \sqrt{z^4-1}\right)^{\frac{3}{2}} - z^3 \left(z^2 + \sqrt{z^4-1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{z^4-1}} \right) = -\frac{1}{2} \quad (9.106)$$

luego esos dos términos nos dan una contribución finita dada por: $S_{T_1} = -2\pi \frac{\beta r_{min}^3}{\sqrt{2} k^2 \varepsilon}$. Para calcular la última contribución hacemos el cambio $z^4 - 1 = t^4$ con lo que nos queda:

$$S_{T_2} = -\varepsilon \Lambda^2 \int_0^\infty dt t^5 \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \frac{1}{\sqrt{t^2 + \sqrt{t^4+1}}} \quad (9.107)$$

para $t \rightarrow \infty$ la integral va a diverger como t^3 mientras que cerca del agujero de gusano, ($t = 0$) se comporta bien:

$$\begin{aligned}
S_{T_2}(t \simeq \infty) &\simeq \left(\frac{t^3}{3\sqrt{2}} + \frac{5}{8\sqrt{2}t} \right) \\
S_{T_2}(t \simeq 0) &\simeq -\frac{8}{15} \varepsilon \Lambda^2 \quad (9.108)
\end{aligned}$$

tenemos entonces que para $\Lambda = 0$ es decir, para las soluciones sin constante cosmológica la integral on-shell va a ser finita. Este resultado tiene sentido ya que si calculáramos la integral en el EF las divergencias estarían en $x = 0$ que es donde el electromagnetismo de Maxwell no se comporta bien, pero un examen atento a la relación entre coordenadas radiales $x^2 = \frac{1}{2}(r^2 + \sqrt{r^4 - 4r_c^4})$ muestra que nuestra geometría nunca alcanza el punto $x = 0$ por lo que la acción para un espacio-tiempo asintóticamente plano debe ser convergente. Para el caso $\varepsilon < 0$ la variable x nunca vale cero y alcanza su valor mínimo en $x_{min}^2 = r_c^2$. A diferencia de otras soluciones de tipo agujero de gusano, en este escenario la variable x no recorre todo el eje real.

¿Qué ocurre para el caso $\varepsilon > 0$? tenemos entonces las relaciones entre variables radiales:

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{x^4 - r_c^4}{x^2} \\ x^2 &= \frac{1}{2} \left(r^2 + \sqrt{r^4 + 4r_c^4} \right) \end{aligned} \quad (9.109)$$

en este caso la variable $r(x)$ alcanza el valor $r = 0$ para $x_0 = r_c$ que marca también el mínimo en la variable x . Al igual que para el caso $\varepsilon < 0$, la variable x no recorre todo el eje real y tiene un mínimo en $x = r_c$. Vamos a calcular ahora la acción “on shell” para este caso y en ausencia de constante cosmológica. La manera de proceder es similar al caso $\varepsilon < 0$. Resumiendo los ingredientes necesarios [167]:

$$\begin{aligned} \Omega_+ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r^2}{\sqrt{r^4 + 4r_c^4}} \right) \\ \Omega_- &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{r^4 + 4r_c^4}}{r^2} \right) \\ \Omega_+ \Omega_- &= \frac{r^2}{\sqrt{r^4 + 4r_c^4}} \\ \varphi^{BI} &= \frac{4\pi}{\varepsilon k^2} \left(1 - \frac{r^2}{\sqrt{r^4 + 4r_c^4}} \right) \end{aligned} \quad (9.110)$$

$$S_T = 4\pi \frac{\beta}{k^2 \varepsilon} \int dr \frac{r^2}{\sqrt{\Omega_-}} (\Omega_+ \Omega_- - \Omega_+) = 4\pi \frac{\beta}{k^2 \varepsilon} \int dr r^2 \left(\frac{\Omega_+}{\Omega_-} \Omega_-^{\frac{3}{2}} - \frac{\Omega_+}{\Omega_-} \Omega_-^{\frac{1}{2}} \right) \quad (9.111)$$

haciendo $r_0 = \sqrt{2} r_c$, $z = \frac{r}{r_0}$ y sustituyendo la integral nos queda, finalmente:

$$\begin{aligned} S_T &= 4\pi \frac{\beta}{k^2 \varepsilon} r_0^3 \int_0^\infty dz \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{3}{2}} z \sqrt{\frac{\left(z^2 + \sqrt{z^4 + 1} \right)^3}{z^4 + 1}} - \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} z^3 \sqrt{\frac{z^2 + \sqrt{z^4 + 1}}{z^4 + 1}} \right\} = \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \frac{\beta r_0^3}{k^2 \varepsilon} \end{aligned} \quad (9.112)$$

9.4 Cuestiones abiertas

En este capítulo hemos intentado extender trabajos previos en el marco de las teorías RBG que abordan temas tales como la forma de los términos de superficie asociados a la acción en

gravedad modificada [318] o el cálculo de la integral “on shell” de dicha acción, particularizada para diferentes escenarios para la gravedad GBI en presencia de electromagnetismo [50]. La forma que toma el término de superficie en presencia de la materia es una cuestión realmente abierta en el marco del planteamiento métrico-afín, así como la forma que tomarían los contratérminos necesarios para proceder a una renormalización holográfica en presencia de materia, pero al igual que en sus contrapartes en RG [337] la forma de dichos contratérminos debe estudiarse detalladamente, caso por caso. Es asimismo una cuestión abierta la extensión del cálculo de la curvatura extrínseca a cualquier sector de materia en el marco de una geometría métrico-afín. Dichas cuestiones, aquí únicamente esbozadas, quedan pendientes de un análisis mucho más detallado a llevar a cabo en futuros trabajos.

Capítulo 10

Termodinámica en GBI

10.1 Introducción

En teorías de la gravedad distintas de la RG la entropía asociada al horizonte de un agujero negro no sigue necesariamente la bien conocida fórmula del área (entropía de Bekenstein-Hawking). En esta sección vamos a estudiar la forma que toma la función entropía para GBI siguiendo la propuesta de T. Padmanabhan y otros autores [289, 224, 294], donde la primera ley de la termodinámica para un agujero negro puede ponerse en correspondencia directa con la ecuación de Einstein. Aplicaremos dicho procedimiento a la gravedad de Born-Infeld en $2 + 1$ dimensiones, extendiendo estudios ya realizados en $3+1$ dimensiones. Encontramos así una corrección a la entropía que no tiene carácter logarítmico sino inversamente proporcional al radio del horizonte. Calcularemos asimismo el valor de otras funciones termodinámicas importantes, como el calor específico a carga constante y la energía libre de Helmholtz, cantidad que juega un papel clave en la correspondencia ADS/CFT pues está directamente relacionada con la función de partición de la teoría gauge que vive en la frontera del correspondiente espacio-tiempo.

La relación existente entre las leyes de la termodinámica y las propiedades de los agujeros negros es conocida desde los trabajos de Bardeen, Carter y Hawking [46], de Bekenstein [51] y de Hawking [178]. Tomemos por ejemplo las dos funciones termodinámicas más reconocidas: temperatura y entropía: la temperatura de agujero negro se relaciona con el concepto de gravedad de superficie, en el sentido de que cuando un agujero negro alcanza el equilibrio la intensidad del campo gravitatorio es la misma en todos los puntos de la superficie del horizonte independientemente del proceso que haya seguido el agujero negro en su formación, de la misma forma que la temperatura es constante en todos los puntos de un sistema termodinámico una vez que éste ha alcanzado el equilibrio térmico. La entropía, por su parte, da cuenta del número de estados microscópicos en los que un sistema físico puede

configurarse, y en el caso de los agujeros negros va a estar íntimamente relacionada con la extensión del horizonte, esto es, con su área (una sencilla explicación de esta relación puede encontrarse en [268] donde se deduce la ley del área al relacionar radio de Schwarzschild y longitud de onda Compton de las partículas que forman el agujero negro).

La expresión matemática de la temperatura de Hawking en el caso de una métrica con simetría radial, (no necesariamente del tipo Schwarzschild) ha sido bien establecida [357] y puede también deducirse continuando analíticamente el tiempo a la signatura euclídea [268], siendo dicho procedimiento válido tanto en soluciones tipo Schwarzschild como en una teoría de la gravedad que se comporta de manera diferente en presencia de la materia, como es el caso de GBI. En lo que se refiere a la entropía, generalizaciones a otras teorías de la gravedad han dado como resultado frecuentemente correcciones de tipo logarítmico, tanto en gravedad cuántica [316, 23, 212] como en fluctuaciones del equilibrio térmico, [212, 249, 101]. En el contexto de las teorías de la gravedad en $2 + 1$ dimensiones también se han propuesto este tipo de correcciones para las soluciones de tipo BTZ, y en la misma GBI en $3 + 1$ dimensiones [180]. Otro tipo de correcciones se encuentran asimismo en teorías de la gravedad de tipo Gauss-Bonet [110], Lovelock [42], o $f(R)$ gravity [360, 235].

En primer lugar vamos a utilizar la relación existente entre la ecuación de Einstein y la primera ley de la termodinámica [289, 224, 294] y la adaptaremos al contexto de gravedad GBI en $2 + 1$ dimensiones en presencia del electromagnetismo de Maxwell formulada “à la Palatini” [49]. Ilustraremos dicha idea primero con un ejemplo bien conocido en el contexto de la RG: las soluciones en $2 + 1$ dimensiones obtenidas por Bañados, Teitelboim y Zanelli [257, 40, 41, 186], lo que nos permitirá relacionar claramente funciones termodinámicas clásicas con los elementos de la solución BTZ. Con este mapa de correspondencias en la mano, la generalización a GBI será sencilla, lo que nos permitirá dar una corrección a la forma diferencial de la entropía, y a partir de ella calcular correcciones finitas. A continuación calcularemos otras funciones termodinámicas de interés como el calor específico a carga eléctrica constante y la energía libre de Helmholtz.

Como un segundo ejemplo de la exploración de las funciones termodinámicas asociadas a la gravedad de Born-Infeld en presencia de electromagnetismo, utilizaremos el caso $(3 + 1)$ en el que las soluciones GBI se combinan con el electromagnetismo de Maxwell, y utilizaremos el “mapping” para obtener información sobre la termodinámica asociada a partir de la del sistema equivalente en el EF, (RG acoplada al electromagnetismo de Born-Infeld). En ambos ejemplos discutiremos como extender la formulación del primer principio de la termodinámica [361] a la gravedad GBI.

Dicha extensión analítica, aquí ensayada, no ha producido los resultados exactos buscados, debido a diferencias en el orden ϵ característico de la gravedad GBI. Una posible causa de

dichas diferencias puede estar en el papel que juegan las variables extensivas asociadas a la forma del primer principio (masa ADM y potencial eléctrico en el horizonte) en el marco de la RG y cuya equivalencia en el marco de una teoría RBG debe ser estudiada con mayor atención, a tenor de los resultados obtenidos aquí.

10.2 GBI + electromagnetismo de Maxwell en 2+1

10.2.1 Soluciones en el contexto de la RG

Consideremos en primer lugar la solución más sencilla posible. Un agujero negro caracterizado únicamente por su masa :

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + \frac{1}{f(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 \quad (10.1)$$

con $f(r) = -M + \frac{r^2}{l_\Lambda^2}$ y $\Lambda = -\frac{1}{l_\Lambda^2} < 0$ la constante cosmológica que caracteriza un espacio-tiempo asintóticamente AdS. La posición del horizonte se resuelve trivialmente como $r_h = l_\Lambda \sqrt{M}$ y la temperatura del horizonte viene dada por (4.63). Teniendo en cuenta además la forma que toma la entropía en un espacio en 2 + 1 dimensiones en el contexto de la RG [360, 235], las funciones temperatura de Hawking y entropía pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} T_H &= -\frac{\Lambda}{2\pi} r_h \\ S &= 4\pi r_h \end{aligned} \quad (10.2)$$

en ausencia de campos de materia que aporten presión, la masa ADM puede calcularse directamente [360, 235] a partir de la temperatura de Hawking y la expresión de la entropía mediante la ecuación:

$$M = \int T_H dS \quad (10.3)$$

es interesante indicar que la relación de Smarr $E = 2T_H S$ no se cumple en el caso de que tengamos un espacio-tiempo de dimensión $d = 3$ con constante cosmológica Λ [360, 235]. Consideremos ahora el electromagnetismo de Maxwell en 2 + 1 dimensiones, (soluciones BTZ cargadas). La acción del sistema y el elemento de línea se discuten con detalle en el anexo A. Para la acción total tenemos:

$$\begin{aligned} S_T &= \frac{1}{16\pi G_3} \left(\int d^3 r \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) - 4\pi G_3 \int d^3 r \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \\ &= S_G + S_{EM} \end{aligned} \quad (10.4)$$

con $G_3 = L_P$ la constante de gravitación en dimensión 3. Vamos a redimensionar la parte electromagnética de la acción con el fin de obtener una expresión para el potencial eléctrico en función del parámetro carga adimensional Q lo más sencilla posible, de acuerdo con lo comentado en el anexo A podemos escribir la relación:

$$-\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{\tilde{Q}^2}{r^2} = \frac{Q^2}{16\pi G_3 r^2} \quad (10.5)$$

lo que implica $S_{EM} = \frac{1}{32\pi G_3} \int d^3r \sqrt{-g} \frac{Q^2}{r^2}$. Redefiniendo ahora $F_{\mu\nu}$ de forma que se cumpla la relación $\frac{Q^2}{r^2} = -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ tendremos¹:

$$S_{EM} = -\frac{1}{64\pi G_3} \int d^3r \sqrt{-g} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (10.6)$$

Podemos calcular el tensor energía-momento $T_{\mu\nu}$ asociado a esta acción. Usando (2.17), encontramos:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{16\pi G_3} \left(F_{\mu}^{\sigma} F_{\sigma\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha}^{\beta} F_{\beta}^{\alpha} \right) \quad (10.7)$$

La expresión para el elemento de línea asociada a las ecuaciones (10.6) y (10.7) está deducida en el anexo A:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -f(r) dt^2 + \frac{1}{f(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 \\ f(r) &= -M + \frac{r^2}{L^2} - \frac{Q^2}{2} \ln \frac{r}{r_0} \end{aligned} \quad (10.8)$$

con M y Q variables adimensionales. Utilizando este elemento de línea, es sencillo comprobar que se cumple el primer principio de la termodinámica formulado como [360, 235]:

$$dM = T_H dS + \Phi dQ \quad (10.9)$$

donde Φ es el potencial eléctrico en el horizonte, definido como:

$$\Phi(r_h) = \int_{r_h}^{r_0} F^{rt} dr = -Q \ln \frac{r_h}{r_0} \quad (10.10)$$

y la entropía y la temperatura de Hawking en el horizonte vienen dadas por (10.2) y (10.3)

¹La acción introducida en la ecuación (10.6) difiere en un factor $\frac{1}{4}$ respecto de la acción del electromagnetismo de Maxwell en tres dimensiones utilizada en la referencia [49]. Esta diferencia tiene su origen en la definición del parámetro adimensional Q^2 definido en (10.5) que es cuatro veces mayor que el introducido en dicha referencia. Con esa aclaración los resultados son los mismos.

respectivamente, cumpliéndose:

$$T_H dS = dr_h \left(2 \frac{r_h}{L^2} - \frac{Q^2}{2r_h} \right) \quad (10.11)$$

Si r_h es la posición del horizonte externo, es decir la raíz mayor de la ecuación $f(r_h) = 0$ de (10.8) se tendrá la igualdad $M = \frac{r_h^2}{L^2} - \frac{Q^2}{2} \ln \frac{r_h}{r_0}$. Diferenciando tenemos:

$$dM = dr_h \left(2 \frac{r_h}{L^2} - \frac{Q^2}{2r_h} \right) - Q dQ \ln \frac{r_h}{r_0} = T_H dS + \Phi dQ \quad (10.12)$$

que nos da el primer principio de la termodinámica en el marco de las soluciones BTZ con carga. Veamos ahora su posible reformulación para su contrapartida GBI y una posible expresión para la entropía asociada.

10.2.2 Corrección de la entropía en GBI

Para la gravedad de Born-Infeld en 2 + 1 dimensiones en presencia del electromagnetismo de Maxwell utilicemos los resultados obtenidos en [49]. Los elementos de línea asociados a la métrica del espacio-tiempo $g_{\mu\nu}$ y al tensor métrico auxiliar $q_{\mu\nu}$ que nos proporcionaba la conexión física como $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} q^{\lambda\sigma} (\partial_\mu q_{\sigma\nu} + \partial_\nu q_{\sigma\mu} - \partial_\sigma q_{\mu\nu})$ pueden escribirse en las coordenadas $\{t, r, \theta\}$ como:

$$\begin{aligned} ds_q^2 &= -A(r) \Omega_+ dt^2 + \frac{1}{A(r)} \frac{\Omega_+}{\Omega_-} dr^2 + \Omega_- r^2 d\theta^2 \\ ds_g^2 &= -A(r) dt^2 + \frac{1}{A(r) \Omega_-} dr^2 + r^2 d\theta^2 \end{aligned} \quad (10.13)$$

con Ω_+ y Ω_- dadas por:

$$\begin{aligned} \Omega_+ &= \left(\lambda^2 - \varepsilon^2 \frac{Q^4}{16r^4} \right) \\ \Omega_- &= \left(\lambda + \varepsilon \frac{Q^2}{4r^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (10.14)$$

donde nuevamente hay una pequeña diferencia con las funciones descritas en [49] debido a la definición del parámetro adimensional. Considerando $\lambda = 1$ (en todas partes excepto en la definición de la constante cosmológica) y con las mismas consideraciones respecto del redimensionado de la constante asociada a la carga eléctrica, podemos escribir la función

$A(r)$ para el caso $\varepsilon < 0$ como [49]:

$$A(r) = \frac{1}{1 - \varepsilon^2 \frac{Q^4}{16r^4}} \left(-M + \frac{r^2}{L^2} - \frac{Q^2}{4} \left(\varepsilon \frac{Q^2}{8r^2} + \ln \frac{r^2 + \varepsilon \frac{Q^2}{4}}{r_0^2} \right) \right) \quad (10.15)$$

Utilizando la conexión Levi-Civita de $q_{\mu\nu}$ y la primera de las igualdades (10.13) el cálculo de la componente $R_{\theta\theta}$ del tensor de Ricci es inmediato, lo que nos permite escribir la componente $q_{\theta\theta} = g_{\theta\theta} + \varepsilon R_{\theta\theta}$ como:

$$r^2 \Omega_- = r^2 - \varepsilon \frac{r \Omega_-}{2 \Omega_+} \left(2 \Omega_- A'(r) + r A'(r) \Omega'_- + A(r) (3 \Omega'_- + r \Omega''_-) \right). \quad (10.16)$$

Lo que nos interesa de esta ecuación es su comportamiento en el entorno del horizonte: allí el último término del lado derecho no nos dará contribución ya que en el horizonte se tiene $A(r_h) = 0$. Como veremos más adelante, esto nos permitirá simplificar la ecuación diferencial que sigue la función radial $A(r)$ en las cercanías del horizonte, que es justamente donde tiene sentido hablar de funciones termodinámicas asociadas al agujero negro. Sustituyendo la forma explícita de Ω_- dada por (10.14) a ambos lados de (10.16) un cálculo directo nos lleva a:

$$-2 \frac{r_h^2}{L^2} + \frac{Q^2}{2} + \varepsilon \frac{Q^4}{16 r_h^2} = -r_h A'(r_h) \Omega_-(r_h) \quad (10.17)$$

Por otra parte, a partir de la ecuación (4.63) tenemos $A'(r) = 4\pi T_H \Omega_-^{-\frac{1}{2}}$, luego (10.17) puede reexpresarse como:

$$\left(2 \frac{r_h^2}{L^2} - \frac{Q^2}{2} - \varepsilon \frac{Q^4}{16 r_h^2} \right) \frac{dr_h}{r_h} = 4\pi T_H \sqrt{\Omega_-(r_h)} dr_h \quad (10.18)$$

Intentemos interpretar la ecuación (10.18), asumiendo que en el límite $\varepsilon = 0$ debe devolvernos al primer principio de la termodinámica en el contexto RG tal y como se ha detallado en la sección anterior (10.9). En primer lugar, esa idea nos sugiere que la entropía debe definirse como:

$$dS_{GBI} = 4\pi \sqrt{\Omega_-(r_h)} dr_h \quad (10.19)$$

expresión que recupera la definición habitual de entropía en 2 + 1 dimensiones en el límite $\Omega_- = 1$. Una integración inmediata nos lleva a la corrección de la función entropía asociada a la gravedad de Born-Infeld en 2 + 1 dimensiones:

$$S = 4\pi \int dr_h \left(\lambda + \varepsilon \frac{Q^2}{4 r_h^2} \right) = 4\pi r_h \left(\frac{\Omega_+}{\sqrt{\Omega_-}} \right)_{r=r_h} \quad (10.20)$$

10.2.3 Potencial electrostático y primera ley de la termodinámica

La interpretación de (10.18) como una expresión del primer principio de la termodinámica presenta dificultades cuando intentamos exportarla a la gravedad GBI: de acuerdo con (10.9), (10.18) y (10.19) esperamos encontrar la igualdad:

$$dM = \left(2 \frac{r_h}{L^2} - \frac{Q^2}{2r_h}\right) dr_h + \Phi dQ \quad (10.21)$$

Calculemos el potencial eléctrico en el horizonte: de la ecuación de Maxwell (A.23) aplicada a la componente F^{tr} tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_r \left(\frac{r}{\sqrt{\Omega_-}} F^{tr} \right) \\ F^{tr} &= \frac{Q}{r} \sqrt{\Omega_-} \end{aligned} \quad (10.22)$$

y usando de nuevo (10.10):

$$\begin{aligned} \Phi(r_h) &= \int_{r_h}^{r_0} F^{tr} dr = \int_{r_h}^{r_0} \left(\lambda + \varepsilon \frac{Q^2}{4r^2} \right) \frac{Q}{r} dr \\ &= \varepsilon \frac{Q^3}{8r_h^2} - \lambda Q \ln \frac{r_h}{r_0}. \end{aligned} \quad (10.23)$$

Consideremos ahora la relación de M con la posición del horizonte externo r_h . Haciendo $A(r_h) = 0$ en (10.15) tenemos:

$$M = \frac{r_h^2}{L^2} - \frac{Q^2}{4} \left(\varepsilon \frac{Q^2}{8r_h^2} + \ln \frac{r_h^2 + \varepsilon \frac{Q^2}{4}}{r_0^2} \right) \quad (10.24)$$

a partir de la cual es inmediato:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial r_h} &= 2 \frac{r_h}{L^2} + \varepsilon \frac{3Q^4}{16r_h^3} - \frac{Q^2}{2r_h} \\ \frac{\partial M}{\partial Q} &= -\varepsilon \frac{3Q^3}{8r_h^2} - Q \ln \frac{r_h}{r_0} \end{aligned} \quad (10.25)$$

ecuación que junto con (10.21) concluye nuestro análisis de la primera ley de la termodinámica en nuestro contexto GBI (2 + 1). Comparando las ecuaciones (10.25) con los resultados (10.19) y (10.23) no encontramos una correspondencia a primer orden en ε con el primer principio de la termodinámica expresado como (10.9). Es necesario un análisis

más detallado, tanto en el cálculo, como en el papel que juegan las variables extensivas (masa ADM y potencial en el horizonte), ya que su definición al caso GBI en términos de su contrapartida en RG puede no ser la correcta y presentar alguna anomalía. Todo esto debe ser analizado en posteriores trabajos si queremos obtener una expresión analítica del primer principio de la termodinámica válida para la gravedad GBI.

10.2.4 Calor específico a carga eléctrica constante

Definimos el calor específico a carga eléctrica constante, C_q como:

$$C_Q = \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_Q = \frac{\left(\frac{\partial M}{\partial r_h} \right)_Q}{\left(\frac{\partial T}{\partial r_h} \right)_Q} \quad (10.26)$$

que es de cálculo inmediato a partir de (10.18) y (10.21):

$$C_Q = 2\pi L^2 \frac{\left(2 \frac{r_h}{L^2} - \frac{Q^2}{2r_h} \right) (\varepsilon Q^2 + 4\lambda r^2)^2}{L^2 (4\lambda Q^2 r^2 - \varepsilon Q^4) + 4r^2 (3\varepsilon Q^2 + 4\lambda r^2)} \quad (10.27)$$

A la vista de la anterior expresión podemos interrogarnos acerca de la posible existencia de ceros en el denominador, lo que llevaría a anomalías en el calor específico no presentes en el escenario RG, sin embargo, una análisis de la estructura en el denominador, considerando $\lambda = 1$ nos lleva a que los posibles valores de r_h susceptibles de anular el denominador cumplen las relaciones:

$$r_h^2 = \frac{1}{8} \left(-L^2 Q^2 - 3Q^2 \varepsilon \pm \sqrt{L^4 Q^4 + 4L^2 Q^4 \varepsilon + 9Q^4 \varepsilon^2} \right) \quad (10.28)$$

Para el caso $\varepsilon = 0$ (límite RG) no hay valores posibles que nos den ceros en el denominador: las soluciones para r_h son cero (ausencia de horizontes) o valores imaginarios. Para el caso $\varepsilon \neq 0$ si prescindimos de los términos en ε^2 y desarrollamos a primer orden la raíz, la ecuación puede resolverse analíticamente encontrando restricciones para el valor del parámetro ε característico de la gravedad GBI dadas por $\varepsilon = \{0, -\frac{2L^2}{5}\}$. El primer valor, obviamente, nos devuelve al caso RG mientras que el segundo caso no es esperable, habida cuenta de que ε debe ser un valor pequeño, mientras que el parámetro L (relacionado inversamente con la raíz cuadrada de la constante cosmológica) debe ser mucho más grande. Por lo que no es de esperar la existencia de ceros en la función C_q .

10.3 GBI + (3+1) electromagnetismo de Maxwell

10.3.1 Correspondencia entre “frames”

Consideremos ahora la solución para RG acoplada al electromagnetismo de Born-Infeld [119] y estudiemos su contrapartida en GBI obtenida mediante “mapping” [10]. En el contexto RG la solución para el problema electrostático con simetría esférica para cualquier electromagnetismo no lineal viene resuelta por la expresión general [10]:

$$f(x) = 1 - \frac{2M}{x} - \frac{k^2}{x} \int_x^\infty X^2 T_0^0(X, Q) dX \quad (10.29)$$

donde T_ν^μ es el tensor energía-momento asociado a la materia y Q es la carga eléctrica. Particularicemos esta expresión para el electromagnetismo de Born-Infeld [68] descrito por [119, 78, 334]:

$$T_0^0 = -\frac{\beta}{4\pi x^2} \left(\sqrt{\beta^2 x^4 + Q^2} - \beta x^2 \right) \quad (10.30)$$

sustituyendo (10.30) en (10.29) el cálculo explícito de $f(x)$ no es excesivamente complicado. Las integrales implicadas son inmediatas o se realizan por partes y con ayuda de Mathematica es sencillo obtener:

$$\begin{aligned} f_\Lambda(x) = & \left(1 - 2\frac{M}{x} - \frac{\Lambda}{3}x^2 \right) + \\ & + \frac{k^2 \beta^2}{12\pi} \left(x^2 - \sqrt{x^4 + \frac{Q^2}{\beta^2}} + {}_2F_1\left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}, -\frac{Q^2}{\beta^2 x^4} \right\} \right) \end{aligned} \quad (10.31)$$

donde hemos añadido un término que da cuenta de la contribución de la constante cosmológica. Para $\beta \rightarrow \infty$ un desarrollo en serie nos permite recuperar la función característica de la solución Reissner-Nordström en presencia de constante cosmológica:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} f_\Lambda(x) = \left(1 - 2\frac{M}{x} - \frac{\Lambda}{3}x^2 \right) + k^2 \frac{Q^2}{8\pi x^2} + O\left[\frac{1}{\beta}\right] \quad (10.32)$$

consideremos entonces la acción total y el tensor energía-momento asociado a la anterior solución en el EF:

$$\begin{aligned} S_T &= \frac{1}{2k^2} \int d^4x \sqrt{-q} (R - 2\Lambda) + \frac{1}{8\pi} \int d^4x \sqrt{-q} \varphi[Z] \\ T_\nu^\mu &= \frac{1}{8\pi} \text{Diag}\{(\varphi - 2Z\varphi_Z) - \Delta, (\varphi - 2Z\varphi_Z) - \Delta, \varphi - \Delta, \varphi - \Delta\} \end{aligned} \quad (10.33)$$

con $\Delta \equiv \frac{\Lambda}{L_P^2}$, $\varphi[Z] = 2\beta^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{Z}{\beta^2}}\right)$ y $\varphi_Z \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial Z}$. Es asimismo inmediato comprobar que para $\beta \rightarrow \infty$ se tiene $\varphi[Z] = Z = -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ y el electromagnetismo de Maxwell es recuperado. Para la forma del tensor energía-momento introducida en (10.33) hemos tenido en cuenta por una parte la contribución de la constante cosmológica (de cálculo directo) y por otra la contribución del electromagnetismo de Born-Infeld. Esta última contribución puede calcularse mediante el procedimiento explicado en el anexo (A), sustituyendo Z por $\varphi[Z]$ y utilizando la regla de la cadena. Si escribimos el tensor energía-momento en términos de un fluido anisótropo, de acuerdo con la relación ya conocida, $T_\nu^\mu = \text{Diag}\{-\rho^{GR}, P_R^{GR}, P_T^{GR}, P_T^{GR}\}$ tenemos, tras un poco de álgebra:

$$\begin{aligned}\rho^{GR} &= \frac{1}{k^2} \left(\Lambda + 2 \frac{\beta}{x^2} L_P^2 (\sqrt{Q^2 + \beta^2 x^4} - \beta x^2) \right) = -P_R^{GR} \\ P_T^{GR} &= \frac{1}{k^2} \left(2\beta^2 \left(1 - \frac{\beta x^2}{\sqrt{Q^2 + \beta^2 x^4}} \right) L_P^2 - \Lambda \right)\end{aligned}\quad (10.34)$$

y es asimismo directo el comprobar que en el límite $\beta \rightarrow \infty$ recuperamos el escenario Maxwell con $\rho^{GR} = -P_R^{GR} = P_T^{GR} = \frac{Q^2}{x^4}$. Una vez determinada la densidad y la presión en el EF, el cálculo de la métrica $g_{\mu\nu}$ en el lado RBG es inmediato usando (5.46) y el elemento de línea $q_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}g_{\mu\nu} &= \left[1 - \varepsilon k^2 \frac{\rho^{GR} - P_R^{GR}}{2} \right] q_{\mu\nu} - \\ &- \varepsilon k^2 \left[(\rho^{GR} + P_T^{GR}) v_\mu v_\nu + (P_R^{GR} - P_T^{GR}) \xi_\mu \xi_\nu \right]\end{aligned}\quad (10.35)$$

con $q_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -f_\Lambda(x) dt^2 + \frac{1}{f_\Lambda(x)} dx^2 + x^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$, $v_t = \sqrt{f_\Lambda(x)}$ y $\xi_x = \frac{1}{\sqrt{f_\Lambda(x)}}$

sustituyendo tenemos:

$$g_{tt}(x) = - \left[\zeta [Q, \beta, x] + 2\beta \varepsilon \frac{Q^2}{\sqrt{Q^2 + \beta^2 x^4}} \frac{L_P^2}{x^2} \right] f_\Lambda(x) \quad (10.36)$$

$$g_{xx}(x) = - \left[\zeta [Q, \beta, x] + 2\beta \varepsilon \frac{Q^2}{\sqrt{Q^2 + \beta^2 x^4}} \frac{L_P^2}{x^2} \right] \frac{1}{f_\Lambda(x)} \quad (10.37)$$

$$g_{\theta\theta}(x) = \zeta [Q, \beta, x] x^2 \quad (10.38)$$

$$g_{\varphi\varphi}(x) = \zeta [Q, \beta, x] x^2 \sin^2 \theta \quad (10.39)$$

con $\zeta [Q, \beta, x] = 1 - \varepsilon \Lambda - 2\beta \varepsilon \frac{L_P^2}{x^2} \left(\sqrt{Q^2 + \beta^2 x^4} - \beta x^2 \right)$. Utilizando estas expresiones vamos a desarrollar la transformación explícita entre “frames”: nuestro objetivo es comprobar como el “mapping” nos lleva de un electromagnetismo de Born-Infeld en GR a un electro-

magnetismo de Maxwell asociado a la gravedad de Born-Infeld. Teniendo en cuenta que la termodinámica del lado EF ha sido ya estudiada en diversas referencias [119, 78, 334], dicho trabajo exportado vía “mapping” puede aportarnos información sobre la termodinámica GBI correspondiente. Empecemos reescribiendo las anteriores expresiones para encontrar la forma explícita de la matriz de deformación, esto es la forma de las funciones Ω_- y Ω_+ y comprobar que nos dan los resultados que caracterizaban las soluciones de la gravedad GBI acoplada al electromagnetismo de Maxwell [50]. Comencemos identificando la función $g_{\theta\theta}(x)$ con la variable radial $r^2(x)$. Definiendo $\eta \equiv 1 - 2\varepsilon\Lambda$ y usando el resultado $\beta^2 = -\frac{2\pi}{k^2\varepsilon}$ [167] la relación entre variables radiales puede escribirse como:

$$g_{\theta\theta} = r^2(x) = \frac{1}{2} \left(\eta + \sqrt{1 + 4 \frac{rc^4}{x^4}} \right) x^2 \quad (10.40)$$

con $\frac{Q^2}{\beta^2} = 4r_c^4 = -2\varepsilon r_q^2 = -4\varepsilon Q^2 L_p^2$ y el parámetro ε (negativo) que caracteriza la gravedad de Born-Infeld. Invirtiendo esta ecuación encontramos:

$$x^2(r) = 2 \frac{\eta r^2}{\eta^2 - 1} \pm \frac{2}{\eta^2 - 1} \sqrt{r^4 + r_c^4 (\eta^2 - 1)} \quad (10.41)$$

analicemos el signo a elegir: para $r_c^4 = -\varepsilon Q^2 L_p^2 = 0$ y $\eta = 1$ hemos de recuperar $r^2 = x^2$ con lo que es fácil comprobar que las soluciones físicas a elegir corresponden al signo menos. Por otra parte, hemos de darnos cuenta de que $\eta^2 - 1$ es una cantidad muy pequeña y en todo caso negativa (al serlo ε y Λ) por tanto, incluso para valores de r cercanos a r_c , el segundo sumando en la raíz va a ser una cantidad muy pequeña comparada con la unidad. Podemos entonces desarrollar en serie la raíz y quedarnos a primer orden en $(\eta^2 - 1)$:

$$x^2 \simeq r^2 \left(2 \frac{(\eta - 1)}{\eta^2 - 1} - \frac{r_c^4}{r^4} \right) \quad (10.42)$$

pero $2 \frac{\eta - 1}{\eta^2 - 1} = \frac{1}{1 - \varepsilon\Lambda} \simeq (1 + \varepsilon\Lambda) > 1$ para ε y $\Lambda < 0$ por lo que su comportamiento coincide con el del parámetro λ que caracteriza la presencia o ausencia de constante cosmológica en GBI [58]. Por otra parte, en el electromagnetismo de Maxwell se tiene $X = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{Q^2}{r^4}$ y la función Ω_- que relaciona las variables radiales mediante $x^2 = \Omega_- r^2$ se escribe como [50]:

$$\Omega_- = \left(\lambda + \frac{k^2\varepsilon}{8\pi} X \right) = \left(\lambda - \frac{r_c^4}{r^4} \right) \quad (10.43)$$

lo que completa nuestra identificación con la forma de Ω_- que se encuentra al deducir directamente la soluciones desde el lado RBG. Para encontrar Ω_+ usamos las ecuaciones de

g_{tt} . Es inmediato comprobar las igualdades:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Omega_-} &= \zeta [Q, \beta, x] \\ 2\beta \varepsilon \frac{Q^2}{\sqrt{Q^2 + \beta^2 x^4}} \frac{L_P^2}{x^2} &= -2 \frac{r_c^4}{x^4 \sqrt{1 + 4 \frac{r_c^4}{x^4}}} = -2 \frac{r_c^4}{r^4 \Omega_- (2 - \eta \Omega_-)} \end{aligned} \quad (10.44)$$

sustituyendo estos resultados en (10.36) encontramos:

$$g_{tt} = \frac{1}{\Omega_-} \left(1 - 2 \frac{r_c^4}{r^4 (2 - \eta \Omega_-)} \right) q_{tt} \quad (10.45)$$

y desarrollando la expresión entre paréntesis a primer orden en ε obtenemos $2 - \eta \Omega_- \simeq \lambda + \frac{r_c^4}{r^4} + O[\varepsilon^2]$ lo que implica :

$$\begin{aligned} \frac{q_{tt}}{g_{tt}} &= \Omega_- \left(1 - 2 \frac{r_c^4}{r^4} \left(\lambda + \frac{r_c^4}{r^4} \right)^{-1} \right)^{-1} \simeq \Omega_- \left(1 + 2\lambda \frac{r_c^4}{r^4} \right) = \\ &= \left(\lambda - \frac{r_c^4}{r^4} \right) \left(1 + 2\lambda \frac{r_c^4}{r^4} \right) \simeq \\ &\simeq \lambda - \frac{r_c^4}{r^4} + 2 \frac{r_c^4}{r^4} (1 + \varepsilon \Lambda)^2 \simeq \left(\lambda + \frac{r_c^4}{r^4} \right) \end{aligned} \quad (10.46)$$

que nos devuelve a la función $\Omega_+ = (\lambda - \frac{k^2 \varepsilon}{8\pi} X) = (\lambda + \frac{r_c^4}{r^4})$ [50]. Hemos encontrado entonces que con la elección $\beta^2 = -\frac{2\pi}{k^2 \varepsilon}$ el electromagnetismo de Born-Infeld en el marco de la Relatividad General [10] se corresponde con la gravedad de Born-Infeld acoplada al electromagnetismo de Maxwell [50]. Es interesante observar asimismo que en el límite $\beta \rightarrow \infty$ en el EF (es decir, cuando tenemos allí la Relatividad General acoplada al electromagnetismo de Maxwell) las soluciones en el lado RBG son las propias de la gravedad y el electromagnetismo de Born-Infeld [167]. Para comprobarlo desarrollemos en serie $g_{\theta\theta}$ para $\beta \rightarrow \infty$ desde (10.40) y considerando las soluciones asintóticamente planas, ($\eta = 1$): es inmediato encontrar $r^2(x) \simeq x^2(1 + \frac{r_c^4}{x^4}) + O[\frac{1}{\beta}]^2$, relación que puede invertirse para darnos:

$$x^2 = \frac{1}{2} (r^2 \pm \sqrt{r^4 - 4r_c^4}) \quad (10.47)$$

y eligiendo el signo menos encontramos la correspondiente ecuación en [167]. Es fácil comprobar asimismo que ρ^{BI} y P_T^{BI} van a dar las densidades de energía y presión tangencial que corresponden al electromagnetismo de Maxwell, es decir que para el lado RBG se

cumple: $\rho^{BI} = P_T^{BI} = \frac{X}{8\pi} = \frac{Q^2}{8\pi r^4}$. Para ello usamos las fórmulas que nos relacionan las densidades y las presiones entre ambos “frames”. Para las soluciones asintóticamente planas ($\lambda = 1, \Lambda = 0$), teníamos la relación [11]:

$$\rho^{BI} = \frac{\rho^{GR}}{1 - k^2 \epsilon \rho^{GR}} \quad (10.48)$$

de (10.34) tenemos :

$$\rho^{BI} = \frac{\beta}{4\pi r^2(x)} \left(\sqrt{Q^2 + x^4 \beta^2} - x^2 \beta \right) \quad (10.49)$$

podemos simplificar el numerador usando la relación entre coordenadas radiales:

$$\begin{aligned} x^2 &= \Omega_- r^2(x) = \left(1 - \frac{r_c^4}{r^4}\right) r^2 = \left(1 + \frac{k^2 \epsilon Q^2}{8\pi r^4}\right) r^2 \\ \frac{Q^2}{r^2} &= \frac{8\pi}{k^2 \epsilon} (x^2 - r^2) \end{aligned} \quad (10.50)$$

lo que implica, usando de nuevo (10.40):

$$\beta \left(\sqrt{Q^2 + x^4 \beta^2} - x^2 \beta \right) = \frac{Q^2}{2r^2} \quad (10.51)$$

y nos lleva directamente a:

$$\rho^{BI} = \frac{Q^2}{8\pi r^4} \quad (10.52)$$

resultado coherente con el electromagnetismo de Maxwell. Hagamos la misma comparación para P_T^{BI} . Para ello partimos de nuevo de las relaciones deducidas en [11]:

$$P_T^{BI} = \frac{P_T^{GR}}{1 + k^2 \epsilon P_T^{GR}} \quad (10.53)$$

y hacemos el mismo tipo de juegos de manos. Utilizando la forma de la presión tangencial en el Einstein Frame dada por (10.34), (10.53) pasa a :

$$P_T^{BI} = \frac{\beta}{4\pi x^2} \frac{(\sqrt{Q^2 + x^4 \beta^2} - \beta x^2)}{\sqrt{1 + \frac{Q^2}{x^4 \beta^2}} \left(1 + k^2 \epsilon \frac{\beta}{4\pi x^2} \frac{(\sqrt{Q^2 + x^4 \beta^2} - \beta x^2)}{\sqrt{1 + \frac{Q^2}{x^4 \beta^2}}}\right)} \quad (10.54)$$

de (10.50) y (10.51) tenemos:

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + \frac{Q^2}{x^4 \beta^2}} &= \sqrt{1 + 4 \frac{r_c^4}{x^4}} = 2 \frac{r^2(x)}{x^2} - 1 \\ r^2(x) - x^2 &= -k^2 \varepsilon \frac{\beta}{4\pi} \left(\sqrt{Q^2 + x^4 \beta^2} - \beta x^2 \right)\end{aligned}\quad (10.55)$$

y usando de nuevo $\beta \left(\sqrt{Q^2 + x^4 \beta^2} - x^2 \beta \right) = \frac{Q^2}{2r^2}$ es inmediato reescribir (10.53) como:

$$P_T^{BI} = \frac{Q^2}{8\pi r^4} = \rho^{BI} \quad (10.56)$$

resultado que concluye nuestro desarrollo explícito de la equivalencia entre “frames”. Veamos a continuación dichas equivalencias cuando estudiamos el comportamiento de las soluciones en el infinito y cerca de la garganta del agujero de gusano asociado.

10.3.2 Comportamiento asintótico y central

Consideremos la deducción de la solución para $d = 4$ obtenida via resolución directa de las ecuaciones del movimiento. Esto es, sin introducir explícitamente el concepto de “mapping”. Para el electromagnetismo de Maxwell en el “background” de las soluciones GBI el elemento de línea puede escribirse como [50]:

$$ds^2 = -\frac{A(z)}{\Omega_+} dt^2 + \frac{dx^2}{A(z) \Omega_+} + r^2(x) d\Omega^2 \quad (10.57)$$

con $A(z) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \frac{z}{r_{min}} \frac{M[1+\delta_1 G(z)]}{\sqrt{z^4-1}}$ $z = \frac{r}{r_{min}} = \frac{r}{r_c} \lambda^{\frac{1}{4}}$ y $\delta_1 = -r_c^3 \frac{\lambda^{-\frac{3}{4}}}{2\varepsilon M_0}$. La ecuación diferencial que permite calcular $G(z)$ es:

$$\frac{dG(z)}{dz} = \frac{\sqrt{\lambda}}{z^4} \frac{\left(\lambda + z^4 - z^8(\lambda - 1) \right)}{\sqrt{z^4 - 1}} \quad (10.58)$$

esta integral se ha resuelto en todo el recorrido de la variable z usando series de potencias, (ver por ejemplo [282]) pero el cambio de variable $t^2 = z^4 - 1$ permite asimismo una integración inmediata en todo el rango de la variable radial :

$$G(z) = \frac{\sqrt{\lambda}}{6} \sqrt{z^4 - 1} \left({}_4F_1 \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, (1 - z^4) \right\} - 2(\lambda - 1)z + \frac{2}{z^3} \right) + \Xi \quad (10.59)$$

siendo Ξ una constante de integración. Podemos desarrollar la función hipergeométrica en (10.59) a grandes distancias del origen de coordenadas radiales:

$${}_2F_1\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, (1-z^4)\right\} \simeq \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{4})}{2z^2 \Gamma(\frac{3}{4})} - \frac{2}{z^3} + O\left[\frac{1}{z}\right]^4 \quad (10.60)$$

y por tanto:

$$G(z) \simeq \frac{\sqrt{\lambda}}{6} \left[2\sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})} - \frac{8}{z} - \frac{2}{z^3} \left((\lambda - 1)z^4 - 1 \right) \right] + \Xi. \quad (10.61)$$

Cuando $\lambda = 1$, $G(z)$ debe recuperar la solución asintóticamente plana en el infinito que se obtiene en el marco de la Relatividad General (esto es, la solución Reissner-Nordström convencional). Por tanto, en el infinito la función $G(z)$ debe anularse, lo que nos permite determinar $\Xi = -1,74804$. Considerando que a grandes distancias $\sqrt{\Omega_-} \simeq \sqrt{\lambda}$, la función $A(z)$ puede escribirse en dicho límite como:

$$A(z) \simeq 1 - \frac{2M}{r\sqrt{\lambda}} \left[1 - \delta_1 \left(-\frac{1}{z} - \frac{3}{z^3}(\lambda - 1) \right) \right] \quad (10.62)$$

considerando $\sqrt{\lambda} \simeq 1$ y usando las definiciones de los parámetros r_c y δ_1 es inmediato encontrar las igualdades $2\delta_1 \frac{M_0}{r} = k^2 \frac{Q^2}{8\pi r^2}$ y $2\delta_1 \frac{M_0}{r} \frac{z^3}{3}(\lambda - 1) = -\frac{\Lambda}{3r^2}$ lo que nos permite reescribir (10.62) en términos de la solución Reissner-Nordström en presencia de constante cosmológica:

$$A(r) \simeq 1 - 2\frac{M}{r} + k^2 \frac{Q^2}{8\pi r^2} - \frac{\Lambda}{3r^2}. \quad (10.63)$$

Discutamos ahora el límite $z \rightarrow 1$ esto es, cerca de la garganta del agujero de gusano, tanto en la solución obtenida directamente como en la solución obtenida vía “mapping”. La condición $\frac{x^2}{r^2} \geq 0$ determina para el caso $\varepsilon < 0$ un valor mínimo en la variable radial $r(x)$ dado por $r_{min} = r_c \lambda^{-\frac{1}{4}}$. La posición de la garganta se corresponde entonces con el valor $x = 0$. Veamos el desarrollo de la función $f_\Lambda(x)$ introducida en (10.31) (esto es, en la forma de la solución obtenida via “mapping” en la sección anterior) en un entorno lo suficientemente cercano del origen. Usando $\frac{Q^2}{\beta^2} = 4r_c^4$, $\frac{k^2\beta^2}{12\pi} = -\frac{1}{6\varepsilon}$ y desarrollando en serie la función hipergeométrica implicada, podemos reescribir la función $f_\Lambda(x)$ cerca de $x = 0$ como:

$$\begin{aligned} f_\Lambda(x) &\simeq 1 - 2\frac{M}{x} - \frac{1}{6\varepsilon} \left(-2r_c^2 + 8\frac{r_c^4}{x^2} {}_2F_1\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}, -\frac{4r_c^4}{x^4}\right\} \right) \simeq \\ &\simeq 1 - 2\frac{M}{x} + \frac{r_c^2}{3\varepsilon} - \frac{4}{3} \frac{r_c^4}{\varepsilon} \left(\frac{1}{x} \frac{\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{5}{4})}{\sqrt{2\pi}r_c} - \frac{2}{r_c^2} \frac{\Gamma(\frac{5}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4})} \right). \end{aligned} \quad (10.64)$$

De (10.64) vemos que existen combinaciones de los parámetros ε , r_c y M para los cuales la función no se anula en $x = 0$ para ello debe cumplirse la condición:

$$0 = -2M - \frac{4}{3} \frac{r_c^3}{\varepsilon} \alpha \quad (10.65)$$

es decir $\frac{r_c^3}{3\varepsilon} = -\alpha M$ con $\alpha = \frac{\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{5}{4})}{\sqrt{2\pi}}$. Estas soluciones en las que la función característica de la métrica tiene un comportamiento suave cerca del origen de coordenadas (que recordemos, corresponde a la posición r_{min} de la garganta del agujero de gusano) no son exclusivas de la gravedad GBI ni de la formulación “à la Palatini” ya que dicho comportamiento viene determinado por la propia estructura de la solución semilla en el contexto de la RG [119]. En el contexto de una solución GBI formulada “à la Palatini” esta propiedad heredada nos pone sobre la pista de que ciertas elecciones de los parámetros de las soluciones nos van a dar un comportamiento suave de la métrica y los invariantes de curvatura en la garganta del agujero de gusano [50]. Efectivamente: veamos el comportamiento analizado desde la solución directa en el lado RBG. De (10.57) y (10.59):

$$\begin{aligned} A(z) = & 1 - 2 \frac{Mz}{r_{min} \sqrt{z^4 - 1} \sqrt{\lambda}} + \\ & + \frac{r_{min}^2}{\varepsilon \sqrt{\lambda}} \frac{z}{\sqrt{z^4 - 1}} \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{6} \sqrt{z^4 - 1} \left[{}_2F_1 \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, (1 - z^4) \right\} - \right. \right. \\ & \left. \left. - 2(\lambda - 1)z + \frac{2}{z^3} \right] + \Xi \right) \end{aligned} \quad (10.66)$$

cerca de $z = 1$ usando $\sqrt{z^4 - 1} \simeq 2\sqrt{(z-1)}$ podemos reescribir $A(z)$ como:

$$\begin{aligned} A(z) \simeq & 1 - \frac{M}{\sqrt{\lambda} r_{min} \sqrt{z-1}} + \\ & + \frac{r_{min}^2}{\varepsilon} \left(\frac{2}{3} {}_2F_1 \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, (1 - z^4) \right\} - \right. \\ & \left. - 2(\lambda - 1) + \frac{1}{3} + \frac{\Xi}{2\sqrt{\lambda} \sqrt{z-1}} \right) \end{aligned} \quad (10.67)$$

pero ${}_2F_1 \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, (1 - z^4) \right\}$ se acerca a la unidad en dicho límite, lo que nos da el resultado final cerca de la garganta del agujero del gusano:

$$A(z) \simeq 1 - \frac{M}{\sqrt{\lambda} r_{min} \sqrt{z-1}} + \frac{r_{min}^2}{\varepsilon} \left(1 - 2(\lambda - 1) \frac{\Xi}{2\sqrt{\lambda} \sqrt{z-1}} \right) \quad (10.68)$$

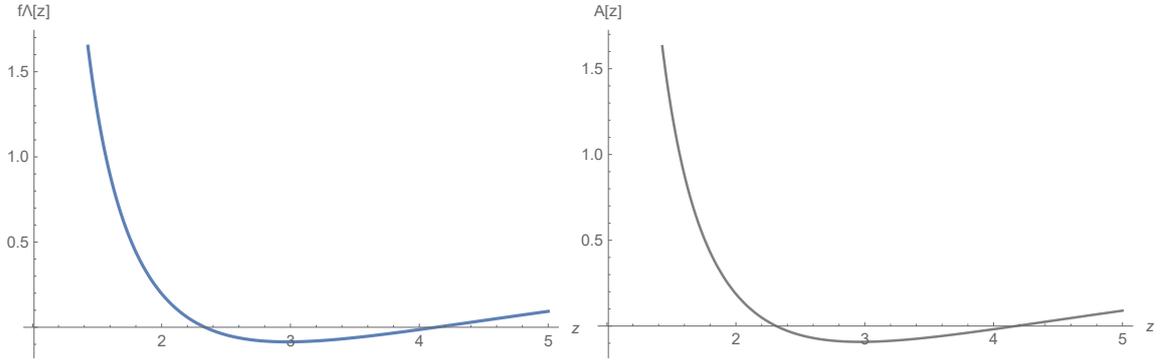


Fig. 10.1 Las funciones $f_\Lambda(z)$ y $A(z)$ para $M = Q = \lambda = 1, \varepsilon = -0.01, r_c = r_m = 0.31$

y comprobamos que para $\varepsilon < 0$ y $\lambda \simeq 1$ volvemos a tener configuraciones posibles que evitan la divergencia en $z \simeq 1$.

Acabemos esta sección con un ejercicio numérico que muestra la igualdad de las funciones características obtenidas, bien desde la correspondencia entre “frames” (10.31), bien trabajando directamente en el lado RBG (10.66). La complejidad de ambas estructuras, dificulta el encontrar dicha igualdad de forma analítica, pero una vez realizado el cambio de variables dado por (10.50) y dando valores a los parámetros implicados la representación gráfica correspondiente ilustra bien dicha igualdad.

10.3.3 Termodinámica asociada

Consideremos la temperatura de Hawking definida de la forma habitual (4.63) y apliquémosla a nuestra solución obtenida en el lado RBG de nuevo via “mapping” descrita por el elemento de línea: $ds^2 = -\frac{f_\Lambda(x)}{\Omega_+} dt^2 + \frac{dx^2}{f_\Lambda(x)\Omega_+} + r^2(x) d\Omega^2$. Un cálculo directo nos lleva a:

$$T_H = \frac{\sqrt{\Omega_-}}{4\pi} \frac{1}{\Omega_+} \frac{df_\Lambda(r(x))}{dr}. \quad (10.69)$$

si ahora usamos la relación entre coordenadas radiales $x^2 = r^2\Omega_-$ y la forma explícita de la función Ω_- (10.43) es inmediato encontrar $\frac{dx}{dr} = \frac{\Omega_+}{\sqrt{\Omega_-}}$ con lo cual (10.69) puede reexpresarse en la coordenada radial x como:

$$T_H = \frac{1}{4\pi} \frac{\sqrt{\Omega_-}}{\Omega_+} \frac{df_\Lambda(x)}{dx} \frac{\Omega_+}{\sqrt{\Omega_-}} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{df_\Lambda(x)}{dx} \right)_{x=x_h} \quad (10.70)$$

por tanto, la temperatura del horizonte de nuestra teoría RBG + Maxwell coincide con la temperatura del horizonte de la teoría GR + (Born-Infeld) lo que nos permite asimismo

explotar los resultados analíticos de la bibliografía previa [119]. Consideremos entonces la forma de la función $f_\Lambda(x)$ en el EF (10.31) y escribámosla en función de variables características del RF mediante las sustituciones habituales: $\beta^2 = -\frac{2\pi\epsilon}{k^2}$, $\frac{Q^2}{\beta^2} = 4r_c^4$ y despejemos M en función de la posición del horizonte, x_h :

$$M(x_h) = \frac{1}{12x_h\epsilon} \left(-x_h^4 + x_h^4 \sqrt{1 + 4\frac{r_c^4}{x_h^4}} + 6\epsilon x_h^2 - 2\epsilon\Lambda x_h^4 - 8r_c^4 {}_2F_1\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}, -4\frac{r_c^4}{x_h^4}\right\} \right) \quad (10.71)$$

desde (10.31) podemos asimismo calcular la derivada de la función $f_\Lambda(x)$:

$$\frac{df_A(x)}{dx} = \frac{x}{3\epsilon} \sqrt{1 + 4\frac{r_c^4}{x^4}} - \frac{2}{3}x\Lambda + \frac{1}{3x^3\epsilon} \left(-x^4 + 6Mx\epsilon + 4r_c^4 {}_2F_1\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}, -4\frac{r_c^4}{x^4}\right\} \right) \quad (10.72)$$

sustituyendo (10.71) y (10.72) en (10.70) encontramos la forma explícita la temperatura de Hawking asociada a la solución:

$$T_H(x_h) = \frac{2\epsilon + x_h^2 \left(\sqrt{1 + 4\frac{r_c^4}{x_h^4}} - (1 + 2\epsilon\Lambda) \right)}{8\pi\epsilon x_h} \quad (10.73)$$

deshaciendo los cambios $\beta^2 = -\frac{2\pi\epsilon}{k^2}$, $\frac{Q^2}{\beta^2} = 4r_c^4$ recuperamos los resultados que se pueden encontrar en las referencias del electromagnetismo de Born-Infeld en el EF [119].

En lo que se refiere a la entropía, comencemos asimismo trabajando en el EF: utilizando las expresiones anteriores para la masa en función de la posición del horizonte y la temperatura de Hawking, podemos calcular la entropía desde la relación:

$$S = \int \frac{1}{T_h} \frac{\partial M(x_h)}{\partial x_h} dx_h \quad (10.74)$$

utilizando (10.71) y (10.73) la integración es inmediata y nos lleva a la bien conocida ley del área: $S(x_h) = \pi x_h^2$, pero de acuerdo con la relación entre coordenadas radiales se tiene asimismo $x_h^2 = r_h^2 \sqrt{\Omega_-}$, resultado que nos lleva a sugerir que la entropía en el RBG frame debe venir dada por la función:

$$S = \pi r_h^2 \sqrt{\Omega_-} \quad (10.75)$$

consideremos ahora el cálculo del potencial eléctrico en el horizonte (10.10). Para la solución del lado RBG, reescribiendo (10.68) en las coordenadas $\{t, r, \theta, \varphi\}$ propias de dicho marco de referencia, es inmediato encontrar:

$$ds^2 = -\frac{1}{\Omega_+} f_\Lambda(x) dt^2 + dr^2 \frac{1}{f_\Lambda(x)} \frac{\Omega_+}{\Omega_-} + r^2(x) d\Omega^2 \quad (10.76)$$

particularizando para $v = t$ la ecuación del campo electromagnético (A.23) es inmediato encontrar $F^{tr} = \frac{Q}{r^2} \sqrt{\Omega_-}$. Una vez determinado F^{tr} el potencial electrostático en el horizonte vendrá dado por:

$$\begin{aligned} \Phi_1(r_h) &= \int_{r_h}^{\infty} F^{rt} dr = \int_{r_h}^{\infty} dr \frac{Q}{r^2} \sqrt{\lambda - \frac{r_c^4}{r^4}} = \\ &= Q \frac{\sqrt{\lambda}}{r_{min}} \frac{1}{z_h} {}_2F_1\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{1}{z_h^4}\right\}, \end{aligned} \quad (10.77)$$

con $z = \frac{r}{r_{min}} = \frac{r}{r_c} \lambda^{\frac{1}{4}}$. Repitamos el cálculo en el EF. Aquí partimos de que el electromagnetismo asociado es el de Born-Infeld en el “background RG” y la ecuación de campo se escribe como [119]:

$$\partial_\mu(\sqrt{-q} \varphi_Z F^{\mu\nu}) = 0, \quad (10.78)$$

con $\varphi[Z] = 2\beta^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{Z}{\beta^2}}\right)$ y $Z = \frac{Q^2 \beta^2}{Q^2 + \beta^2 x^4}$. A partir de estos resultados es inmediato encontrar $\varphi_Z = \sqrt{1 + 4 \frac{rc^4}{x^4}}$ y para el potencial electrostático tenemos:

$$\Phi_2(x_h) = \int_{x_h}^{\infty} dx \frac{Q}{x^2} \frac{1}{\sqrt{1 + 4 \frac{rc^4}{x^4}}} = \frac{Q}{x_h} {}_2F_1\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}, -4 \frac{r_c^4}{x_h^4}\right\} \quad (10.79)$$

Las expresiones (10.77) y (10.79) arrojan resultados analíticos diferentes, tal como se ilustra en la figura 10.2. Al igual que el caso en 2 + 1 dimensiones estudiado en la sección precedente, no encontramos una igualdad analítica que exprese el primer principio de la termodinámica de una forma exacta en el contexto de la gravedad GBI, por lo que este es un problema que requiere un estudio más profundo. Está claro que a pocas unidades de la garganta del agujero de gusano ambas funciones convergen rápidamente al valor propio de la solución Reissner-Nordström. Hipotéticas configuraciones en las que el horizonte externo se acerque mucho a la garganta del agujero de gusano y que pueden tener una especial importancia a la hora de buscar posibles desviaciones en el contexto holográfico respecto de los resultados obtenidos en la literatura previa cuando se utiliza la RG como teoría de la gravedad, merecerían una consideración particular, y en el ámbito de este trabajo

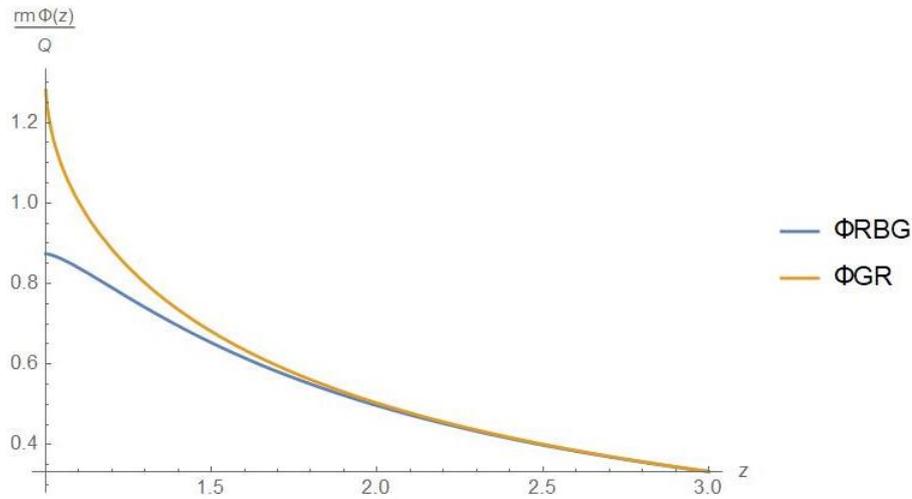


Fig. 10.2 Potencial eléctrico en el horizonte

quedan como una cuestión abierta. En este sentido, cabe indicar que el primer principio de la termodinámica en su expresión (10.9) es de comprobación inmediata tanto para dicha solución como para el electromagnetismo de Born-Infeld en el “background” RG, como veremos a continuación. No así en su contrapartida RBG. Dicha demostración analítica queda asimismo, como un trabajo en progreso. En el EF, el primer principio de la termodinámica lo podemos escribir como:

$$\begin{aligned} dM &= T_H dS + L_P^2 \Phi_E dQ = T_H \frac{dS}{dx_h} dx_h + L_P^2 \Phi_E dQ = \\ &= 2\pi T_H x_h dx_h + L_P^2 \Phi_E dQ. \end{aligned} \quad (10.80)$$

Por tanto, para comprobar su validez, deberá cumplirse:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial x_h} &= 2\pi T_H x_h \\ \frac{\partial M}{\partial Q} &= L_P^2 \Phi(xh) \end{aligned} \quad (10.81)$$

la primera igualdad es inmediata a partir de (10.71) y (10.73). Para probar la segunda solo necesitamos escribir $M(x_h)$ en función de $r_c^4 = -\varepsilon Q^2 L_P^2$:

$$M_h(Q) = \frac{x_h}{2} - \frac{1}{6} \Lambda x_h^3 + \frac{x_h^3}{12\varepsilon} \left(\sqrt{1 - 4\varepsilon \frac{L_P^2 Q^2}{x_h^4}} - 1 \right) + \frac{2}{3} \frac{Q^2}{x_h} L_P^2 {}_2F_1 \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}, 4\varepsilon \frac{L_P^2 Q^2}{x_h^4} \right] \quad (10.82)$$

derivando respecto de Q sustituyendo en (10.81) y teniendo en cuenta (10.79) encontramos inmediatamente la comprobación buscada [78]. Consideremos asimismo el cálculo del calor específico a carga constante para el electromagnetismo de Born-Infeld en el “background” RG [119]. A partir de (10.26), (10.71) y (10.73) es inmediato el resultado:

$$C_Q = -2\pi \frac{x_h^4 \sqrt{1 + 4\frac{r_c^4}{x_h^4}} \left(2\varepsilon + x_h^2 \sqrt{1 + 4\frac{r_c^4}{x_h^4}} - 1 - 2\varepsilon\Lambda \right)}{4r_c^4 + 2\varepsilon x_h^2 \sqrt{1 + 4\frac{r_c^4}{x_h^4}} + x_h^4 \left(\sqrt{1 + 4\frac{r_c^4}{x_h^4}} (1 + 2\varepsilon\Lambda) - 1 \right)} \quad (10.83)$$

finalmente, para la energía libre F definida de acuerdo a [119, 78]:

$$F = E - TS = (M - M_\varepsilon) - TS \quad (10.84)$$

siendo M_ε la función masa calculada para el caso en el que el agujero negro es extremal. Dicha condición corresponde al caso $T_H = 0$ [357]. Usando de nuevo (10.73) tendremos entonces:

$$x_h = \sqrt{\frac{1 + 2\varepsilon\Lambda + \sqrt{1 + 4r_c^4 \frac{\Lambda}{\varepsilon} + 4r_c^4 \Lambda^2}}{2\Lambda(1 + \varepsilon\Lambda)}} \quad (10.85)$$

y sustituyendo este valor de x_h en (10.82) podemos determinar el parámetro corrector M_ε del que no damos una expresión explícita, pues es compleja pero perfectamente calculable. Sustituyendo entonces (10.71) y (10.73) en (10.84) y usando $S = \pi x_h^2$ obtenemos:

$$F = \frac{1}{24\varepsilon x_h} \left[x_h^4 \left(1 - \sqrt{1 + 4\frac{r_c^4}{x_h^4}} \right) - 16r_c^4 {}_2F_1 \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}, -4\frac{r_c^4}{x_h^4} \right\} - M + \frac{x_h}{4} + \frac{1}{12} \Lambda x_h^3 \right] \quad (10.86)$$

lo que concluye nuestro análisis de la termodinámica asociada.

Capítulo 11

Resolución de la ecuación de Dirac en GBI 2+1

11.1 Introducción

En esta sección vamos a estudiar la ecuación de Dirac para un fermión con carga eléctrica en el “background” de la solución de tipo BTZ estudiada en el capítulo anterior. En dicha solución la geometría espacio-temporal viene dotada de una estructura de tipo agujero de gusano de una forma natural (lo que es una característica habitual en las soluciones RBG enfocadas “à la Palatini” [278, 286]). Como hemos visto, dichas estructuras surgen como consecuencia de una falta de metricidad en el espacio-tiempo asociado [244, 236, 116], dicha no metricidad puede ser interpretada como consecuencia de la naturaleza cuántica del espacio-tiempo en la que éste, lejos de fluir como un continuo, presentaría una estructura discretizada [365, 262]. Desde el punto de vista del estado sólido y desde los trabajos de Kröner [225, 226] y Bilby [29] sabemos que la metricidad tiene su origen en la existencia de defectos: átomos vacantes y/o átomos intersticiales en la red cristalina. En estas circunstancias, encontrar algún modelo procedente del estado sólido en el que la introducción de defectos en la red atómica suponga la aparición de dichas estructuras de tipo agujero de gusano supondría un nuevo punto de contacto (cuanto menos cualitativo), entre el campo del estado sólido y la física de la materia condensada con el de las teorías de la gravedad que intentan ir más allá de la geometría riemanniana. Dicho modelo de referencia puede contruirse, como se explicó detalladamente en el capítulo 5, a partir de variedades espaciales desarrolladas sobre el grafeno como material base mediante la adición de defectos heptagonales y pentagonales en la estructura hexágonal de carbono original [154, 230]. Los defectos en la red del grafeno generan curvatura espacial y en determinados modelos de trabajo, la aparición de las buscadas estructuras de tipo

agujero de gusano [161]. Teniendo en cuenta que las propiedades electrónicas del grafeno y en particular la densidad local de estados fermiónica asociada [338] se ven afectadas por la presencia de estos defectos, nos planteamos entonces la resolución completa de la ecuación de Dirac y a partir de dicha resolución el cálculo de la densidad local de estados (LDOS) asociada a los fermiones en nuestra geometría de tipo BTZ. En cualquier caso, las diferencias en la naturaleza de ambos problemas nos parecen lo suficientemente manifiestas como para no esperar encontrar correlaciones directas. La posible existencia de dichas correlaciones queda como una cuestión abierta sobre la que posteriores avances puedan ser llevados a cabo. Comentar asimismo que las analogías entre el grafeno y las soluciones BTZ ya han sido puestas de relieve en diversos trabajos, centrándose especialmente en la naturaleza de la radiación de Hawking asociada y en la aparición de horizontes de tipo Rindler en las estructuras de Beltrami asociadas [196, 109, 209].

Este capítulo se divide en las siguientes secciones: en primer lugar construiremos la ecuación de Dirac asociada a un fermión con carga eléctrica inmerso en la geometría de tipo BTZ. A continuación encontraremos soluciones analíticas en el límite asintótico a grandes distancias de la garganta del agujero de gusano, donde se corresponden con las de la situación BTZ no cargada convencional [88]. En el entorno del agujero de gusano la naturaleza logarítmica de la solución BTZ cargada impide encontrar dichas soluciones analíticas, por lo que procederemos a una introducción numérica y a comentar la forma de la densidad local de estados asociada para distintos valores de los parámetros característicos de la geometría y de la energía de la partícula de prueba. Trabajo en curso en este momento.

11.2 Estructura de la ecuación de Dirac asociada

Consideremos entonces como punto de partida la métrica espacio-temporal de un espacio 2 + 1 en coordenadas polares y la ecuación de Dirac para un fermión cargado y no masivo, planteada en (4.28):

$$\left[\hat{\gamma}^\mu \left(\partial_\mu + \frac{1}{8} e_a^\nu \left(\partial_\mu \hat{e}_{b\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\rho e_{b\rho} \left[\gamma^a, \gamma^b \right] \right) - i\tilde{q}A_\mu \right) \right] \Psi(x) = 0 \quad (11.1)$$

Con $\eta = \frac{L^2 + 2\varepsilon}{L^2}$ y siendo L y $\varepsilon < 0$ los parámetros que caracterizan el espacio AdS y la gravedad de Born-Infeld respectivamente, $r^2(x) = \eta x^2 - \frac{\varepsilon}{2} Q^2$ la variable radial asociada al RF (que presenta un mínimo en $x = 0$ dado por $r_{min}^2 = -\frac{\varepsilon}{2} Q^2$) de manera que la variable x puede extenderse a todo el eje real, dando cuenta de las dos ramas de la geometría conectadas por la garganta del agujero de gusano. En lo que respecta al potencial vector al que se acopla el fermión de carga eléctrica q , tenemos que en función de la variable radial x que caracteriza

el Einstein frame, se puede expresar como el del electromagnetismo de Maxwell para un campo radial y estático, (ver de nuevo el anexo (A)):

$$\begin{aligned} F_{xt} &= -\frac{\tilde{Q}}{x} \\ A_0 = A_t &= -\tilde{Q} \ln \frac{x}{x_0} \end{aligned} \quad (11.2)$$

Siendo \tilde{Q} el parámetro asociado a la carga eléctrica con dimensiones $[\tilde{Q}] = L^{-\frac{1}{2}}$. Para desarrollar la ecuación de Dirac asociada necesitamos expresiones explícitas para el dreibein y las matrices de Dirac en el espacio-tiempo curvo. En lo que respecta al dreibein, sabemos que está directamente relacionado con la métrica espacio-temporal mediante la ecuación $e_a^\mu e_b^\nu g_{\mu\nu} = \eta_{ab}$. Eligiendo un dreibein diagonal y considerando $\eta \simeq 1$ tenemos:

$$\begin{aligned} e_a^\mu &= \text{Diag} \left\{ \frac{1}{\sqrt{H(x)}}, \sqrt{H(x)}, \frac{1}{\sqrt{x^2 + r_{min}^2}} \right\} \\ e_{b\tau} = e_b^\sigma g_{\sigma\tau} &= \text{Diag} \left\{ -\sqrt{H(x)}, \frac{1}{\sqrt{H(x)}}, \sqrt{x^2 + r_{min}^2} \right\} \end{aligned} \quad (11.3)$$

Con $H(x) = -M + \frac{x^2}{L^2} - \frac{Q^2}{2} \ln \frac{x}{x_0}$. En lo que se refiere a la conexión $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ que aparece en (11.1), consideramos que de acuerdo con el principio de equivalencia la materia se acopla únicamente a la métrica y consecuentemente el fermión sumergido en el “background” solo “ve” [366], la parte métrica de la conexión, calculable via símbolos de Christoffel de $g_{\mu\nu}$, y es esta la conexión que utilizaremos en los cálculos. Una observación importante debe hacerse sobre el acoplamiento del fermión al campo exterior A_μ y es el hecho de que tal y como se detalla en el anexo A el parámetro \tilde{Q} con dimensiones $L^{-\frac{1}{2}}$ que entra en la definición del potencial vector (11.2) y en la acción del campo electromagnético no es el mismo parámetro Q adimensional que aparece en la definición de la función BTZ con la que trabajamos habitualmente (11.1), estando ambos relacionados mediante $\tilde{Q} = \frac{Q}{k\sqrt{2}}$. De la misma forma se tendrá $\tilde{q} = \frac{q}{k\sqrt{2}}$ para la carga del fermión elemental por lo que en (11.1) el término de acoplamiento va a escribirse como:

$$-i\tilde{q}A_\mu = -i\tilde{q}A_0 = i\frac{qQ}{2k^2} \ln \frac{x}{x_0} \quad (11.4)$$

Suponiendo para la carga adimensional asociada a la geometría el valor $Q > 0$ y considerando que ambas cargas sean de signo opuesto, escogiendo la carga de prueba adimensional en función del tamaño del universo x_0 y la constante de gravedad k^2 como $q = -\frac{2k^2}{x_0}$, el término

de acoplamiento toma una forma más sencilla dada simplemente por: $-i\tilde{q}A_\mu = -i\frac{Q}{x_0}\ln\frac{x}{x_0}$. Por otra parte, las matrices de Dirac $\{\gamma^a\}$ relacionadas con su contrapartida en el espacio-tiempo curvo mediante $\hat{\gamma}^\mu = e_a^\mu\gamma^a$ vendrán dadas por:

$$\begin{aligned}\gamma^t &= \gamma^0 = i\sigma_3 &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \\ \gamma^x &= \gamma^1 = -\sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^\theta &= \gamma^3 = -\sigma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (11.5)$$

Que cumplen automáticamente la relación de anticonmutación correcta [351]:

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\eta^{ab}\hat{I}_{2x2} \quad (11.6)$$

Con η^{ab} la métrica de Minkowski en $(2+1)$ dimensiones y en la signatura $\{-, +, +\}$. Por último, para la estructura del espinor de Dirac, hacemos el ansatz:

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \Phi_1(x) \\ \Phi_2(x) \end{pmatrix} = e^{-Et} e^{im\theta} \begin{pmatrix} R_{1m}(x) \\ R_{2m}(x) \end{pmatrix} \quad (11.7)$$

Con E y m los números cuánticos de energía y tercera componente de momento angular orbital respectivamente [161]. Una vez que tenemos correctamente definidos todos los elementos que intervienen en la ecuación de Dirac (11.1) un cálculo directo (pero tedioso), nos permite escribir dos ecuaciones diferenciales acopladas para las componentes radiales $R_{1m}(x)$ y $R_{2m}(x)$:

$$\begin{aligned}0 &= -\frac{m}{\sqrt{r_m^2+x^2}}R_{2m}(x) - \sqrt{H(x)}R'_{2m}(x) - R_{2m}(x)\left(\frac{x\sqrt{H(x)}}{2(r_m^2+x^2)} + \frac{H'(x)}{4\sqrt{H(x)}}\right) + \\ &+ \left(\frac{E}{\sqrt{H(x)}} - \frac{Q}{x_0\sqrt{H(x)}}\ln\frac{x}{x_0}\right)R_{1m}(x)\end{aligned}\quad (11.8)$$

$$\begin{aligned}0 &= \frac{m}{\sqrt{r_m^2+x^2}}R_{1m}(x) - \sqrt{H(x)}R'_{1m}(x) - R_{1m}(x)\left(\frac{x\sqrt{H(x)}}{2(r_m^2+x^2)} + \frac{H'(x)}{4\sqrt{H(x)}}\right) - \\ &- \left(\frac{E}{\sqrt{H(x)}} - \frac{Q}{x_0\sqrt{H(x)}}\ln\frac{x}{x_0}\right)R_{2m}(x)\end{aligned}\quad (11.9)$$

Multiplicando ambos lados de las ecuaciones por $\sqrt{H(x)}$ y definiendo las funciones:

$$\begin{aligned} T(x) &= E + \frac{Q}{x_0} \ln \frac{x}{x_0} \\ F(x) &= \left(\frac{xH(x)}{2(r_m^2 + x^2)} + \frac{H'(x)}{4} \right) \\ G(x) &= m \sqrt{\frac{H(x)}{(r_m^2 + x^2)}} \end{aligned} \quad (11.10)$$

Podemos escribir las ecuaciones acopladas de una forma más compacta:

$$\begin{aligned} T(x)R_{1m}(x) &= H(x)R'_{2m}(x) + (F(x) + G(x))R_{2m}(x) \\ -T(x)R_{2m}(x) &= H(x)R'_{1m}(x) + (F(x) - G(x))R_{1m}(x) \end{aligned} \quad (11.11)$$

11.3 Límites asintóticos

11.3.1 Resolución a grandes distancias

Consideremos el límite $(x \simeq x_0) \rightarrow \infty$ es decir: a distancias muy grandes comparadas con los parámetros r_m y L y cercanas al tamaño máximo del universo estudiado, caracterizado por la longitud x_0 . En este límite la función $H(x)$ puede aproximarse como $H_\infty(x) \simeq \frac{x^2}{L^2}$ es decir, la correspondiente al espacio AdS_{2x1} puro [351, 305], y las ecuaciones diferenciales se simplifican notablemente (notemos que en este límite el acoplamiento del fermión tampoco nos da contribución). Un calculo directo nos lleva a las relaciones:

$$\begin{aligned} \frac{L^2 ER_{1m}(x) - (Lm + 2x)R_{2m}(x) - x^2 R'_{2m}(x)}{Lx} &= 0 \\ \frac{-L^2 ER_{2m}(x) + (Lm - 2x)R_{1m}(x) - x^2 R'_{1m}(x)}{Lx} &= 0 \end{aligned} \quad (11.12)$$

De aquí podemos despreciar la contribución en m frente a x [305] y escribir las ecuaciones acopladas como:

$$\begin{aligned}\frac{dR_1}{dx} + \frac{2R_1(x)}{x} &= -E \frac{L^2}{x^2} R_2(x) \\ \frac{dR_2}{dx} + \frac{2R_2(x)}{x} &= E \frac{L^2}{x^2} R_1(x)\end{aligned}\quad (11.13)$$

Despejando por ejemplo $R_1(x)$ de la segunda ecuación y sustituyendo en la primera. encontramos una ecuación diferencial de segundo orden para $R_2(x)$. Es inmediato comprobar que ambas funciones siguen la misma ecuación

$$\left[\frac{1}{L^2 x^2 E} \left(6x^2 R_j(x) + L^4 E^2 R_j(x) + 6x^3 R_j'(x) \right) + \frac{x^2}{L^2 E} R_j''(x) \right]_{j=\{1,2\}} = 0 \quad (11.14)$$

Lo que nos permite despreciar el factor $L^4 E^2$ frente las distancias consideradas y prescindir por completo de las dependencias en la energía de la función de onda a grandes distancias [351, 305]. La ecuación diferencial así resultante es completamente resoluble de forma analítica:

$$\left[\frac{d^2 R_j}{dx^2} + \frac{6}{x} \frac{dR_j}{dx} + \frac{6R_j}{x^2} \right]_{j=\{1,2\}} = 0 \quad (11.15)$$

Que tiene como solución $R_j(x) = \frac{C_j}{x^2} + O[x^{-3}]$. De donde vemos que las funciones de onda radiales deben caer en el límite de grandes distancias. Este resultado es importante ya que nos va a permitir situar ciertas condiciones de contorno sobre la función y su primera derivada para $x = x_0$, es decir en la superficie frontera de nuestro universo estudio. Como vamos a ver en la siguiente sección las ecuaciones diferenciales no admiten (en principio), soluciones analíticas cerca de la garganta del agujero de gusano, ($x = 0$) y tampoco disponemos (en principio) de información adicional sobre el comportamiento de las funciones de onda en tal límite por lo que para la integración numérica deberemos jugar exclusivamente con los parámetros fermiónicos, (energía y momento angular orbital) para obtener alguna imagen gráfica de las funciones de onda y la densidad local de estados asociada.

11.3.2 Forma de la ecuación de Dirac cerca del agujero de gusano

El límite $x \rightarrow 0$ de la geometría BTZ cargada que en el contexto de la RG ha sido estudiado anteriormente [351]. En dicho contexto como ya sabemos, se tiene una singularidad en el origen, mientras que en nuestro problema GBI dicha singularidad es reemplazada por el valor

mínimo de la variable radial $r(x)$ y el paso vía agujero de gusano a la segunda hoja de la variedad mediante la aproximación:

$$H_0(x) \simeq -\frac{Q^2}{2} \ln \frac{x}{x_0} \quad (11.16)$$

Basándonos en dicho resultado y considerando la estructura de las funciones implicadas (11.10) podemos reescribir las ecuaciones de Dirac desacopladas generales (11.11) manteniendo únicamente los términos dominantes en cada caso: consideremos por ejemplo la ecuación diferencial que seguirá $R_{2m}(x)$ (a partir de (11.11), la forma de la ecuación diferencial asociada a $R_{1m}(x)$ es muy similar, simplemente haciendo el cambio, $T(x) \rightarrow -T(x)$ y $G(x) \rightarrow -G(x)$). Un análisis directo del comportamiento de dichas funciones en este límite nos lleva al resultado:

$$R''_{2m}(x) + \frac{R'_{2m}(x)}{2x \ln \frac{x}{x_0}} - \frac{R_{2m}(x)}{4x^2 \ln \frac{x}{x_0}} = 0 \quad (11.17)$$

Que no tiene en principio una solución analítica. Tampoco disponemos de información física que nos pueda orientar sobre el aspecto que tiene la función de onda cerca de la garganta. La principal dificultad a la que nos enfrentamos viene motivada por el hecho de que, cerca de $x = 0$ el factor $x \ln x$ es muy fluctuante como muestra su derivada, lo que impide aproximaciones en serie que nos pudieran conducir a posteriores integraciones analíticas.

11.3.3 Integración numérica y estimación de la densidad local de estados cerca del agujero de gusano

Con ayuda de las funciones introducidas en (11.10) las ecuaciones diferenciales desacopladas pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} R''_{1m}(x) + R'_{1m}(x) \left\{ \frac{2F(x) + H'(x)}{H(x)} - \frac{T'(x)}{T(x)} \right\} + R_{1m}(x) \left\{ \frac{F(x)^2 - G(x)^2}{H(x)^2} + \frac{T(x)^2}{H(x)^2} + \right. \\ \left. + \frac{F'(x) - G'(x)}{H(x)} - (F[x] - G[x]) \frac{T'(x)}{H(x)T(x)} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (11.18)$$

$$\begin{aligned} R''_{2m}(x) + R'_{2m}(x) \left\{ \frac{2F(x) + H'(x)}{H(x)} - \frac{T'(x)}{T(x)} \right\} + R_{2m}(x) \left\{ \frac{F(x)^2 - G(x)^2}{H(x)^2} + \frac{T(x)^2}{H(x)^2} + \right. \\ \left. + \frac{F'(x) + G'(x)}{H(x)} - (F[x] + G[x]) \frac{T'(x)}{H(x)T(x)} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (11.19)$$

La integración numérica de estas ecuaciones debería conducir al mismo resultado que la integración del sistema representado en (11.10), teniendo en cuenta que las condiciones de contorno son distintas en cada caso. Mientras que el sistema (11.10) sólo exige dos condiciones (una para cada variable), las ecuaciones (11.19) exigen cuatro (dos para cada variable). Obviamente, en este segundo caso existe una ligadura que permite reducir las condiciones a solo dos. No obstante, la dificultad para establecer condiciones razonables en la garganta del agujero de gusano en aquellos casos que no poseen horizonte, supone un reto técnico que debemos superar para poder construir con seguridad soluciones de energía y momento angular bien definidos, las cuales son necesarias para completar nuestro análisis de la LDOS (densidad local de estados). Aunque ya disponemos de algunos resultados preliminares, es necesario un estudio más cuidadoso de los mismos para poder interpretarlos correctamente. Confiamos en poder finalizar este análisis en breve.

Capítulo 12

Gravedad GBI y holografía

12.1 Introducción

Como ya hemos comentado en el capítulo 4, la idea básica que inspira las teorías holográficas tuvo su origen en el contexto de la teoría de cuerdas [164, 306] y establece la posibilidad de analizar una teoría gauge N -dimensional fuertemente acoplada utilizando un espacio AdS en $N + 1$ dimensiones. La teoría gauge vive entonces en la frontera de un espacio de una dimensión mayor, y que asintóticamente es de tipo Anti-de-Sitter. Formulando entonces ese espacio en la notación AdS_{p+2} tenemos que para $p = 3$ la teoría gauge es 4-dimensional. Diferentes teorías de la gravedad dan lugar entonces a diferentes teorías gauge asociadas por lo que estudiar un problema de gravedad u otro en el interior del espacio $d + 1$ -dimensional supone considerar sistemas físicos diferentes en el lado de la teoría gauge. Existe además (mediante el diccionario AdS/CFT [368] y la igualdad entre funciones de partición (4.69)) una correlación entre los acoplamientos de ambas teorías, de tal forma que una teoría gravitatoria débilmente acoplada se corresponde con una teoría gauge fuertemente acoplada. Desde el punto de vista de la termodinámica, los espacios AdS puros se corresponden con teorías gauge a temperatura cero y de la misma forma, una teoría gauge a temperatura finita va a tener su contrapartida en una teoría de la gravedad en un espacio AdS dotada de una estructura de agujero negro, la temperatura de Hawking del agujero negro se va a relacionar con fenómenos de no equilibrio en la teoría gauge [175, 193, 79]. Conviene observar, asimismo, que la teoría gauge con la que se trabaja en términos holográficos difiere de la teoría de Yang Mills $SU(3)$ convencional [303]: la correspondencia AdS/CFT pone en juego una teoría de Super-Yang Mills (supersimetría), y una teoría gauge $SU(N_c)$ [368]: en el límite de números de color altos [15] tenemos acoplamiento fuerte, de tal forma que N_c va a jugar el papel de parámetro a ajustar. SYM es además una teoría con invariancia conforme: (invariancia Poincaré + invariancia de escala) mientras que la existencia de materia en el lado de la gravedad, por

ejemplo la teoría tipo BTZ cargada que usaremos en las secciones posteriores, no lo es. Entre los límites a la aplicabilidad de la correspondencia, está el hecho de que las teorías gauge implicadas no son muy realistas, aunque permiten desarrollar ideas intuitivas en contextos muy diversos: (teoría de campos, materia condensada, plasma de gluones), así como en problemas relacionados con coeficientes de transporte, viscosidad, y procesos disipativos [175, 193, 79, 210, 267] entre otros. En este último capítulo, usaremos la solución tipo BTZ obtenida mediante el acoplamiento de la gravedad GBI al electromagnetismo de Maxwell (3.11), para situarla en el contexto de la correspondencia AdS/CFT: más concretamente, la usaremos para esbozar algunos cálculos relacionados con los loops de Wilson, el potencial quark-antiquark y el confinamiento en hadrones ([252, 137, 312, 71, 127]), así como el cálculo de operadores duales en la teoría gauge (1 + 1) que se obtiene por correspondencia a un campo fermiónico que se propaga en el “bulk” (2 + 1) generado por una solución BTZ ([250, 197, 141, 140, 242, 238]). Dichos operadores duales se relacionan con las funciones de Green retardadas de la teoría gauge [179] y contienen información sobre el comportamiento colectivo del sistema, como los procesos de transporte y disipación [197]. Para ello, al igual que hicimos en el capítulo anterior, resolveremos la ecuación de Dirac para fermiones no masivos en el contexto GBI indicado [49].

12.2 Loops de Wilson

12.2.1 Teorías Gauge y confinamiento

Comencemos repasando algunos aspectos, relevantes para nuestro trabajo, de las teorías gauge [268]. En primer lugar vamos a establecer rápidamente una relación entre la no localidad de un operador y su susceptibilidad para ser promocionado o no a observable de la teoría. Es inmediato comprobar que los operadores no locales no son observables de la teoría y esto es así porque dichos operadores no son invariantes bajo una transformación de gauge local: consideremos por ejemplo una teoría gauge $SU(1)$ cuyas leyes de transformación gauge pueden expresarse como:

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow A_\mu + \partial_\mu \\ \varphi(x) &\rightarrow e^{i\alpha(x)}\varphi(x) \end{aligned} \tag{12.1}$$

Si consideramos entonces un operador no local descrito por un funcional de la forma $\Phi(x, y) = \phi(x) \phi^*(y)$, es evidente que, bajo la anterior ley de transformación, el operador no es invariante gauge. A partir de este resultado, construyamos el operador:

$$\Phi(x, y) = \phi(x) e^{i \int_C dx^\mu A_\mu} \phi^*(y) \quad (12.2)$$

Siendo C cualquier camino que conecta los puntos x e y . Tenemos entonces que el operador así definido sí es invariante gauge. Cuando el circuito de integración es abierto, hablaremos de los operadores como “líneas de Wilson” mientras que en el caso de que dicho circuito sea cerrado, el correspondiente operador se denomina “Loop de Wilson” [252].

- Circuito abierto: Operador Wilson line $W_P(x, y) = e^{i \int_C dx^\mu A_\mu}$
- Circuito cerrado: Operador Wilson loop $W_P(x, x) = e^{i \oint_C dx^\mu A_\mu}$

Tenemos entonces que el operador loop de Wilson es invariante gauge por construcción y puede interpretarse físicamente como el potencial quark-antiquark [210]. Consideremos el caso de una partícula puntual cargada, sabemos que el cuadvivector densidad de corriente asociado viene dado por [232]:

$$J^\mu(x) = \oint d\lambda \frac{dy}{d\lambda} \delta(x^\mu - y^\mu(\lambda)) \quad (12.3)$$

La carga test supone entonces una variación en la acción de la forma:

$$\delta S = \int d^4x A_\mu(x) J^\mu(x) = \oint A_\mu(y(\lambda)) dy^\mu(\lambda) \quad (12.4)$$

Y un acoplamiento al campo gauge externo, tal y como ya vimos en la ecuación de Dirac en el capítulo anterior. El loop describe entonces el proceso de creación de un par quark-antiquark a partir del vacío, su separación una distancia R , su interacción durante un tiempo T y su aniquilación posterior.

El operador loop de Wilson representa, asimismo, una función de partición en presencia de una carga test:

$$\begin{aligned} W_P(x, x) &= e^{i\delta S} \\ \langle W_P \rangle &= \frac{Z(J)}{Z(0)} \\ Z = \langle f | e^{-\mathcal{H}\tau} | i \rangle &= \sum e^{-E_n \tau} \langle f | n \rangle \langle n | i \rangle \end{aligned} \quad (12.5)$$

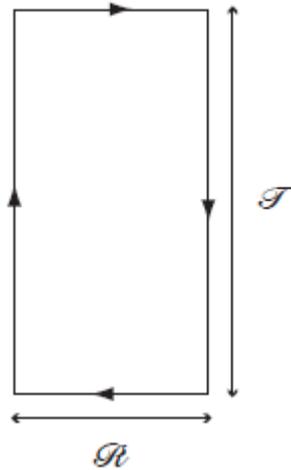


Fig. 12.1 Representación esquemática del par quark-antiquark interactuando en el Wilson Loop [268].

Ahora bien, de acuerdo con el principio de incertidumbre, para $\tau \rightarrow \infty$ la función de partición está dominada por el nivel fundamental de energía y el par quark-antiquark se crea sin energía cinética apreciable. El loop de Wilson informa entonces de la energía potencial del par:

$$\langle W_P \rangle \simeq e^{-V(R)\tau} \quad (12.6)$$

Siendo R la separación del par quark-antiquark. En el contexto QCD [303] los quarks no pueden separarse más allá de una distancia máxima (típicamente, el tamaño del hadrón) y el potencial aumenta con la distancia en lo que se conoce como confinamiento cuántico o ley del área [301]. Para potenciales como el coulombiano, por el contrario, la intensidad del potencial cae con la separación, se trata de un potencial de largo alcance, donde no se produce el confinamiento:

$$\begin{aligned} \text{(QCD, ley del área): } & V(R) \simeq \sigma R \quad : \langle W_P \rangle \simeq e^{-\sigma R \tau} \\ \text{(Coulomb, ley del perímetro): } & V(R) \simeq 1/R \quad : \langle W_P \rangle \simeq e^{-O(R)} \end{aligned}$$

Veamos ahora algunos apuntes rápidos sobre teoría de cuerdas [215] limitados al ámbito en el que nos vamos a mover. La gravedad del espacio AdS implica una teoría de cuerdas, pero en el límite $N_c \rightarrow \infty$ no necesitamos saber demasiado sobre teoría de cuerdas para manejar AdS/CFT. Una cuerda abierta tiene sus extremos en las llamadas D -Branas [164, 306]. Una cuerda abierta y un conjunto de N_c D -Branas representa una teoría gauge. Para un número N_c de D -Branas una cuerda abierta (semi) infinita puede ligarse de N_c formas diferentes a

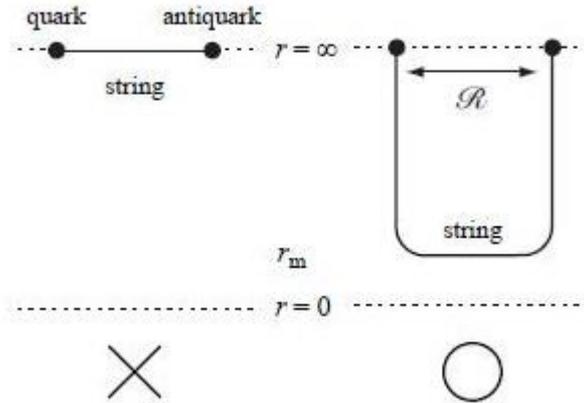


Fig. 12.2 Cuerda y separación entre quarks. Separación menor cerca del origen, $r = 0$ [268].

dichas D -Branas y una cuerda abierta no infinita puede construirse de N_c^2 formas diferentes [268]. De aquí vemos que una cuerda infinita se transforma entonces como la representación fundamental (quark) de la teoría $SU(N_c)$. La cuerda por otra parte tiene tensión y longitud, lo que le confiere una masa asociada a la masa del quark [313]. Consideremos entonces para comenzar a fijar ideas la situación en un espacio AdS_5 puro, que podemos describir mediante el elemento de línea:

$$ds^2 = \left(\frac{r}{L}\right)^2 \{-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\} + \frac{L^2}{r^2} dr^2 \quad (12.7)$$

Las coordenadas $\{t, x_i\}$ se asocian a la teoría gauge que vive en la frontera del espacio AdS, ($r = \infty$). El par quark-antiquark está conectado por una cuerda que tiene tensión, siendo R la distancia entre quarks (medida en $r = \infty$). La coordenada radial, por otra parte, caracteriza el espacio AdS (es decir, el “bulk”) y tiene que ver con la escala de energía de la teoría gauge.

Dada la simetría del problema, la distancia entre quarks viene registrada por ejemplo, por la coordenada espacial x_1 es decir: $R = \Delta x_1$. La tensión de la cuerda, por su parte tiende a disminuir su longitud, pero la longitud mínima no se consigue con una cuerda situada en $r = \infty$ ya que debido a la naturaleza curva del espacio-tiempo la longitud se minimiza con una cuerda que se interne en la estructura AdS. La longitud propia de la cuerda va como $\frac{r}{L}\Delta x_1$ y disminuye cuanto más nos acercamos al origen, lo que se relaciona con el potencial del par. El tramo vertical de la cuerda contribuye a la masa del quark, mientras que el tramo horizontal se relaciona con el potencial del quark y varía a medida que varía la distancia R . Existe un punto de retorno de la cuerda r_m correspondiendo a su longitud mínima. El cálculo exacto [268] muestra que: $r_m \propto \frac{L^2}{R}$. La distancia propia entre quarks es proporcional a $(\frac{r}{L})R$ lo que a su vez implica, de acuerdo con la ley del área, que la energía (propia) de la cuerda va

como $E(r) \propto (\frac{r}{L})R$. Sin embargo, $E(r)$ no es la energía medida por la teoría gauge ya que el tiempo gauge (t) no es el tiempo propio (τ), estando ambos relacionados mediante $\tau = (\frac{r}{L})t$ por tanto tendremos $E_t = (\frac{r}{L})E(r) \propto (\frac{r}{L})^2 R$. La energía del quark viene entonces dada por $E_t \propto (\frac{r_m}{L})^2 R \simeq \frac{L^2}{R}$: inversamente proporcional a la distancia del par. Tenemos entonces que el potencial asociado a un espacio AdS puro es de tipo coulombiano, no confina y no puede describir quarks en hadrones. Un espacio AdS puro implica una teoría SYM, pero no QCD [268]. Consideremos entonces la situación para una métrica general. Generalizando los resultados anteriores para el caso AdS puro podemos escribir:

$$E_t = \sqrt{-g_{tt}}|_{r=r_m} E(r) = \frac{1}{2\pi l_s^2} \sqrt{-g_{tt}g_{rr}}|_{r=r_m} R \quad (12.8)$$

Siendo $T = \frac{1}{2\pi l_s^2}$ la tensión de la cuerda. Vemos pues que en AdS/CFT la coordenada radial está relacionada con la escala de energía. Si la teoría gauge confina a una escala de energías Λ , esta escala puede ponerse en relación con un “cutoff” en el espacio AdS, de forma que para un parámetro de corte r_c la cuerda no puede bajar hasta r_m y la energía va como: $E_t \simeq r_c^2 R \simeq O(R)$ lo que implica confinamiento. De acuerdo con el diccionario AdS/CFT la existencia de un agujero negro con un horizonte de eventos situado en r_0 equivale a una teoría gauge a temperatura finita. Para $r \gg r_0$ el espacio es aproximadamente AdS puro y tenemos el potencial coulombiano que no confina, pero si la cuerda consigue llegar cerca del horizonte r_0 se tiene:

$$E_t \simeq \sqrt{-g_{tt}}|_{r=r_0} E(r) \rightarrow 0 \quad (12.9)$$

En ese caso los quarks no experimentan ninguna interacción cuando la distancia entre ellos es demasiado grande, (apantallamiento de Debye en AdS/CFT) [268].

12.2.2 Soluciones exactas

Antes de considerar un cálculo similar usando una de nuestras propias soluciones, consideremos algunos ejemplos más en el ámbito de la RG. La acción de una cuerda se construye de manera análoga a la de una partícula [306]. Si la partícula puntual traza una línea, (“World-line”) en el espacio-tiempo tendremos entonces que la cuerda traza una superficie y la acción asociada puede escribirse como:

$$S = -\frac{1}{2\pi l_s^2} \int dA \quad (12.10)$$

La superficie descrita por la cuerda se describe entonces por la parametrización $X^M(\sigma^a)$ de manera que se tendrá [268]:

$$ds^2 = \eta_{MN} dx^M dx^N = \eta_{MN} \frac{\partial X^M}{\partial \sigma^a} \frac{\partial X^N}{\partial \sigma^b} d\sigma^a d\sigma^b \quad (12.11)$$

En cuanto a la elección de coordenadas, es habitual trabajar en el conocido como “static gauge” dado por $\{\sigma^0, \sigma^1\} = \{t, r\}$ y la acción de la cuerda recibe entonces el nombre de acción de Nambu-Goto [268]:

$$S_{NG} = -\frac{1}{2\pi l_s^2} \int dA = -\frac{1}{2\pi l_s^2} \int d^2\sigma \sqrt{-h_{ab}}$$

$$h_{ab} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \frac{dx}{dt} & \frac{dx}{dt} \frac{dx}{dr} \\ \frac{dx}{dr} \frac{dx}{dt} & \frac{dx}{dr} \frac{dx}{dr} \end{pmatrix} \quad (12.12)$$

Consideremos por ejemplo el espacio AdS_5 , cuyo elemento de línea puede escribirse como:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(\frac{r}{L}\right)^2 \{-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\} + \frac{L^2}{r^2} dr^2 = \\ &= \left(\frac{r}{L}\right)^2 \{-dt^2 + dx^2\} + \frac{L^2}{r^2} dr^2 = \\ &= -\left(\frac{r}{L}\right)^2 dt^2 + \left\{ \frac{L^2}{r^2} + \left(\frac{r}{L}\right)^2 \frac{dx^2}{dr^2} \right\} dr^2 \end{aligned} \quad (12.13)$$

Y la acción de Nambu-Goto en función de la métrica se escribiera entonces como:

$$S_{NG} = -\frac{\tau}{2\pi l_s^2} \int dr \left(1 + \frac{r^4}{L^4} x'^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (12.14)$$

Siendo τ el tiempo tiempo durante el que se produce la interacción entre los quarks y $x'^2 \equiv \frac{dx^2}{dr^2}$ notemos que x es ahora un vector que agrupa las tres coordenadas púramente espaciales asociadas a la teoría gauge que vive en la frontera. En el caso $p = 3$ como estudiaremos a continuación, se reducirá a una sola coordenada: llamémosla x_1 (a efectos prácticos esto no tiene más trascendencia ya que solo el módulo del vector nos interviene en los cálculos). De (12.14) vemos que el lagrangiano no contiene la variable x , luego existe un momento canónico conjugado de dicha variable que va a ser conservado:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathcal{S}}}{\partial x'}\right) &= 0 \\ \frac{\left(\frac{r}{L}\right)^4 x'}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{r}{L}\right)^4 x'^2\right)}} &= C\end{aligned}\quad (12.15)$$

Y la constante puede ser determinada teniendo en cuenta que para $r = r_m$ estamos en el punto de inflexión para la cuerda cumpliéndose $x = 0$. Además, si consideramos que la forma adoptada por la cuerda es aproximadamente rectangular tendremos que, para $r = r_m$ se cumplirá asimismo $\frac{dx'}{dr}|_{r=r_m} = \infty$. Pequeñas fluctuaciones entorno al punto de giro de la cuerda suponen pasar del tramo vertical de la cuerda (que no contribuye potencial del quark, sino a su masa) al horizontal. Esta condición permite determinar la constante como $C = \left(\frac{r_m}{L}\right)^2$. A partir de este resultado un cálculo directo nos permite calcular la distancia del par quark-antiquark. Considerando $x' = \frac{L^2 r_m^2}{\sqrt{r^8 - r^4 r_m^4}}$ es un cálculo directo encontrar:

$$\begin{aligned}\frac{R}{2} &= \int_{x=0}^{x=\frac{R}{2}} dx \\ &= \int_{r_m}^{\infty} \left(\frac{L}{r}\right)^2 \frac{dr}{\sqrt{\left(\frac{r}{r_m}\right)^4 - 1}} = \frac{L^2}{r_m} \frac{\sqrt{2}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2} \pi^{\frac{3}{2}}\end{aligned}\quad (12.16)$$

Sustituyendo la relación $x = x(r)$ en (12.14) encontramos la energía del quark:

$$E = -\frac{2S_{\text{on-shell}}}{\tau} = \frac{r_m}{\pi l_s^2} \int_1^{\infty} \frac{y^2 dy}{(y^4 - 1)^{\frac{1}{2}}}\quad (12.17)$$

La integral diverge pero esto refleja el hecho de que estamos considerando el quark como infinitamente pesado [127]. La configuración de la cuerda “aislada” de los quarks de sus extremos se obtiene entonces a partir de la acción “on shell” evaluada en $x' = 0$. En el cálculo de E_0 la integración se extiende desde $r = 0$ hasta $r = \infty$:

$$E_0 = \frac{r_m}{\pi l_s^2} \int_0^{\infty} dy = \frac{r_m}{\pi l_s^2} \left\{ 1 + \int_1^{\infty} dy \right\}\quad (12.18)$$

Por lo que la corrección de masa finita del quark nos da, finalmente:

$$E - E_0 = \frac{r_m}{\pi l_s^2} \left\{ \int_1^\infty \left(\frac{y^2}{(y^4 - 1)^{\frac{1}{2}}} - 1 \right) dy - 1 \right\} \quad (12.19)$$

Consideremos ahora como siguiente paso el cálculo del loop de Wilson para una estructura que contenga un agujero negro en el espacio AdS_{p+2} [268]:

$$ds_{BH}^2 = \left(\frac{r}{L} \right)^2 \{ -h(r) dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \dots + dx_p^2 \} + \frac{dr^2}{h(r)r^2} \quad (12.20)$$

Con $h(r) = \left(1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^{p+1} \right)$. El caso $p = 3$ va a corresponder a soluciones de tipo BTZ en el “bulk” sin carga ni momento angular, que dan lugar a una teoría gauge $(1 + 1)$ en la frontera. Siguiendo el mismo procedimiento que para el caso AdS_5 puro, encontramos para el caso AdS_{5+BH} los resultados:

$$\begin{aligned} \frac{R}{2} &= \frac{L^2 \sqrt{\varepsilon}}{r_m} \int_1^\infty \frac{dy}{\sqrt{y^4 + \varepsilon - 1} \sqrt{y^4 - 1}} \\ E - E_0 &= \frac{r_m}{\pi l_s^2} \left\{ \int_1^\infty \left(\sqrt{\frac{y^4 + \varepsilon - 1}{y^4 - 1}} - 1 \right) dy - 1 + (1 - \varepsilon)^{\frac{1}{4}} \right\} \end{aligned} \quad (12.21)$$

Siendo $\varepsilon = h(r_m) = 1 - \left(\frac{r_0}{r_m} \right)^4$ y la integral que nos permite corregir por el efecto de la masa finita del quark E_0 se extiende desde $r = r_0$ (horizonte de eventos) hasta $r = \infty$. Las integrales han de calcularse numéricamente por lo que es preciso dar un valor a r_m .

12.2.3 Loop de Wilson en GBI

Inspirándonos en los anteriores ejemplos que se han derivado a partir de un espacio AdS puro y de soluciones tipo Schwarzschild en un contexto en el que la teoría de la gravedad en el “bulk” viene dada por la RG, consideremos el cálculo equivalente usando para ello una de las soluciones de tipo BTZ obtenidas a partir de la gravedad de Born-Infeld formulada “à la Palatini” que han sido ámbito de estudio en anteriores capítulos del presente trabajo. Hemos escogido para ello la solución en la que en el lado RBG el sector de materia viene representado por el electromagnetismo de Maxwell [49]. En primer lugar, vamos a redefinir las coordenadas para acercar los anteriores ejemplos a la forma de la solución considerada. Para ello, si en la solución con agujero negro en AdS_3 :

$$\begin{aligned}
ds_{BH}^2 &= \left(\frac{r}{L}\right)^2 \{-h(r) dt^2 + dx_1^2\} + \frac{dr^2}{h(r) \left(\frac{r}{L}\right)^2} \\
h(r) &= \left(1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right)
\end{aligned} \tag{12.22}$$

Hacemos los cambios $r_0 = L\sqrt{M}$ y $x_1 = L\theta$ y tenemos en cuenta que la variable canónica x_1 se corresponde con la variable angular θ y que el radio de Schwarzschild se relaciona directamente con el parámetro masa (el caso $M = 0$ se corresponde directamente con la solución AdS_3 puro), tendremos:

$$ds_{BH}^2 = -dt^2 \left(\frac{r^2}{L^2} - M\right) + \frac{dr^2}{\left(\frac{r^2}{L^2} - M\right)} + r^2 d\theta^2 \tag{12.23}$$

Una vez unificado el lenguaje en cuanto a las variables implicadas, recordemos la forma de la solución de tipo BTZ que vamos a utilizar en el cálculo:

$$\begin{aligned}
ds_{BI}^2 &= -A(r) dt^2 + \frac{dr^2}{A(r) \Omega_-} + r^2 d\theta^2 = \\
&= -A(r) dt^2 + \frac{dr^2}{A(r) \Omega_-} + \frac{r^2}{L^2} dx_1^2 \\
A(r) &= \frac{1}{\lambda^2 - \left(\frac{r_{min}}{r}\right)^4} \left(-M_{eff} + \frac{r^2}{L^2} + Q^2 \frac{r_m^2}{8r^2} - \frac{Q^2}{4} \ln \frac{r^2 - r_{min}^2}{L^2}\right)
\end{aligned} \tag{12.24}$$

Con $\Omega_-(r) = \left(\lambda - \frac{r_m^2}{r^2}\right)^2$ y $r_{min}^2 = -\frac{\varepsilon}{4} Q^2$ señalando el mínimo en la variable radial $r(x)$, es decir la garganta del agujero de gusano. Conviene notar que según sea el contexto, r_m puede aludir tanto a la estructura de agujero de gusano asociada la formulación métrico-afin de la gravedad GBI como al punto de retorno de la cuerda en su descenso radial en el “bulk”, por lo que en el cálculo consideraremos la notación r_t para este último término. La constante cosmológica $\Lambda = -\frac{1}{L^2}$ se relaciona, como ya sabemos con los parámetros característicos de la gravedad de Born-Infeld mediante $\Lambda = \frac{\lambda-1}{\varepsilon}$ con λ una cantidad positiva y muy cercana a la unidad y $\varepsilon < 0$. Conviene recordar, asimismo, que hemos considerado el parámetro r_0 igual a L con el objetivo de disponer de soluciones con horizontes, tal y como se explicó en el capítulo 8. Con esta especificación del elemento de línea espacio-temporal es inmediato

calcular la acción de Nambu-Goto asociada, ya que el procedimiento es el mismo expuesto en el contexto GR para los anteriores ejemplos:

$$S_{NG} = -\frac{\tau}{2\pi l_s^2} \int dr \left(\frac{1}{\Omega_-} + \frac{r^2 A(r)}{L^2} x'^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (12.25)$$

Para r_t (punto de retorno de la cuerda) definimos: $\delta = A(r_t)$ e introducimos la variable adimensional $z = \frac{r}{r_t}$ de forma que para la longitud de la cuerda tendremos el resultado:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{R}{2}} dx = \frac{R}{2} &= \int_{r_t}^{\infty} \frac{L r_t \sqrt{\delta} dr}{\sqrt{\Omega_- \sqrt{A r^2 (A r^2 - \delta r_t^2)}}} = \\ &= \int_1^{\infty} dz \frac{L \sqrt{\delta}}{(\lambda z^2 - z_m^2) \sqrt{A(z)} \sqrt{A(z) - \frac{\delta}{z^2}}} \end{aligned} \quad (12.26)$$

Lo que nos da la energía asociada:

$$E = -\frac{2S}{\tau} = \frac{r_t}{\pi l_s^2} \int_1^{\infty} dz \frac{\sqrt{A(z)}}{(\lambda - \frac{z_m^2}{z^2}) \sqrt{A(z) - \frac{\delta}{z^2}}} \quad (12.27)$$

Sustrayendo ahora la contribución por la masa finita del quark, encontramos finalmente:

$$\begin{aligned} E - E_0 &= \frac{r_t}{\lambda \pi l_s^2} \left(\int_1^{\infty} \frac{dz}{z^2 - \beta^2} z^2 \left\{ \frac{\sqrt{A(z)}}{\sqrt{A(z) - \frac{\delta}{z^2}}} - 1 \right\} + \right. \\ &\quad \left. + z_0 - 1 + \beta \left(\text{Arctanh} \frac{1}{\beta} - \text{Arctanh} \frac{z_0}{\beta} \right) \right) \end{aligned} \quad (12.28)$$

Con la integración extendiéndose desde el horizonte de eventos r_0 , hasta $r = \infty$ y $\beta = \frac{z_m^2}{\lambda}$.

El anterior cálculo ilustra nuestra propuesta de extender el concepto de loop de Wilson y sus aplicaciones al problema del par quark-antiquark desde una correspondencia AdS/CFT basada en la RG en el vacío o en un espacio AdS puro a la gravedad de Born-Infeld en presencia de electromagnetismo. Evidentemente, las integraciones envuelven varios parámetros sobre los que hay que hacer estimaciones para poder resolverlas numéricamente.

12.3 Operadores duales

12.3.1 Respuesta lineal

Comencemos recordando algunos conceptos generales relacionados con la teoría de perturbaciones y la respuesta lineal de un sistema ante dichas perturbaciones [301, 322, 253] y su extensión al contexto AdS/CFT [268, 120]. Consideremos entonces en el contexto de la mecánica cuántica un operador, en general función del espacio y el tiempo, que denotaremos genéricamente como $O(t, x)$ y que estará asociado a alguno de los observables del sistema físico. Nos interesa la variación en el valor medio observado de dicho operador entre un estado inicial ($\langle O \rangle$) caracterizado por $t \rightarrow -\infty$ (momento en el que se introduce en el sistema la fuente de la perturbación $\Phi^0(t, x)$) y cualquier otro instante posterior. Dicha evolución temporal puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \delta \langle O(t, x) \rangle &= \langle O(t, x) \rangle_S - \langle O \rangle = \\ &= i \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 X \theta(t - T) \langle [O(t, x), O(T, X)] \rangle \Phi^0(T, X) \end{aligned} \quad (12.29)$$

Introduciendo la función de Green retardada G_R^{00} [179] como:

$$G_R^{00}(t - T, X - x) = -\theta(t - T) \langle [O(t, x), O(T, X)] \rangle \quad (12.30)$$

Siendo $\theta(t - T)$ la función paso [265] introducida para asegurar la causalidad del proceso. Reescribamos entonces (12.29) como:

$$\delta \langle O(t, x) \rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 X G_R^{00}(t - T, X - x) \Phi^0(T, X) \quad (12.31)$$

Expresada de esta forma, vemos que la respuesta en (t, x) del sistema a la perturbación es transmitida por la función de Green desde (T, X) (punto del espacio-tiempo en el que la fuente está actuando). La respuesta del sistema se obtiene entonces integrando sobre todos los valores del espacio-tiempo el producto de la fuente por la función de Green. Es por ello que la función de Green se interpreta como una función de correlación espacio-temporal a dos puntos, y como comentábamos en la sección anterior, no representa un observable del sistema al no ser invariante gauge. A partir de (12.31) podemos, asimismo, introducir la función de Green en el espacio de momentos como la correspondiente transformada de

Fourier:

$$\begin{aligned}\delta \langle O(k) \rangle &= -G_R^{00}(k) \Phi^0(T, X) \\ G_R^{00}(k) &= -i \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x e^{i\omega t - i q x} \langle [O(t, x), O(0, 0)] \rangle\end{aligned}\quad (12.32)$$

12.3.2 Relación GKP-Witten

Veamos ahora como introducir los conceptos de respuesta líneal y de evolución temporal desarrollados en la sección anterior en el contexto AdS/CFT. Para ello partimos nuevamente de (4.69). La igualdad entre funciones de partición puede expresarse como [197]:

$$\langle \exp \left[\int d^d x \Phi^0(x) O(x) \right] \rangle_{QFT} = \exp \left[-S_{Grav}[\Phi^0(x)] \right] \quad (12.33)$$

Consideremos Φ_E como un campo de materia definido en el lado de la gravedad y en la signatura euclidea, y $\Phi^0(x)$ su valor en la frontera:

$$\Phi^0(x) = \lim_{r \rightarrow \infty} \Phi_E(x) \quad (12.34)$$

Tenemos entonces que el campo de materia definido en el seno de la teoría de la gravedad en $d + 1$ dimensiones va a jugar en el lado de la teoría gauge el papel de fuente de la perturbación externa, generando una acción en el lado gauge mediante su acoplamiento al operador $O(x)$, que se contituye así en el operador dual del campo $\Phi_E(x)$. La función de correlación a un punto del operador $O(x)$ en presencia de la fuente se obtiene derivando ambos lados de la relación de Witten con respecto a Φ^0 :

$$\langle O(x) \rangle_{\Phi^0} = -\frac{\delta S_{Grav}}{\delta \Phi^0} \quad (12.35)$$

Donde la acción gravitatoria se evalua “on shell” y para el valor $\Phi^0(x)$ en la frontera. En mecánica clásica [153] sabemos que la derivada de una acción “on shell” con respecto a un determinado campo evaluado en la frontera es igual al momento conjugado evaluado en la frontera:

$$\frac{\delta S_{Grav}}{\delta \Phi^0} = \int dr dt dx \frac{\delta \mathcal{L}_{Grav}}{\delta \Phi^0} = \int dr dt dx \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta \mathcal{L}_{Grav}}{\delta \dot{\Phi}^0} \right) = \lim_{r \rightarrow \infty} \Pi_E(r, x)_{\Phi_E(x)} \quad (12.36)$$

Es decir:

$$\langle O(x) \rangle_{\Phi^0} = \lim_{r \rightarrow \infty} \Pi_E(r, x)_{\Phi_E(x)} \quad (12.37)$$

A primer orden en Φ^0 , es decir, en el marco de una teoría de respuesta lineal, la anterior ecuación pasa a escribirse en el espacio de momentos como [197]:

$$G_E(\omega_E, k) = -\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\Pi_E(r, k) \Phi_E}{\Phi_E(r, k)} \right)_{\Phi_0=0} \quad (12.38)$$

Donde el momento conjugado debe ser evaluado en la solución Φ_E y el subíndice $\Phi_0 = 0$ debe interpretarse en el sentido de que al evaluar el cociente sólo debemos quedarnos con la parte que es independiente de Φ_0 : en una teoría de interacción en el “bulk”, tanto Π_E como Φ_E contienen típicamente potencias superiores de Φ_0 que no son relevantes para las funciones de correlación a dos puntos.

La relación GKP-Witten está escrita en su formulación original en la signatura euclídea, pero si estamos interesados en un estudio de la dinámica es conveniente pasar dicha relación a la signatura de Lorentz. Existen importantes diferencias entre ambas formulaciones, en particular en lo que tiene que ver con las condiciones de contorno, tanto en la frontera como en el horizonte. En ese sentido en la formulación lorentziana del problema es necesario incluir en el horizonte la llamada condición “in falling” es decir, de función de onda entrante, basada en la condición física de que nada puede emerger desde el interior del horizonte [268, 197]. En lo que respecta a la frontera no hay diferencias entre ambas signaturas y es suficiente con la anterior condición de Dirichlet (12.34). El paso de la signatura euclídea a la signatura lorentziana se obtiene por prolongación analítica de ω al plano complejo: la función de Green retardada es analítica en el semiplano superior complejo [179] de forma que $G_R(\omega, k)$ puede determinarse a partir de la relación [197]:

$$G_E(\omega_E, k) = G_R(i\omega_E, k) \quad (12.39)$$

Con $\omega_E > 0$ y su inversa:

$$G_R(\omega, k) = G_E(\omega_E, k)_{\omega_E = -i(\omega + i\varepsilon)} \quad (12.40)$$

La misma prolongación analítica se aplica al campo $\Phi_E(\omega_E, k)$, es decir:

$$\Phi_R(\omega, k) = \Phi_E(\omega_E, k)_{\omega_E = -i(\omega + i\varepsilon)} \quad (12.41)$$

Y la función de Green retardada en el espacio de momentos y en la signatura lorentziana es inmediata usando (12.38), (12.40) y (12.41):

$$\begin{aligned}
G_R(\omega, k) &= -\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\Pi_E(r, k) \Phi_E}{\Phi_E(r, k)} \right)_{\omega_E = -i(\omega + i\varepsilon)} \\
&= \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\Pi(r, k) \Phi_R}{\Phi_R(r, k)} \right)
\end{aligned} \tag{12.42}$$

Donde el cambio de signo en la última igualdad es debido a al cambio en el signo de la acción lorentziana respecto a la acción euclidea al hacer la sustitución $t = it_E$

12.3.3 Función de Green en GBI

Consideremos ahora elecciones concretas para los escenarios generales apuntados en la sección anterior. En el lado derecho de (12.33) vamos a situar como teoría de la gravedad, al igual que hacíamos para ilustrar el cálculo del loop de Wilson, las soluciones GBI con el electromagnetismo de Maxwell en $2 + 1$ dimensiones [49]. Consideremos entonces en dicha solución la presencia de un fermión no masivo caracterizado por una función de onda espinorial Ψ . En la frontera 2-dimensional tendremos entonces un campo fermiónico χ_0 acoplado al correspondiente operador dual, lo que estructurará la acción en el lado izquierdo de (12.33) es decir, la respuesta líneal a una perturbación de la teoría gauge. Podremos entonces escribir una relación GKP-Witten del estilo [197]:

$$\langle \exp \left[\int d^d x (\bar{\chi}_0 O + \bar{O} \chi_0) \right] \rangle_{QFT} = \exp \left[-S_{Grav}[\bar{\chi}_0, \chi_0] \right] \tag{12.43}$$

Más explícitamente: en el lado de la gravedad la acción de la materia fermiónica vendrá dada por (4.11) y la teoría gauge dual describe en general un sistema continuo en $(1 + 1)$ dimensiones que puede utilizarse para modelizar distintos escenarios en la materia condensada: dependiendo del comportamiento fermiónico en el lado de la gravedad, dicha teoría describirá estados asociados a líquidos de Fermi o de Luttinger [214, 242, 238]. Tendremos entonces del lado de la gravedad la solución “à la Palatini” de la gravedad GBI acoplada al electromagnetismo de Maxwell [49] y que describíamos por (12.24). Fijemos en primer lugar la elección de gauge para el potencial electrostático $\Phi(r) = \int F^{tr} dr$ haciendo $A_0(r = r_+) = 0$ (esto es, una elección de gauge en la cual el potencial se anula en el horizonte), usando (10.14) y (10.22) un cálculo directo nos lleva a :

$$A_0(r) = -\Phi(r) = -Q \ln \frac{r}{r_+} - \frac{\varepsilon}{8} Q^4 \left(\frac{1}{r_+^2} - \frac{1}{r^2} \right) \tag{12.44}$$

Introduzcamos ahora las variables adimensionales $\{t', z, x'\}$ definidas como:

$$\begin{aligned}
z &= \frac{r_+}{r} \\
t' &= \frac{r_+}{L^2} t \\
x' &= \frac{r_+}{L^2} x = \frac{r_+}{L} \theta
\end{aligned} \tag{12.45}$$

Sustituyendo (12.45) en (12.24) y (12.44) y tras renombrar las variables con tilde recién introducidas para aligerar la notación podemos reescribir el elemento de línea y el potencial como:

$$ds_{BI}^2 = -\frac{1}{z^2} f(z) L^4 dt^2 + \frac{dz^2}{z^2} \frac{1}{\Omega_-(z) f(z)} + \frac{L^2}{z^2} dx^2 \tag{12.46}$$

$$A_0(z) = Q \ln z - \frac{Q^2}{2} \left(\frac{r_m}{r_+} \right)^2 (z^2 - 1) \tag{12.47}$$

Siendo:

$$\begin{aligned}
\Omega_-(z) &= \left(\lambda - \left(\frac{z}{z_m} \right)^2 \right)^2 \\
f(z) &= \delta \left\{ -\sigma z^2 + \frac{r_+^2}{L^2} + \frac{Q^2}{8} \frac{z^4}{z_m^2} + \frac{Q^2}{2} z^2 \ln z - \frac{Q^2}{4} z^2 \ln(z_{min}^2 - z^2) \right\}
\end{aligned} \tag{12.48}$$

Con $\sigma = M + \frac{Q^2}{2} \ln \frac{r_m}{L}$ y $\delta = \frac{1}{1 - \left(\frac{z}{z_{min}} \right)^4} \frac{1}{r_+^2}$. Planteamos entonces la ecuación de Dirac como:

$$\left[\hat{\gamma}^\mu (\partial_\mu + \frac{1}{8} e_a^\nu (\partial_\mu \hat{e}_{b\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\rho e_{b\rho}) [\gamma^a, \gamma^b] - iqA_\mu) \right] \Psi(x) = 0 \tag{12.49}$$

Con :

$$\begin{aligned}
\gamma^0 &\equiv \gamma^t = i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
\gamma^1 &\equiv \gamma^z = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
\gamma^2 &\equiv \gamma^x = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{12.50}$$

Usando (12.46) tendremos:

$$e_a^\mu = \begin{pmatrix} \frac{z}{L^2\sqrt{f}} & 0 & 0 \\ 0 & z\sqrt{f}\sqrt{\Omega_-} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{z}{L} \end{pmatrix} \quad (12.51)$$

Para la función de onda del fermión (espinor en dos dimensiones) hacemos el ansatz [250]:

$$\begin{pmatrix} \psi_1(r,t) \\ \psi_2(r,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\omega t} e^{ikx} \psi_1(z) \\ e^{-i\omega t} e^{ikx} \psi_2(z) \end{pmatrix} \quad (12.52)$$

Con todo ello, usando (12.46) y (12.49) en (12.52) un poco de álgebra nos lleva a a escribir la ecuación de Dirac como:

$$\begin{aligned} iz \left[\frac{\omega}{L^2} - \frac{k}{L} \sqrt{f} + \frac{\mu}{L^2} \Theta(z) \right] \psi_2(z) &= \left[zf\sqrt{\Omega_-} \frac{\partial}{\partial z} - f\sqrt{\Omega_-} + \frac{z}{4} \frac{\partial f}{\partial z} \sqrt{\Omega_-} \right] \psi_1(z) \\ iz \left[\frac{\omega}{L^2} + \frac{k}{L} \sqrt{f} + \frac{\mu}{L^2} \Theta(z) \right] \psi_1(z) &= \left[zf(\sqrt{\Omega_-}) \frac{\partial}{\partial z} - f\sqrt{\Omega_-} + \frac{z}{4} \frac{\partial f}{\partial z} \sqrt{\Omega_-} \right] \psi_2(z) \end{aligned} \quad (12.53)$$

Siendo $\mu \equiv qQ$ y $\Theta(z) \equiv \ln(z) - \frac{Q}{2z_m^2}(z^2 - 1)$. Buscamos desacoplar las ecuaciones (12.53): para ello, introducimos el cambio de variable $\hat{\psi}_{1,2} = e^{-\xi} \psi_{1,2}$ con ξ dada por:

$$\begin{aligned} \xi &= \int_a^z \frac{dt}{tf(t)} \left[f(t) - \frac{1}{4} t f'(t) \right] = \\ &= \ln z - \frac{1}{4} \ln f(z) + K(a) \end{aligned} \quad (12.54)$$

Con $K(a)$ una constante arbitraria. Las ecuaciones (12.53) pueden entonces reescribirse como:

$$\begin{aligned} zf\sqrt{\Omega_-} \frac{\partial \hat{\psi}_1}{\partial z} &= iz \left(\frac{\omega}{L^2} + \frac{\mu}{L^2} \Theta(z) - \frac{k}{L} \sqrt{f} \right) \hat{\psi}_2(z) \\ f\sqrt{\Omega_-} \frac{\partial \hat{\psi}_2}{\partial z} &= iz \left(\frac{\omega}{L^2} + \frac{\mu}{L^2} \Theta(z) + \frac{k}{L} \sqrt{f} \right) \hat{\psi}_1(z) \end{aligned} \quad (12.55)$$

Haciendo el nuevo cambio $\hat{\psi}_1(z) = e^{S(z)}$ tenemos:

$$\begin{aligned}
zf\sqrt{\Omega_-}e^S\frac{\partial S}{\partial z} &= iz\left(\frac{\omega}{L^2} + \frac{\mu}{L^2}\Theta(z) - \frac{k}{L}\sqrt{f}\right)\hat{\psi}_2(z) \\
zf\sqrt{\Omega_-}\frac{\partial \hat{\psi}_2}{\partial z} &= iz\left(\frac{\omega}{L^2} + \frac{\mu}{L^2}\Theta(z) + \frac{k}{L}\sqrt{f}\right)e^S
\end{aligned} \tag{12.56}$$

Lo que implica:

$$\hat{\psi}_2(z) = \frac{e^S\frac{\partial S}{\partial z}f(z)\sqrt{\Omega_-}}{i\left(\frac{\omega}{L^2} + \frac{\mu}{L^2}\Theta(z) - \frac{k}{L}\sqrt{f}\right)} \tag{12.57}$$

Para calcular $\frac{\partial \hat{\psi}_2}{\partial z}$ hacemos el ansatz [250] de que la mayor contribución a la derivada viene del término que deriva sobre la exponencial (esto es, que la derivada de la función $S(z)$ va a ser muy fluctuante sobre el horizonte):

$$\frac{\partial \hat{\psi}_2}{\partial z} \simeq e^S \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 f(z)\sqrt{\Omega_-}}{i\left(\frac{\omega}{L^2} - \frac{\mu}{L^2}\Theta(z) - \frac{k}{L}\sqrt{f}\right)} \tag{12.58}$$

Sustituyendo en la segunda de las ecuaciones (12.56) tenemos:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = \frac{k^2 - \frac{\left[\frac{\omega}{L^2} + \frac{\mu}{L^2}\Theta(z)\right]^2}{\text{Abs}[f(z)]}}{\Omega_- \text{Abs}[f(z)]} \tag{12.59}$$

Lo que nos permite escribir una expresión explícita para la función $G(z) = i\frac{\psi_-(z)}{\psi_+(z)}$:

$$G(z) = \frac{f(z)\sqrt{\Omega_-}}{\left(\frac{\omega}{L^2} + \frac{\mu}{L^2}\Theta(z) - \frac{k}{L}\sqrt{f(z)}\right)} \left\{ \frac{k^2 - \frac{\left[\frac{\omega}{L^2} + \frac{\mu}{L^2}\Theta(z)\right]^2}{\text{Abs}[f]}}{\Omega_- \text{Abs}[f]} \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{12.60}$$

El espinor de Dirac en el “bulk” obtiene su contrapartida en la teoría gauge dual de la frontera en forma de un operador fermiónico [141, 140, 242] cuya función de Green retardada puede calcularse como [197]:

$$G_R = \lim_{z \rightarrow 0} i \frac{\psi_-(z)}{\psi_+(z)} = \lim_{z \rightarrow 0} G(z) \tag{12.61}$$

Usando (12.60) y la forma de las funciones $f(z)$ y $\Theta(z)$ un cálculo directo nos lleva a escribir (12.61) como:

$$G_R = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{A(z)}{B(z)C(z)} \quad (12.62)$$

Con:

$$\begin{aligned} A(z) &= \left(\frac{r_+^2}{L^2} + \frac{1}{2} Q^2 z^2 \ln \frac{z}{z_{min}} \right) \sqrt{\frac{k^2}{L^2} - \frac{1}{L^4} \frac{\left(\mu \left(\ln z - \frac{Q^2(z^2-1)}{z_{min}^2} \right) + \omega \right)^2}{\text{Abs} \left[\frac{\frac{r_+^2}{L^2} + \frac{1}{2} Q^2 z^2 \ln \frac{z}{z_{min}}}{r_+^2} \right]}} \\ B(z) &= r_+^2 \sqrt{\text{Abs} \left[\frac{\frac{r_+^2}{L^2} + \frac{1}{2} Q^2 z^2 \ln \frac{z}{z_{min}}}{r_+^2} \right]} \\ C(z) &= -\frac{k}{L} \sqrt{\text{Abs} \left[\frac{\frac{r_+^2}{L^2} + \frac{1}{2} Q^2 z^2 \ln \frac{z}{z_{min}}}{r_+^2} \right]} + \frac{\mu}{L^2} \left(\ln z - \frac{Q^2(z^2-1)}{z_{min}^2} \right) + \frac{\omega}{L^2} \end{aligned} \quad (12.63)$$

Cuyo valor en el límite GR ($z_{min} = \infty$) se simplifica considerablemente para dar:

$$G_R = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sqrt{k^2 - (\omega + \mu \ln z)^2}}{\omega + \mu \ln z - k} \quad (12.64)$$

El valor de la función de Green en el horizonte ($z = 1$) es asimismo sencillo de calcular a partir de (12.60):

$$G(z = 1) = i \quad (12.65)$$

Que coincide con el resultado encontrado en las condiciones más generales en el contexto de GR [250]. A partir de las ecuaciones acopladas (12.53) un cálculo directo nos permite escribir la ecuación diferencial exacta que sigue la función $G(z)$:

$$\begin{aligned} 0 &= \\ &= z f(z) \sqrt{\Omega_-} \frac{\partial G(z)}{\partial z} + z G(z)^2 \left(\frac{\omega}{L^2} + \frac{\mu}{L^2} \Theta(z) - \frac{k}{L} \sqrt{f(z)} \right) + \\ &+ z \left(\frac{\omega}{L^2} + \frac{\mu}{L^2} \Theta(z) + \frac{k}{L} \sqrt{f(z)} \right) \end{aligned} \quad (12.66)$$

Que junto con la condición de contorno en el horizonte (12.65) permite una resolución exacta usando métodos numéricos para obtener el límite $z \rightarrow 0$. En este sentido conviene

indicar que la presencia de la materia rompe la invariancia conforme de la teoría [250]: en la práctica esto se traduce en que la función de Green dada por (12.64) va a diverger logarítmicamente en el infinito y tendremos que incorporar un parámetro de corte en la variable z para estimar numéricamente el valor correspondiente en la frontera y calcular con ello el operador dual del campo fermiónico.

Capítulo 13

GBI con campo escalar en 2+1

13.1 Introducción

La búsqueda de soluciones a las ecuaciones de Einstein propias de la Relatividad General en las que el lagrangiano de gravedad se acopla a diferentes fuentes de materia es, hablando en términos generales, un problema de difícil resolución cuando se trabaja en un espacio-tiempo de $(3 + 1)$ dimensiones. Esta es la razón por la que en las dos últimas décadas la adopción de un marco de trabajo menos ambicioso en lo que respecta a la dimensionalidad del espacio-tiempo y el estudio en $(2 + 1)$ dimensiones ha arrojado resultados muy aprovechables en un amplio rango de escenarios en lo que se refiere al sector de la materia. Dado este estado de la cuestión, las soluciones obtenidas por Bañados Teitelboim y Zanelli, (BTZ) [257, 40, 41] para el campo electromagnético son de especial interés y han sido asimismo ampliamente investigadas en el contexto general de la gravedad modificada, tanto en gravedad GBI [168, 49], gravedad $f(R)$ [377], CFT's [250], gravedad rainbow [186], dilatones [122, 264], teleparalelismo y teorías $f(T)$ [158], geometrías no abelianas [311], o teorías de Brans-Dicke [123]. Las soluciones BTZ pueden encontrarse ampliamente analizadas en las monografías de Carlip [88] y de Witten [367]. Más allá del electromagnetismo de Maxwell, soluciones para RG acoplada a materia que responde a estructuras $SU(N)$ (soluciones de las conocidas como ecuaciones de Einstein-Yang-Mills), han sido estudiadas en espacio-tiempos de $(2 + 1)$ dimensiones [367].

En este capítulo, investigamos soluciones para un campo escalar libre cuyo lagrangiano asociado no es lineal en el término cinético, tanto en el contexto de la RG como en el de la gravedad GBI. Discutiremos la estructura de los invariantes de curvatura asociados así como de las geodésicas, que se muestran como incompletas en ambos casos: en el primero encontramos una estructura muy sencilla que, en apariencia, no presenta horizontes y está dominada por una singularidad desnuda. En el segundo caso la gravedad de Born-Infeld

genera una estructura de tipo agujero de gusano que es atravesable, pero incapaz de corregir las patologías de las geodésicas que ya se manifestaban en la solución en el contexto RG.

En lo que respecta al sector de la materia, por tanto, nuestro trabajo en esta sección se va a centrar en el acoplamiento a un campo escalar. En este punto, es conveniente observar el hecho de que en muchas de las referencias que tratan este contexto [170, 324, 172] se considera un lagrangiano de materia constituido por un término cinético en derivadas del campo y un término de potencial de tipo Liouville, ($\mathcal{L} \simeq -\frac{1}{2}\partial_\mu\psi\partial^\mu\psi - \lambda e^{-\alpha\psi}$). El caso $\alpha = 0$ puede verse como un campo escalar libre en una geometría espacio-temporal con una constante cosmológica no nula, caracterizada por el parámetro λ . Nuestra aproximación en este trabajo seguirá una línea diferente, inspirada por el concepto de geón de Wheeler [365, 262]. Consideraremos un campo escalar en el que únicamente el término cinético está presente. Nuestro ansatz se completa con la propuesta de no linealidad en el mencionado término de materia:

$$S_M = -\frac{1}{2} \int d^3x \sqrt{-g} L(Y) \quad (13.1)$$

Con $L(Y) = Y^\alpha$ y $Y = g^{\mu\nu}\partial_\mu\psi\partial_\nu\psi$. Determinaremos el parámetro α requiriendo que, a grandes distancias, se recupere el escenario minkowskiano.

13.2 Acción, ecuaciones de campo y soluciones

Comencemos entonces proponiendo la acción:

$$S_T = \frac{1}{2k^2} \int d^3x \sqrt{-g} R(g) - \frac{1}{2\eta} \int d^3x \sqrt{-g} L(Y) = S_{GR} + S_M \quad (13.2)$$

con η un parámetro con dimensiones de longitud al cuadrado, introducido únicamente por motivos de coherencia dimensional, (finalmente podremos considerar $\eta = 1$ sin perder generalidad). En el sector de la materia introducimos un campo escalar, ϕ y algún tipo de dependencia funcional contenida en el término cinético $g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$ dada por la relación $L(Y) = L(g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi)$. Las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas son:

$$\partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\phi} = \frac{\partial(\sqrt{-g} L_Y g^{\mu\nu} \partial_\mu\phi)}{\partial x^\nu} = 0 \quad (13.3)$$

con $L_Y \equiv \frac{\partial L}{\partial Y}$. Asumiendo un campo escalar estático y radial y un sistema de coordenadas dado por $\{t, x, \theta\}$, la última ecuación puede reescribirse como:

$$\partial_x (\sqrt{-g} g^{xx} L_Y \phi_x) = 0 \quad (13.4)$$

para el elemento de línea utilizamos un ansatz inspirado en la elección de Wyman [371] pero con modificaciones que resultarán cruciales para obtener soluciones:

$$ds^2 = -e^{v(x)} dt^2 + e^{v(x)} \frac{L_Y^2}{W^2(x)} dx^2 + \frac{1}{W^2(x)} d\theta^2 \quad (13.5)$$

con v y W ciertas funciones de la coordenada radial x . Esta “inusual” forma del elemento de línea se justifica en el hecho de que conduce a una ecuación muy simple para el campo escalar: $\phi_{xx} = 0$ de forma que podemos escoger $\phi(x) \equiv x$ sin perder generalidad. Las dimensiones de ϕ son las de una longitud y en lo que respecta a la función Y tenemos:

$$Y = g^{xx} \phi_x^2 = g^{xx} = W^2(x) e^{-v(x)} \frac{1}{L_Y^2} \quad (13.6)$$

Para el tensor energía-momento, (2.17) se escribe como :

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\eta} (L_Y Y_V^\mu - \frac{L}{2} \delta_V^\mu) \quad (13.7)$$

con $Y_V^\mu \equiv \partial^\mu \phi \partial_V \phi$. Como siguiente paso escribamos las ecuaciones de Einstein (2.18). Definiendo $\sigma = \frac{k^2}{\eta}$ y usando (13.7) tenemos:

$$R_V^\mu(g) = \sigma [L_Y Y_V^\mu + \delta_V^\mu (L - Y L_Y)] \quad (13.8)$$

ahora podemos utilizar el ansatz de Wyman, calcular con xAct el lado izquierdo de esta expresión y encontrar el conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} R_t^t &= \frac{1}{2L_Y^3} e^{-v} W^2 (L_{Yx} v_x - L_Y v_{xx}) \\ R_x^x &= \frac{1}{2L_Y^3} e^{-v} \left[-2L_Y W_x^2 - 2W (L_{Yx} W_x + L_Y (W_x v_x - W_{xx})) \right] + \\ &\quad + W^2 (L_{Yx} v_x - L_Y v_{xx}) \\ R_\theta^\theta &= -\frac{1}{L_Y^3} e^{-v} [L_Y W_x^2 + W (L_{Yx} W_x - L_Y W_{xx})] \end{aligned} \quad (13.9)$$

con $L_{Yx} \equiv \frac{\partial L_Y}{\partial x}$ y la misma notación para el resto de derivaciones implicadas. Considerando la componente R_t^t se tiene $v_{xx} - v_x \frac{L_{Yx}}{L_Y} = -2\sigma \frac{(L-YL_Y)}{Y}$ y evaluando $R_x^x - R_t^t - R_\theta^\theta$ encontramos:

$$\begin{aligned} \frac{v_{xx}}{v_x} - \frac{L_{Yx}}{L_Y} &= -2 \frac{W_x}{W} \frac{(L-YL_Y)}{L-2YL_Y} \\ v_x \frac{W_x}{W} &= \sigma \frac{(L-2YL_Y)}{Y} \end{aligned} \quad (13.10)$$

consideremos ahora que $L(Y)$ representa toda una familia de funciones con la estructura $L(Y) = C_1 Y^\alpha$ (con $[C_1]$ =inversa de longitud). Dicha sustitución nos lleva a la ecuación :

$$\frac{v_{xx}}{v_x} - \frac{L_{Yx}}{L_Y} = \frac{1-\alpha}{1-2\alpha} \quad (13.11)$$

lo que permite una primera integración:

$$v_x = L_Y C_0 W^{-2 \frac{(1-\alpha)}{1-2\alpha}} \quad (13.12)$$

donde las dimensiones de la constante C_0 dependen de los valores numéricos de α . Sustituyendo en (13.10) tenemos, tras un cálculo directo:

$$v_W = \frac{dv}{dW} = C_0^2 \frac{YL_Y^2}{\sigma W} \frac{W^{-4 \frac{(1-\alpha)}{1-2\alpha}}}{(L-2YL_Y)} \quad (13.13)$$

usando $L(Y) = C_1 Y^\alpha$ y la relación $W^2 e^{-v} = YL_Y^2$ encontramos las relaciones:

$$\begin{aligned} Y &= \left(\frac{W^2 e^{-v}}{\alpha^2 C_1^2} \right)^{\frac{1}{2\alpha-1}} \\ L-2YL_Y &= C_1 (1-2\alpha) Y^\alpha \end{aligned} \quad (13.14)$$

sustituyendo en (13.11) y después de un poco de álgebra obtenemos:

$$v_W = \frac{dv}{dW} = C_1^{(1-2\alpha)} \frac{C_0^2 \alpha^{\frac{2\alpha}{2\alpha-1}}}{\sigma (1-2\alpha)} W^{\frac{3-4\alpha}{2\alpha-1}} e^{v \frac{(1-\alpha)}{2\alpha-1}} \quad (13.15)$$

definiendo $K_1 = \frac{C_0^2}{\sigma} \frac{\alpha^{\frac{2\alpha}{2\alpha-1}}}{(1-2\alpha)} C_1^{1-2\alpha}$ podemos integrar nuevamente (13.15):

$$e^{v \frac{(\alpha-1)}{2\alpha-1}} = C_4 - \frac{K_1}{2} W^{2 \frac{(1-\alpha)}{2\alpha-1}} \quad (13.16)$$

con $C_4 = \frac{\alpha-1}{2\alpha-1}(C_3 K_1 - C_2)$. Si dividimos (13.12) y (13.15) e integramos obtenemos:

$$W(x) = (K_2 x + C_5)^{\frac{1-2\alpha}{2(\alpha-1)}} \quad (13.17)$$

con $K_2 = \frac{2\sigma}{C_0} \frac{(\alpha-1)}{\alpha}$ y C_5 una nueva constante de integración. Usando las expresiones explícitas para L_Y e Y encontramos $\frac{L_{Yx}}{L_Y} = \left(\frac{\alpha-1}{2\alpha-1}\right) \left(2\frac{W_x}{W} - v_x\right)$. Utilizando este resultado en (13.9) obtenemos la ecuación diferencial para $v(x)$:

$$\frac{v_{xx}}{v_x} + \beta v_x = 0 \quad (13.18)$$

con $\beta = \frac{\alpha-1}{2\alpha-1}$. Una nueva integración directa nos lleva a :

$$v(x) = \frac{1}{\beta} \ln \left(C_6 + \beta \frac{x}{x_0} \right) \quad (13.19)$$

con C_6 y x_0 nuevas constantes de integración. Una vez hemos determinado $v(x)$ y $W(x)$ podemos regresar al elemento de línea (13.5) y obtener expresiones explícitas para g_{tt} y g_{xx} :

$$\begin{aligned} g_{tt} &= - \left[C_4 - \frac{K_1}{2} W^{2\frac{(1-\alpha)}{2\alpha-1}} \right]^{\frac{2\alpha-1}{\alpha-1}} = - \left[C_4 - \frac{K_1}{2} (K_2 x + C_5) \right]^{\frac{2\alpha-1}{\alpha-1}} \\ g_{xx} &= (\alpha^2 C_1^2)^{\frac{1}{2\alpha-1}} \left[(K_2 x + C_5) \left(C_4 - \frac{K_1}{2} (K_2 x + C_5) \right) \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} \end{aligned} \quad (13.20)$$

La función $W(x)$ va a jugar el papel de una cierta coordenada radial $r(x)$ así que definimos $r^2(x) = \frac{1}{W^2(x)}$. A partir de (13.17) y tomando la función inversa encontramos:

$$x(r) = \frac{1}{K_2} \left(r^{\frac{2(\alpha-1)}{2\alpha-1}} - C_5 \right). \quad (13.21)$$

A continuación escribamos el elemento de línea en coordenadas de tipo Scharwzschild, $\{t, r, \theta\}$: teniendo en cuenta la naturaleza tensorial de la métrica bajo un cambio de coordenadas un cálculo directo nos lleva a :

$$g_{rr} = 4 \frac{(\alpha-1)^2}{K_2^2 (2\alpha-1)^2} (\alpha^2 C_1^2)^{\frac{1}{2\alpha-1}} \left(C_4 - \frac{K_1}{2} r^{\frac{2(\alpha-1)}{2\alpha-1}} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}. \quad (13.22)$$

Queremos recuperar el límite minkowskiano a grandes distancias por lo que resolvemos el parámetro α con la condición $\frac{\alpha-1}{2\alpha-1} = -1$ esto es $\alpha = \frac{2}{3}$. Utilizando este valor encontramos:

$$g_{rr} = 9 \frac{C_0^2}{\sigma^2} \left(\frac{2}{3}\right)^8 C_1^6 \left(C_4 + \frac{8}{27} C_1^3 \frac{C_0^2}{\sigma} \frac{1}{r^2}\right)^{-3}. \quad (13.23)$$

Además, si escogemos adecuadamente el valor de las constantes que hemos arrastrado durante todo el proceso como $R_0^2 = \frac{K_1}{2} = \frac{8}{27} C_1^3 \frac{C_0^2}{\sigma}$ y $C_4 = 9 \frac{C_0^2}{\sigma^2} \left(\frac{2}{3}\right)^8 C_1^6 = 1$ con R_0 una escala espacial general, entonces para la métrica se tiene:

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{R_0^2}{r^2}\right)^{-1} dt^2 + \left(1 + \frac{R_0^2}{r^2}\right)^{-3} dr^2 + r^2 d\theta^2 \quad (13.24)$$

lo que anuncia la existencia de una singularidad desnuda en el origen, algo no especialmente prometedor. Retornaremos a este punto en la próxima sección. Podemos plantearnos bajo que condiciones puede nuestro ansatz desembocar en algún tipo de soluciones tipo BTZ:

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + f(r)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 \quad (13.25)$$

con $f(r) = -m + \frac{r^2}{l^2}$. Para ello, retrocedemos hasta la expresión general de la métrica incluyendo el parámetro α y comprobamos que la condición $r^2 = r^2 \frac{(\alpha-1)}{2\alpha-1}$ debe en este caso cumplirse. Esto implica, obviamente $\alpha = 0$, pero este valor de α no tiene sentido en nuestro ansatz, ya que implicaría una componente g_{rr} idénticamente nula. Podemos entender este resultado si tenemos en cuenta que para obtener soluciones de tipo BTZ desde un campo escalar el ansatz usual en la bibliografía [170], introduce un potencial $V(r)$ asociado a un campo escalar y en el límite donde $V(r)$ cae a cero dicho término pasa a ser una constante que podemos identificar con la constante cosmológica Λ . Pero nosotros no estamos introduciendo ningún potencial asociado con el campo escalar, en su lugar estamos introduciendo no linealidad dinámicamente mediante un término cinético no canónico: la ausencia de potencial efectivo inhibe pues la existencia de soluciones de tipo BTZ. A continuación, exploraremos la forma que toman los invariantes de curvatura y las geodésicas en la geometría obtenida.

13.3 Geodésicas e invariantes de curvatura

El lagrangiano de una partícula puntual moviéndose a través de la geometría previamente discutida viene dado por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{h(r)} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{h(r)^3} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 \quad (13.26)$$

con $h(r) \equiv 1 + \frac{R_0^2}{r^2}$. Considerando las simetrías del lagrangiano, esto es, su carácter estático e invariante bajo rotaciones tenemos las constantes de movimiento:

$$\begin{aligned} E &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = \frac{1}{h(r)} \frac{dt}{d\tau} \\ J &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = r^2 \frac{d\theta}{d\tau} \end{aligned} \quad (13.27)$$

con $\{\dot{t}, \dot{\theta}\} \equiv \left\{ \frac{dt}{d\tau}, \frac{d\theta}{d\tau} \right\}$. Sustituyendo las constantes en la forma habitual de la velocidad:

$$U^\mu U_\mu = \frac{ds^2}{d\tau^2} = \varepsilon = \pm 1, 0 \quad (13.28)$$

y usando la relación entre tiempo propio y coordenado, encontramos finalmente la ecuación de las geodésicas a resolver:

$$\frac{dr}{d\tau} = \pm \sqrt{h(r) E^2 + \varepsilon h^3(r) - \frac{J^2}{r^2} h^3(r)} \quad (13.29)$$

para geodésicas nulas y radiales se cumple $\varepsilon = J = 0$ y (13.29) se puede escribir como:

$$\int E d\tau = \pm \int dr \frac{1}{h(r)^2} \quad (13.30)$$

que puede integrarse para dar $E \tau = g(r) - g(r_0)$ con:

$$g(r) = \pm \left(r + \frac{r R_0^2}{2(r^2 + R_0^2)} - \frac{3}{2} R_0 \arctan \frac{r}{R_0} \right) \quad (13.31)$$

donde r_0 es la posición inicial y el signo más (menos) corresponde a las geodésicas salientes (entrantes). Cuando nos aproximamos a valores de r muy próximos al parámetro característico, la naturaleza curva del espacio-tiempo comienza a ser evidente hasta que alcanzamos la singularidad desnuda en el origen de coordenadas, en donde, como veremos, la curvatura diverge fuertemente. La singularidad desnuda puede ser alcanzada en un valor finito del parámetro afín τ por lo que tenemos geodésicas incompletas. Para geodésicas temporales ($\varepsilon = -1$, $J = 0$) la ecuación a integrar puede escribirse como:

$$\tau(r) = \int dt = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{\left(1 + \frac{R_0^2}{r^2}\right)^4 E^2 - \left(1 + \frac{R_0^2}{r^2}\right)^3}} \quad (13.32)$$

integración que en general se resuelve en funciones elípticas. Podemos estudiar cualitativamente las soluciones clasificándolas según los valores de la energía: para $E \gg 1$ (cuando nos aproximamos al régimen relativista) podemos despreciar el segundo término bajo la raíz y automáticamente recobramos el comportamiento de las geodésicas nulas, alcanzando la singularidad desnuda en un tiempo propio finito.

Veamos la forma de los invariantes de curvatura: a partir de (13.24) podemos utilizar xAct para calcular fácilmente los escalares de de Ricci y Kretschmann:

$$\begin{aligned} R &= R^\mu{}_\mu = 10R_0^2 \frac{(r^2 + R_0^2)^2}{r^8} \\ K &= R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} = 76R_0^4 \frac{(r^2 + R_0^2)^4}{r^{16}} \end{aligned} \quad (13.33)$$

ambos divergentes sobre la singularidad desnuda $r = 0$.

13.4 Accion, ecuaciones de campo y soluciones en GBI

Consideremos ahora la acción GBI en $(2 + 1)$ dimensiones que introducíamos en (9.59) acoplada a la materia escalar descrita en el apartado anterior:

$$\begin{aligned} S_T = S_{BI} + S_M &= \frac{1}{k^2 \varepsilon} \int d^3r (\sqrt{-|g_{\mu\nu} + \varepsilon R_{\mu\nu}(\Gamma)|} - \lambda \sqrt{-g}) - \\ &- \int d^3r \sqrt{-g} \phi(X) \end{aligned} \quad (13.34)$$

como ya hemos comentado en la sección anterior, en lo que respecta al sector de la materia tenemos un término cinético relacionado con el campo escalar $\phi = \phi(x)$ con $X = g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$. El tensor energía-momento ya ha sido calculado en el apartado anterior (13.7) en el EF y el cálculo es totalmente análogo en el RF y como hemos analizado ya en capítulos anteriores, podemos introducir un cierto tensor de Einstein (5.40) que será función de $q_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \varepsilon R_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} G^\mu{}_\nu(q) &= R^\mu{}_\nu(q) - \frac{R(q)}{2} \delta^\mu{}_\nu = \\ &= \frac{k^2}{\sqrt{|\hat{\Omega}|}} \left[T^\mu{}_\nu - \frac{\delta^\mu{}_\nu}{2} (T + \mathcal{L}_G) \right]. \end{aligned} \quad (13.35)$$

Sustituyendo en esta última ecuación (13.7) encontramos:

$$G_v^\mu(q) = \frac{k^2}{\sqrt{|\widehat{\Omega}|}} \left[\varphi_X X_v^\mu - \frac{\delta_v^\mu}{2} \left(X \varphi_X + \mathcal{L}_G - \frac{\varphi}{2} \right) \right]. \quad (13.36)$$

El lado derecho de esta expresión es una función de la materia en su totalidad, o equivalentemente, de la métrica $g^{\mu\nu}$, mientras que el lado izquierdo está construido completamente en función de $q^{\mu\nu}$. Inspirados entonces en la discusión de la sección previa en el contexto de RG definimos:

$$\begin{aligned} \psi &\equiv \frac{1}{\sqrt{|\widehat{\Omega}|}} \left(X \varphi_X + L_G - \frac{\varphi}{2} \right) \\ \psi_Y Y_v^\mu &\equiv \frac{\varphi_X}{\sqrt{|\widehat{\Omega}|}} X_v^\mu \end{aligned} \quad (13.37)$$

siendo $Y_v^\mu \equiv q^{\mu\alpha} \partial_\alpha \phi \partial_v \phi$ y $Y \equiv Y_\mu^\mu$. Procediendo de esta forma podemos reescribir $G_v^\mu(q)$ como :

$$G_v^\mu(q) = k^2 \left[\psi_Y Y_v^\mu - \frac{\psi}{2} \delta_v^\mu \right] \quad (13.38)$$

y el problema contenido en esta ecuación ya lo hemos resuelto formalmente en contexto GR en el apartado anterior. Solo necesitamos darnos cuenta de que las soluciones previas para $g^{\mu\nu}$ juegan ahora el papel de soluciones para $q^{\mu\nu}$:

$$S_{BI} - \frac{1}{2} \int d^3r \sqrt{-g} \varphi(X) = S_{GR} - \frac{1}{2} \int d^3x \sqrt{-q} \psi(Y) \quad (13.39)$$

Esta correspondencia es, de nuevo, un ejemplo particular de una propiedad más general: el procedimiento de “mapping”: dada una teoría de la materia protagonizada por un campo escalar acoplado al lagrangiano GR siempre es posible mapear su espacio de soluciones al espacio de una teoría RBG de la gravedad modificada, “à la Palatini” [12]. En lo que respecta a la matriz de deformación, de acuerdo con (5.29) tendremos:

$$\begin{aligned} \left(\widehat{\Omega}^{-1} \right)_v^\mu &= \frac{1}{\sqrt{|\widehat{\Omega}|}} \left(\lambda \delta_v^\mu - k^2 \varepsilon T_v^\mu \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{|\widehat{\Omega}|}} \left[\left(\lambda + k^2 \varepsilon \frac{\varphi}{2} \right) \delta_v^\mu - k^2 \varepsilon \varphi_X X_v^\mu \right] \end{aligned} \quad (13.40)$$

¿Cómo reescribir entonces la anterior ecuación usando el campo ψ introducido en (13.37)? Tomando trazas en la segunda de dichas ecuaciones tenemos $\frac{\phi_x}{\sqrt{|\hat{\Omega}|}} X = \psi_Y Y$ y entonces la primera puede reescribirse como :

$$\psi_Y Y - \frac{\phi}{2\sqrt{|\hat{\Omega}|}} + \frac{\left(\sqrt{|\hat{\Omega}|} - \lambda\right)}{k^2 \varepsilon \sqrt{|\hat{\Omega}|}} = \psi \quad (13.41)$$

con $\psi = Y^\alpha$ y α un coeficiente a determinar. En la sección anterior encontrábamos la condición $\alpha = \frac{2}{3}$ para recuperar soluciones asintóticamente planas. Conviene remarcar el hecho de que este valor del parámetro α debe ser entonces puesto en correspondencia con el valor $\lambda = 1$ en el lado GBI pues es este valor el que nos devuelve a una geometría sin constante cosmológica. De la ecuación anterior se tiene $k^2 \varepsilon (\psi_Y Y - \psi) + 1 = \frac{1}{\sqrt{|\hat{\Omega}|}} (k^2 \varepsilon \phi + \lambda)$ y sustituyendo en (13.40) encontramos:

$$\left(\hat{\Omega}^{-1}\right)_{\nu}^{\mu} = \delta_{\nu}^{\mu} \left(k^2 \varepsilon (\psi_Y Y - \psi) + 1\right) - k^2 \varepsilon \psi_Y Y_{\nu}^{\mu} \quad (13.42)$$

ahora la matriz de deformación $\hat{\Omega}^{-1}$ está expresada en términos del campo escalar acoplado al tensor $q^{\mu\nu}$ con lo que podemos explotar los resultados previos en el contexto GR, usando $\psi(Y) = Y^\alpha$, $\psi_Y = \alpha Y^{\alpha-1} = \alpha (q^{xx})^{\alpha-1}$ y la relación

$$Y_{\nu}^{\mu} = q^{\mu\alpha} \partial_{\alpha} \phi \partial_{\nu} \phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13.43)$$

tendremos, para el caso $\alpha = \frac{2}{3}$ $\lambda = 1$:

$$\left(\hat{\Omega}^{-1}\right)_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} 1 - \delta Y^{\frac{2}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 3\delta Y^{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \delta Y^{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \quad (13.44)$$

donde hemos definido $\delta = \frac{k^2 \varepsilon}{3}$. Las componentes de $q^{\mu\nu}$ como ya hemos comentado, tienen la misma estructura que las de $g^{\mu\nu}$ en el contexto GR:

$$\hat{q} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{h(x)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h(x)^3} & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix} \quad (13.45)$$

siendo $h(x) \equiv 1 + \frac{R_0^2}{x^2}$. Recordando que $\hat{g} = \hat{q}\hat{\Omega}^{-1}$ es ahora una cuestión púramente algebraica obtener la expresión final para las componentes del tensor $g_{\mu\nu}$:

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} -\frac{1-\delta h(x)^2}{h(x)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-3\delta h(x)^2}{h(x)^3} & 0 \\ 0 & 0 & x^2 (1-\delta h(x)^2) \end{pmatrix} \quad (13.46)$$

lo que sirve de ilustración de la característica operativa más destacada del procedimiento que llamamos “mapping”: dada una solución semilla en el EF, ésta se promociona al papel del tensor $q_{\mu\nu}$ en el lado RBG y entonces la solución para $g_{\mu\nu}$ se obtiene, no ya por la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales derivadas de las ecuaciones de campo, sino por la resolución de un sistema de ecuaciones púramente algebraicas cuya estructura viene dada por el procedimiento de mapeo. Finalmente, definiendo la variable adimensional ($z = \frac{x}{R_0}$) y $f(z) \equiv (1 + \frac{1}{z^2})$ el elemento de línea vendrá dado por:

$$ds^2 = -\frac{1}{f(z)} [1 - \delta f(z)^2] dt^2 + \frac{1}{f(z)^3} [1 - 3\delta f(z)^2] R_0^2 dz^2 + R_0^2 z^2 [1 - \delta f(z)^2] d\theta^2 \quad (13.47)$$

13.5 Estructura de agujero de gusano asociada

La anterior expresión para el elemento de línea sugiere la introducción de una coordenada radial tipo Schwarzschild, definida por:

$$r^2(z) = R_0^2 z^2 \left(1 - \delta \left(1 + \frac{1}{z^2} \right)^2 \right) \quad (13.48)$$

consideremos en lo que sigue que el parámetro ε característico de la gravedad de Born-Infeld es negativo. De la anterior expresión podemos resolver $\frac{dr}{dz} = 0$ lo que nos da un cierto valor z_m dado por :

$$z_m = \left[\frac{|\delta|}{1+|\delta|} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (13.49)$$

es sencillo comprobar que $\left[\frac{d^2 r(x)}{dz^2} \right] > 0$ en $z = z_m$ lo que implica que $r(z)$ alcanza un valor mínimo. Esto nos sugiere la posible existencia de una estructura de tipo agujero de gusano [354]. Podemos invertir (13.48) para encontrar:

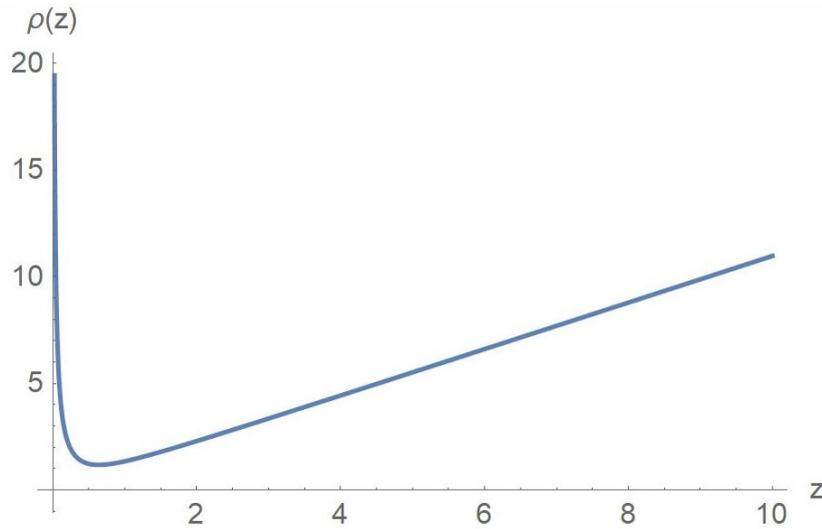


Fig. 13.1 $\rho(z) = \frac{r(z)}{R_0}$, $|\delta| = 0.2$

$$z^2 = \frac{R^2 - 2|\delta| \pm \sqrt{R^4 - 4|\delta| - 4R^2|\delta|}}{2(1 + |\delta|)} \quad (13.50)$$

donde el signo + es el adecuado para recuperar el límite correcto GR en el límite $|\delta| \rightarrow 0$.

Del gráfico 13.1 vemos claramente que $r(z)$ tiene un valor mínimo r_{min} dado por $r_{min} = \sqrt{2} |\delta|^{\frac{1}{4}} \sqrt{\sqrt{|\delta|} + \sqrt{|\delta| + 1}}$ desde donde crece rápidamente hasta alcanzar el infinito cuando $z = 0$. Es importante entonces comprobar si las geodésicas asociadas alcanzan la posición $z = 0$ en un tiempo propio finito, lo que nos daría (de nuevo) geodésicas incompletas. Vemos asimismo que la estructura de agujero de gusano no es simétrica, con la garganta localizada en $z = z_{min}$, una primera rama extendiéndose desde $+\infty$ hasta r_{min} y una segunda desde allí hasta $z = 0$. La ecuación (13.47) también informa de que la métrica es invariante bajo el cambio $z \rightarrow -z$: la extensión de la coordenada z al semieje negativo, no obstante, no ofrece ninguna información nueva sobre la física involucrada. En el momento en que el valor $z = 0$ es atravesado la coordenada $r(z)$ no alcanza un mínimo, por el contrario tenemos la componentes g_{tt} y $g_{\theta\theta}$ colapsando allí, mientras g_{zz} se anula.

13.6 Geodésicas e invariantes de curvatura

Utilizando (13.47), (13.26), (13.27) y (13.28) obtenemos la forma más general de las geodésicas asociadas a la geometría:

$$R_0^2 \left(\frac{dz}{d\tau} \right)^2 \frac{(1 + 3|\delta|f(z)^2)}{f(z)^3} = \varepsilon - \frac{J^2}{R_0^2 z^2 (1 + |\delta|f(z)^2)} + E^2 \frac{f(z)}{1 + |\delta|f(z)^2} \quad (13.51)$$

Para geodésicas radiales y nulas ($\varepsilon = J = 0$) tenemos:

$$\int E d\tau = \pm R_0 \int dz \frac{\sqrt{1 + |\delta| \left(1 + \frac{1}{z^2}\right)^2} \sqrt{1 + 3|\delta| \left(1 + \frac{1}{z^2}\right)^2}}{\left(1 + \frac{1}{z^2}\right)^2} \quad (13.52)$$

y para $\delta = 0$ recuperamos el límite GR de la sección anterior:

$$\int E d\tau = \pm \int dr \frac{1}{\left(1 + \frac{R_0^2}{r^2}\right)^2} \quad (13.53)$$

La integración analítica en (13.52) no es posible, pero podemos desarrollar en serie el integrando cerca de $z = 0$:

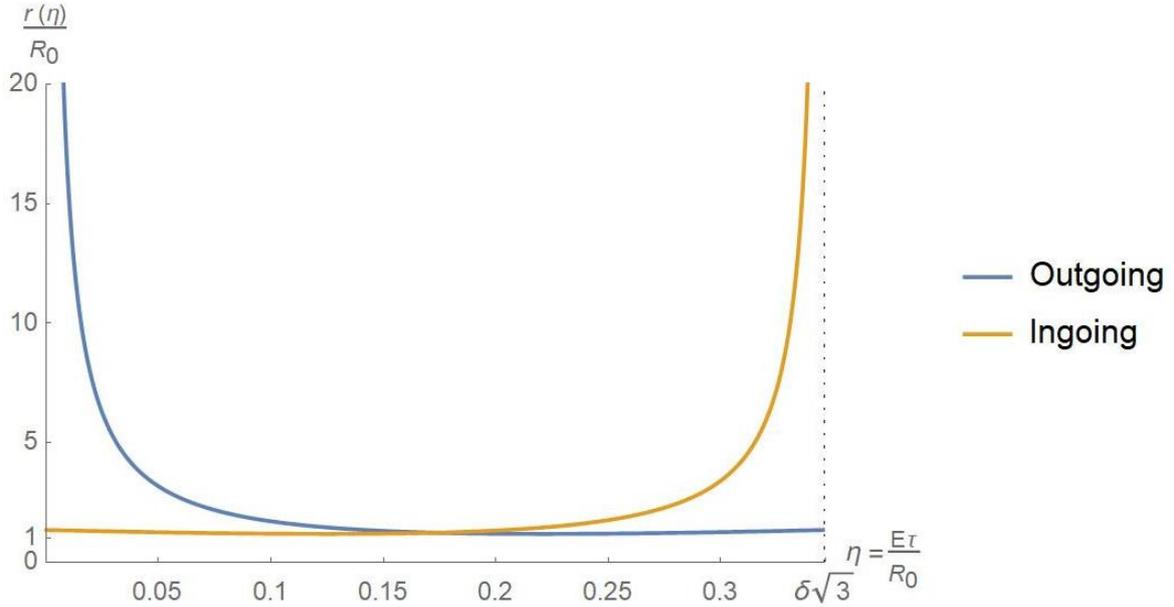
$$\frac{\sqrt{1 + |\delta| \left(1 + \frac{1}{z^2}\right)^2} \sqrt{1 + 3|\delta| \left(1 + \frac{1}{z^2}\right)^2}}{\left(1 + \frac{1}{z^2}\right)^2} \simeq \sqrt{3} |\delta| + O(z) \quad (13.54)$$

con lo que la integración nos lleva a :

$$E(\tau - \tau_0) = \pm \sqrt{3} R_0 |\delta| (z - z_0) \quad (13.55)$$

Para geodésicas entrantes $\tau_0 = 0$ obtenemos $E\tau = \sqrt{3} R_0 |\delta| (z_0 - z)$ y alcanzamos la singularidad desnuda en un tiempo propio finito dado por $\sqrt{3} R_0 \frac{|\delta|}{E} z_0$. De (13.47) y asumiendo $z_0 = 1$, obtenemos para la coordenada radial de Schwarzschild:

$$\frac{r(\eta)}{R_0} = \left(1 - \frac{\eta}{|\delta| \sqrt{3}}\right) \sqrt{1 + |\delta| \left(1 + \frac{1}{\left(1 - \frac{\eta}{|\delta| \sqrt{3}}\right)^2}\right)^2} \quad (13.56)$$

Fig. 13.2 Geodésicas nulas, ($\delta = 0.2$)

donde $\eta = \tau \frac{E}{R_0}$. La situación es entonces bastante similar para las geodésicas salientes. Considerando $z_0 = 0$ un cálculo directo nos lleva a :

$$\frac{r(\eta)}{R_0} = \frac{\eta}{|\delta| \sqrt{3}} \sqrt{1 + |\delta| \left(1 + \frac{3\delta^2}{\eta^2}\right)^2} \quad (13.57)$$

y la luz alcanza la singularidad desnuda en un tiempo afín finito. Vemos entonces que para las geodésicas entrantes la luz necesita un tiempo afín finito para alcanzar la posición $z = 0$ correspondiente a $r(x) = \infty$. De forma similar, en las geodésicas salientes la luz toma un tiempo propio finito en viajar desde $r(x) = \infty$ a cualquier valor de la coordenada de Schwarzschild. Esto acentúa la singularidad de la solución en $z = 0$. Finalmente podemos verificar que para geodésicas nulas radiales el valor $z = 0$ es alcanzado en un tiempo de Schwarzschild finito, luego nuevamente la hipótesis de censura cósmica no se ve salvaguardada.

$$ds^2 = 0 = -\frac{1}{f(z)} (1 + |\delta| f(z)^2) dt^2 + \frac{1}{f(z)^3} (1 + 3|\delta| f(z)^2) R_0^2 dz^2 \quad (13.58)$$

lo que implica:

$$dt = \pm R_0 dz \frac{\sqrt{1 + 3|\delta| \left(1 + \frac{1}{z^2}\right)^2}}{\left(1 + \frac{1}{z^2}\right) \sqrt{1 + |\delta| \left(1 + \frac{1}{z^2}\right)^2}} \quad (13.59)$$

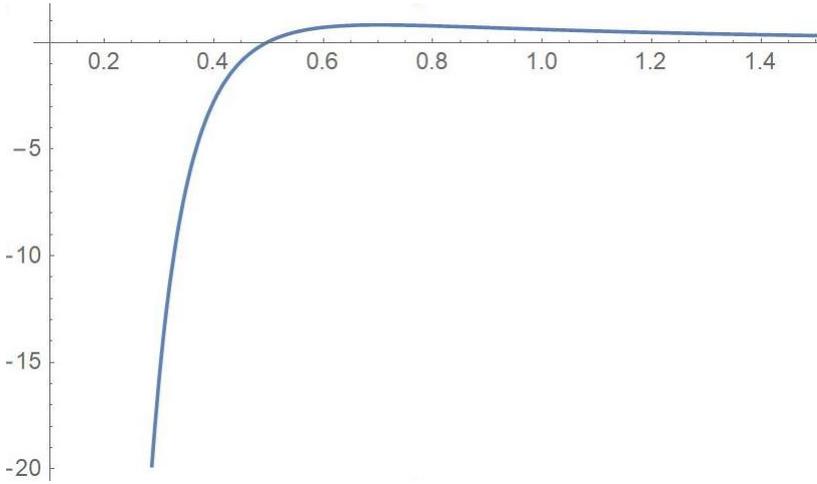


Fig. 13.3 Geodésicas radiales temporales: $F(z) = E^2(1 + \frac{1}{z^2}) - 1 - |\delta| (1 + \frac{1}{z^2})^2$ ($E = 1.1, |\delta| = 0.2$)

Para geodésicas entrantes, expandiendo (13.52) entorno a $z = 0$ e integrando obtenemos $t = \frac{\sqrt{3}}{3} R_0 (z_0^3 - z^3)$, resultado que nos da de nuevo un tiempo finito para alcanzar la singularidad. Revisemos brevemente el comportamiento de las geodésicas temporales radiales ($\varepsilon = -1, J = 0$). En este caso (13.52) se escribe como:

$$\frac{d\tau}{dz} = \sqrt{R_0 \frac{\left(1 + 3|\delta| \left(1 + \frac{1}{z^2}\right)^2\right) \left(1 + |\delta| \left(1 + \frac{1}{z^2}\right)^2\right)}{\left(1 + \frac{1}{z^2}\right)^3 \left(E^2 \left(1 + \frac{1}{z^2}\right) - 1 - |\delta| \left(1 + \frac{1}{z^2}\right)^2\right)}} \quad (13.60)$$

el factor $E^2(1 + \frac{1}{z^2}) - 1 - |\delta| (1 + \frac{1}{z^2})^2$ puede darnos problemas para valores negativos: antes de alcanzar la singularidad desnuda siempre existe un valor de z , a función de la energía de la partícula material y del parámetro de Born-Infeld δ por debajo del cual el tiempo propio pasa a ser imaginario, por lo que tenemos una nueva patología asociada a las soluciones de partículas materiales. Consideremos ahora el cálculo de la longitud propia. Tomando $dt = d\theta = 0$ en (13.47) tendremos:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dl^2 = \frac{1}{f(z)^3} \left(1 + 3|\delta| \left(1 + \frac{1}{z^2}\right)^2\right) R_0^2 dz^2 \\ \int dl &= \int R_0 dz \sqrt{\frac{1}{f(z)^3} \left(1 + 3|\delta| \left(1 + \frac{1}{z^2}\right)^2\right)} \end{aligned} \quad (13.61)$$

una expansión alrededor de $z = 0$ nos da:

$$\int dl \simeq \int R_0 dz \left(\sqrt{3|\delta|} z - \frac{1}{2} z^3 \sqrt{3|\delta|} + O(z^4) \right) \quad (13.62)$$

que puede integrarse fácilmente, obteniendo:

$$L = R_0 \sqrt{3 |\delta|} \left(\frac{z^2}{2} - \frac{1}{8} z^4 \right) \quad (13.63)$$

como aplicación numérica podemos calcular la longitud propia desde el origen a la garganta del agujero de gusano $z = z_m = \left(\frac{|\delta|}{1+|\delta|} \right)^{\frac{1}{4}}$

$$L_\delta = \sqrt{3} |\delta| \frac{\left(4 + 4 |\delta| - \sqrt{|\delta|} \sqrt{1 + |\delta|} \right)}{8 (1 + |\delta|)^{\frac{3}{2}}} \quad (13.64)$$

consideremos por último el cálculo de los invariantes de curvatura: utilizando de nuevo (13.47) y el paquete xAct [?], es inmediato calcular los escalares de Ricci y de Krestschmann:

$$\begin{aligned} R(g) = R^\mu_\mu(g) &= -\frac{10}{R_0^2} \frac{(1+z^2)^2}{z^4 \left(-z^4 + 3\delta(1+z^2)^2 \right)} \\ R_{\alpha\beta\gamma\delta}(g) R^{\alpha\beta\gamma\delta}(g) &= \frac{76}{R_0^4} \frac{(1+z^2)^4}{z^8 \left(3\delta + 6z^2\delta + z^4(3\delta - 1) \right)^2} \end{aligned} \quad (13.65)$$

que coincide con el resultado en RG (13.33) para el límite $\delta \rightarrow 0$

13.7 Conclusiones

Como ejemplo práctico de la aplicación de la correspondencia entre “frames”, en este capítulo hemos escogido un campo escalar como representante de la materia y hemos resuelto de manera exacta las ecuaciones de Einstein asociadas en el contexto de RG para exportarlas después vía “mapping” a la gravedad GBI. A pesar de que las soluciones obtenidas representan estructuras localizadas, hemos encontrado que la solución en ambos “frames” presenta patologías importantes (básicamente, ausencia de horizontes que oculten la singularidad esencial en GR), por lo que esta solución no será explotada en mayor profundidad.

Capítulo 14

Conclusión y cuestiones abiertas

En esta tesis hemos llevado a cabo una serie de estudios relacionados con la rotación, la termodinámica y la correspondencia AdS/CFT usando como marco de trabajo la teoría de gravitación de Born-Infeld (GBI o EiBI) en el formalismo métrico-afín y con acoplamiento a fuentes de materia electromagnéticas o escalares. Para ello, de una parte, hemos profundizado en las implicaciones del concepto de correspondencia entre “frames” para ilustrar la equivalencia entre la resolución directa de ecuaciones diferenciales al trabajar directamente del lado RBG y la resolución de un conjunto de ecuaciones puramente algebraicas, (pero altamente no lineales) cuando se utiliza el EF como semilla de las soluciones físicas obtenidas por correspondencia. Los resultados principales, publicados en [167, 10, 168], se centran en la obtención de soluciones exactas con rotación, contribuyendo de manera sustancial a la construcción de alternativas a la solución de Kerr (y Kerr-Newman) que tan importantes son hoy día para la interpretación de datos observacionales relacionados con objetos compactos. También hemos atacado el problema de la construcción de los términos de superficie asociados a las teorías del tipo RBG, habiendo encontrado una propuesta para generalizar la noción de curvatura extrínseca que, además de ser invariante proyectiva, encaja bien con las expectativas generales dentro del campo [318].

Más allá del estudio de objetos con rotación y de los términos de superficie, hemos explorado otros temas que han recibido mucha atención en la física teórica en las últimas décadas. En lo referente a la termodinámica de agujeros negros, y siempre en el contexto de la teoría GBI, se ha usado la técnica del “mapping” para estudiar la primera ley, pero es necesario un análisis más profundo que esperamos desarrollar en el futuro, pues ninguna tesis queda totalmente cerrada.

Además de ello hemos exportado las soluciones GBI existentes a otros contextos con la intención de establecer correlaciones con otros campos de la Física y aprender un poco más en ese camino. El cálculo de la densidad local de estados y del loop de Wilson han sido

ejemplos de ello. El cálculo de funciones de Green asociadas a la teoría gauge dual en el contexto AdS/CFT no genera, en principio, resultados demasiado diferentes de los esperados en el contexto de RG toda vez que dicha función de Green depende de los valores a grandes distancias. En dicho límite asintótico, tanto la RG como la gravedad GBI formulada “à la Palatini” ofrecen básicamente las mismas predicciones. Este resultado podía esperarse, pero el estudio detallado del principio holográfico era también uno de los objetivos del presente trabajo, y en ese sentido el estudio de la gravedad GBI en la correspondencia AdS/CFT suponía una buena oportunidad para ello y un campo poco explorado hasta el momento. Las posibles desviaciones que se puedan encontrar desde un planteamiento métrico-afín en el contexto holográfico respecto de las predicciones habituales de la RG en dicho campo son una cuestión asimismo abierta, toda vez que existe espacio para un análisis numérico más detallado. En este sentido, los cálculos realizados en este trabajo tanto en el contexto holográfico como para el cálculo de la densidad local de estados pueden ampliarse para incluir soluciones de tipo BTZ caracterizadas no solo por la carga eléctrica, sino también por un momento angular no nulo.

En lo que concierne al sector de la materia, la aplicación del “mapping” a campos escalares y electromagnéticos hace que el estudio de campos de tipo Yang-Mills suponga el siguiente paso natural. Para estos campos existen ya soluciones en el contexto de RG [355], por lo que extender dichas soluciones al contexto GBI es un territorio todavía no explorado. La alta no linealidad de las ecuaciones de campo implicadas dificulta la obtención de soluciones analíticas y la posible extensión del “mapping” al espacio de soluciones numéricas es asimismo otra cuestión completamente abierta que podría facilitarse mediante la interpretación de las soluciones de RG en términos de un fluido efectivo. Confiamos en poder obtener resultados en esta dirección en el futuro.

Referencias

- [1] Abbott, B. P. et al. (2016a). Binary Black Hole Mergers in the first Advanced LIGO Observing Run. Phys. Rev. X, 6(4):041015. [Erratum: Phys.Rev.X 8, 039903 (2018)].
- [2] Abbott, B. P. et al. (2016b). Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. Phys. Rev. Lett., 116(6):061102.
- [3] Abbott, B. P. et al. (2017a). Gravitational Waves and Gamma-rays from a Binary Neutron Star Merger: GW170817 and GRB 170817A. Astrophys. J. Lett., 848(2):L13.
- [4] Abbott, B. P. et al. (2017b). GW170814: A Three-Detector Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Coalescence. Phys. Rev. Lett., 119(14):141101.
- [5] Abbott, B. P. et al. (2017c). GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral. Phys. Rev. Lett., 119(16):161101.
- [6] Abbott, B. P. et al. (2019). Tests of General Relativity with GW170817. Phys. Rev. Lett., 123(1):011102.
- [7] Adachi, T., S. (1993). Density of states in spectral geometry. Commentarii Mathematici Helvetici, page 480–493.
- [8] Adair, C., Bueno, P., Cano, P. A., Hennigar, R. A., and Mann, R. B. (2020). Slowly rotating black holes in Einsteinian cubic gravity. Phys. Rev. D, 102(8):084001.
- [9] Afonso, V. I., Bejarano, C., Beltran Jimenez, J., Olmo, G. J., and Orazi, E. (2017). The trivial role of torsion in projective invariant theories of gravity with non-minimally coupled matter fields. Class. Quant. Grav., 34(23):235003.
- [10] Afonso, V. I., Mora-Pérez, G., Olmo, G. J., Orazi, E., and Rubiera-Garcia, D. (2022). An infinite class of exact rotating black hole metrics of modified gravity. JCAP, 03:052.
- [11] Afonso, V. I., Olmo, G. J., Orazi, E., and Rubiera-Garcia, D. (2018a). Mapping nonlinear gravity into General Relativity with nonlinear electrodynamics. Eur. Phys. J. C, 78(10):866.
- [12] Afonso, V. I., Olmo, G. J., Orazi, E., and Rubiera-Garcia, D. (2019a). Correspondence between modified gravity and general relativity with scalar fields. Phys. Rev. D, 99(4):044040.
- [13] Afonso, V. I., Olmo, G. J., Orazi, E., and Rubiera-Garcia, D. (2019b). New scalar compact objects in Ricci-based gravity theories. JCAP, 12:044.

- [14] Afonso, V. I., Olmo, G. J., and Rubiera-Garcia, D. (2018b). Mapping Ricci-based theories of gravity into general relativity. *Phys. Rev. D*, 97(2):021503.
- [15] Aharony, O., Gubser, S. S., Maldacena, J. M., Ooguri, H., and Oz, Y. (2000). Large N field theories, string theory and gravity. *Phys. Rept.*, 323:183–386.
- [16] Akiyama, K. et al. (2019). First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole. *Astrophys. J. Lett.*, 875:L1.
- [17] Ali, M. S. and Kauhsal, S. (2022). Gravitational lensing for stationary axisymmetric black holes in Eddington-inspired Born-Infeld gravity. *Phys. Rev. D*, 105(2):024062.
- [18] Alkaç, G., Kilicarslan, E., and Tekin, B. (2016). Asymptotically flat black holes in 2+1 dimensions. *Phys. Rev. D*, 93(8):084003.
- [19] Anabalón, A., Gray, F., Gregory, R., Kubizňák, D., and Mann, R. B. (2019). Thermodynamics of Charged, Rotating, and Accelerating Black Holes. *JHEP*, 04:096.
- [20] Ansoldi, S. (2008). Spherical black holes with regular center: A Review of existing models including a recent realization with Gaussian sources. In *Conference on Black Holes and Naked Singularities*.
- [21] Antoniadis, I. and Tomboulis, E. T. (1986). Gauge Invariance and Unitarity in Higher Derivative Quantum Gravity. *Phys. Rev. D*, 33:2756.
- [22] Armendariz-Picon, C., Damour, T., and Mukhanov, V. F. (1999). k - inflation. *Phys. Lett. B*, 458:209–218.
- [23] Ashtekar, A., Baez, J., Corichi, A., and Krasnov, K. (1998). Quantum geometry and black hole entropy. *Phys. Rev. Lett.*, 80:904–907.
- [24] Avelino, P. P. (2012). Eddington-inspired Born-Infeld gravity: astrophysical and cosmological constraints. *Phys. Rev. D*, 85:104053.
- [25] Avelino, P. P. and Ferreira, R. Z. (2012). Bouncing Eddington-inspired Born-Infeld cosmologies: an alternative to Inflation ? *Phys. Rev. D*, 86:041501.
- [26] Ayzenberg, D. and Yunes, N. (2014). Slowly-Rotating Black Holes in Einstein-Dilaton-Gauss-Bonnet Gravity: Quadratic Order in Spin Solutions. *Phys. Rev. D*, 90:044066. [Erratum: *Phys.Rev.D* 91, 069905 (2015)].
- [27] Azreg-Aïnou, M. (2014a). From static to rotating to conformal static solutions: Rotating imperfect fluid wormholes with(out) electric or magnetic field. *Eur. Phys. J. C*, 74(5):2865.
- [28] Azreg-Aïnou, M. (2014b). Generating rotating regular black hole solutions without complexification. *Phys. Rev. D*, 90(6):064041.
- [29] B. A. Bilby, R. B. and Smith, E. (1955). Distributions of Dislocations: A New Application of the Methods of Non-Riemannian Geometry. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 231:263–273.
- [30] Bahamonde, S. and Gigante Valcarcel, J. (2021). Observational constraints in metric-affine gravity. *Eur. Phys. J. C*, 81(6):495.

- [31] Baier, R., Romatschke, P., Son, D. T., Starinets, A. O., and Stephanov, M. A. (2008). Relativistic viscous hydrodynamics, conformal invariance, and holography. *JHEP*, 04:100.
- [32] Bambi, C. (2017). Testing black hole candidates with electromagnetic radiation. *Rev. Mod. Phys.*, 89(2):025001.
- [33] Bambi, C. (2020). Astrophysical Black Holes: A Review. *PoS, MULTIF2019*:028.
- [34] Bambi, C., Cardenas-Avendano, A., Dauser, T., Garcia, J. A., and Nampalliwar, S. (2017). Testing the Kerr black hole hypothesis using X-ray reflection spectroscopy. *Astrophys. J.*, 842(2):76.
- [35] Bambi, C. and Modesto, L. (2013). Rotating regular black holes. *Phys. Lett. B*, 721:329–334.
- [36] Banados, M. (2008). Eddington-Born-Infeld action for dark matter and dark energy. *Phys. Rev. D*, 77:123534.
- [37] Banados, M. and Ferreira, P. G. (2010). Eddington’s theory of gravity and its progeny. *Phys. Rev. Lett.*, 105:011101. [Erratum: *Phys.Rev.Lett.* 113, 119901 (2014)].
- [38] Banados, M., Ferreira, P. G., and Skordis, C. (2009a). Eddington-Born-Infeld gravity and the large scale structure of the Universe. *Phys. Rev. D*, 79:063511.
- [39] Banados, M., Ferreira, P. G., and Skordis, C. (2009b). Eddington-Born-Infeld gravity and the large scale structure of the Universe. *Phys. Rev. D*, 79:063511.
- [40] Banados, M., Henneaux, M., Teitelboim, C., and Zanelli, J. (1993). Geometry of the (2+1) black hole. *Phys. Rev. D*, 48:1506–1525. [Erratum: *Phys.Rev.D* 88, 069902 (2013)].
- [41] Banados, M., Teitelboim, C., and Zanelli, J. (1992). The Black hole in three-dimensional space-time. *Phys. Rev. Lett.*, 69:1849–1851.
- [42] Banerjee, R. and Modak, S. K. (2009). Quantum Tunneling, Blackbody Spectrum and Non-Logarithmic Entropy Correction for Lovelock Black Holes. *JHEP*, 11:073.
- [43] Barausse, E. et al. (2020). Prospects for Fundamental Physics with LISA. *Gen. Rel. Grav.*, 52(8):81.
- [44] Barausse, E. and Sotiriou, T. P. (2013). Slowly rotating black holes in Horava-Lifshitz gravity. *Phys. Rev. D*, 87:087504.
- [45] Barbero G., J. F., Margalef-Bentabol, J., Varo, V., and Villaseñor, E. J. S. (2021). Palatini gravity with nonmetricity, torsion, and boundaries in metric and connection variables. *Phys. Rev. D*, 104(4):044046.
- [46] Bardeen, J. M., Carter, B., and Hawking, S. W. (1973). The Four laws of black hole mechanics. *Commun. Math. Phys.*, 31:161–170.
- [47] Baxter, J. E. and Winstanley, E. (2016). Topological black holes in $\mathfrak{su}(N)$ Einstein-Yang-Mills theory with a negative cosmological constant. *Phys. Lett. B*, 753:268–273.

- [48] Bazeia, D., Losano, L., Menezes, R., and Oliveira, J. C. R. E. (2007). Generalized Global Defect Solutions. *Eur. Phys. J. C*, 51:953–962.
- [49] Bazeia, D., Losano, L., Olmo, G. J., and Rubiera-Garcia, D. (2017). Geodesically complete BTZ-type solutions of $2 + 1$ Born–Infeld gravity. *Class. Quant. Grav.*, 34(4):045006.
- [50] Bazeia, D., Losano, L., Olmo, G. J., Rubiera-Garcia, D., and Sanchez-Puente, A. (2015). Classical resolution of black hole singularities in arbitrary dimension. *Phys. Rev. D*, 92(4):044018.
- [51] Bekenstein, J. D. (1973). Black holes and entropy. *Phys. Rev. D*, 7:2333–2346.
- [52] Beltrán Jiménez, J. and Delhom, A. (2019). Ghosts in metric-affine higher order curvature gravity. *Eur. Phys. J. C*, 79(8):656.
- [53] Beltrán Jiménez, J. and Delhom, A. (2020). Instabilities in metric-affine theories of gravity with higher order curvature terms. *Eur. Phys. J. C*, 80(6):585.
- [54] Beltrán Jiménez, J., Delhom, A., Olmo, G. J., and Orazi, E. (2021). Born-Infeld gravity: Constraints from light-by-light scattering and an effective field theory perspective. *Phys. Lett. B*, 820:136479.
- [55] Beltran Jimenez, J., Durrer, R., Heisenberg, L., and Thorsrud, M. (2013). Stability of Horndeski vector-tensor interactions. *JCAP*, 10:064.
- [56] Beltran Jimenez, J. and Heisenberg, L. (2016). Derivative self-interactions for a massive vector field. *Phys. Lett. B*, 757:405–411.
- [57] Beltran Jimenez, J. and Heisenberg, L. (2017). Generalized multi-Proca fields. *Phys. Lett. B*, 770:16–26.
- [58] Beltran Jimenez, J., Heisenberg, L., Olmo, G. J., and Rubiera-Garcia, D. (2018). Born–Infeld inspired modifications of gravity. *Phys. Rept.*, 727:1–129.
- [59] Beltran Jimenez, J. and Maroto, A. L. (2009). Viability of vector-tensor theories of gravity. *JCAP*, 02:025.
- [60] Benisty, D., Olmo, G. J., and Rubiera-Garcia, D. (2021). Singularity-Free and Cosmologically Viable Born-Infeld Gravity with Scalar Matter. *Symmetry*, 13(11):2108.
- [61] Berti, E., Cardoso, V., and Will, C. M. (2006). On gravitational-wave spectroscopy of massive black holes with the space interferometer LISA. *Phys. Rev. D*, 73:064030.
- [62] Berti, E. et al. (2015). Testing General Relativity with Present and Future Astrophysical Observations. *Class. Quant. Grav.*, 32:243001.
- [63] Berti, E., Yagi, K., Yang, H., and Yunes, N. (2018). Extreme Gravity Tests with Gravitational Waves from Compact Binary Coalescences: (II) Ringdown. *Gen. Rel. Grav.*, 50(5):49.
- [64] Birrell, N. D. and Davies, P. C. W. (1984). *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK.

- [65] Bjorken, J. D. and Drell, S. D. (1965). *Relativistic Quantum Mechanics*. International Series In Pure and Applied Physics. McGraw-Hill, New York.
- [Blau] Blau, M. Lecture notes on general relativity (2018).
- [67] Böhmer, C. G. and Fiorini, F. (2020). BTZ gems inside regular Born-Infeld black holes. *Class. Quant. Grav.*, 37(18):185002.
- [68] Born, M. and Infeld, L. (1934a). Foundations of the new field theory. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 144(852):425–451.
- [69] Born, M. and Infeld, L. (1934b). Foundations of the new field theory. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 144(852):425–451.
- [70] Bouhmadi-López, M., Chen, C.-Y., Chen, P., and Yeom, D.-h. (2018). Regular Instantons in the Eddington-inspired-Born-Infeld Gravity: Lorentzian Wormholes from Bubble Nucleations. *JCAP*, 10:056.
- [71] Brandhuber, A., Itzhaki, N., Sonnenschein, J., and Yankielowicz, S. (1998). Wilson loops in the large N limit at finite temperature. *Phys. Lett. B*, 434:36–40.
- [72] Brito, R., Cardoso, V., Herdeiro, C. A. R., and Radu, E. (2016). Proca stars: Gravitating Bose–Einstein condensates of massive spin 1 particles. *Phys. Lett. B*, 752:291–295.
- [73] Bueno, P., Cano, P. A., Goelen, F., Hertog, T., and Vercnocke, B. (2018). Echoes of Kerr-like wormholes. *Phys. Rev. D*, 97(2):024040.
- [74] Bueno, P., Cano, P. A., Moreno, J., and van der Velde, G. (2021). Regular black holes in three dimensions. *Phys. Rev. D*, 104(2):L021501.
- [75] Bull, P. et al. (2016). Beyond Λ CDM: Problems, solutions, and the road ahead. *Phys. Dark Univ.*, 12:56–99.
- [76] Buoninfante, L., Cornell, A. S., Harmsen, G., Koshelev, A. S., Lambiase, G., Marto, J. a., and Mazumdar, A. (2018). Towards nonsingular rotating compact object in ghost-free infinite derivative gravity. *Phys. Rev. D*, 98(8):084041.
- [77] Burgess, C. P. (2004). Quantum gravity in everyday life: General relativity as an effective field theory. *Living Rev. Rel.*, 7:5–56.
- [78] Cai, R.-G., Pang, D.-W., and Wang, A. (2004). Born-Infeld black holes in (A)dS spaces. *Phys. Rev. D*, 70:124034.
- [79] Cai, R.-G. and Sun, Y.-W. (2008). Shear Viscosity from AdS Born-Infeld Black Holes. *JHEP*, 09:115.
- [80] Cano, A. and Paul, I. (2009). Aharonov-bohm oscillations in the local density of states. *Physical Review B*, 80(15).
- [81] Cano, P. A. and Ruipérez, A. (2019). Leading higher-derivative corrections to Kerr geometry. *JHEP*, 05:189. [Erratum: *JHEP* 03, 187 (2020)].

- [82] Capozziello, S. and De Laurentis, M. (2011). Extended Theories of Gravity. Phys. Rept., 509:167–321.
- [83] Carballo-Rubio, R., Di Filippo, F., Liberati, S., and Visser, M. (2018). Phenomenological aspects of black holes beyond general relativity. Phys. Rev. D, 98(12):124009.
- [84] Cardenas-Avendano, A., Godfrey, J., Yunes, N., and Lohfink, A. (2019). Experimental Relativity with Accretion Disk Observations. Phys. Rev. D, 100(2):024039.
- [85] Cardenas-Avendano, A., Jiang, J., and Bambi, C. (2016). Testing the Kerr black hole hypothesis: comparison between the gravitational wave and the iron line approaches. Phys. Lett. B, 760:254–258.
- [86] Cardoso, V. and Lemos, J. P. S. (2001). Scalar, electromagnetic and Weyl perturbations of BTZ black holes: Quasinormal modes. Phys. Rev. D, 63:124015.
- [87] Cardoso, V. and Pani, P. (2019). Testing the nature of dark compact objects: a status report. Living Rev. Rel., 22(1):4.
- [88] Carlip, S. (1995). The (2+1)-Dimensional black hole. Class. Quant. Grav., 12:2853–2880.
- [89] Carney, D., Stamp, P. C. E., and Taylor, J. M. (2019). Tabletop experiments for quantum gravity: a user’s manual. Class. Quant. Grav., 36(3):034001.
- [90] Carroll, S. M. (2001). The Cosmological constant. Living Rev. Rel., 4:1.
- [91] Carter, B. (1968a). Global structure of the Kerr family of gravitational fields. Phys. Rev., 174:1559–1571.
- [92] Carter, B. (1968b). Hamilton-Jacobi and Schrodinger separable solutions of Einstein’s equations. Commun. Math. Phys., 10(4):280–310.
- [93] Carter, B. (1971). Axisymmetric Black Hole Has Only Two Degrees of Freedom. Phys. Rev. Lett., 26:331–333.
- [94] Castro Neto, A. H., Guinea, F., Peres, N. M. R., Novoselov, K. S., and Geim, A. K. (2009). The electronic properties of graphene. Rev. Mod. Phys., 81:109–162.
- [95] Cataldo, M. and Garcia, A. (2000). Regular (2+1)-dimensional black holes within nonlinear electrodynamics. Phys. Rev. D, 61:084003.
- [96] Cataldo, M. and Salgado, P. (1996). Static Einstein-Maxwell solutions in (2+1)-dimensions. Phys. Rev. D, 54:2971–2974.
- [97] Cembranos, J. A. R., de la Cruz-Dombriz, A., and Jarillo, J. (2015). Reissner-Nordström black holes in the inverse electrodynamics model. JCAP, 02:042.
- [98] Cembranos, J. A. R., de la Cruz-Dombriz, A., and Jimeno Romero, P. (2014). Kerr-Newman black holes in $f(R)$ theories. Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys., 11:1450001.
- [99] Chael, A., Johnson, M. D., and Lupsasca, A. (2021). Observing the Inner Shadow of a Black Hole: A Direct View of the Event Horizon. Astrophys. J., 918(1):6.

- [100] Chamblin, A., Emparan, R., Johnson, C. V., and Myers, R. C. (1999). Charged AdS black holes and catastrophic holography. *Phys. Rev. D*, 60:064018.
- [101] Chatterjee, A. and Majumdar, P. (2004). Universal canonical entropy for gravitating systems. *Pramana*, 63:851–858.
- [102] Chen, C.-Y., Bouhmadi-Lopez, M., and Chen, P. (2016). Modified Eddington-inspired-Born-Infeld Gravity with a Trace Term. *Eur. Phys. J. C*, 76:40.
- [103] Chen, C.-Y. and Chen, P. (2018). Quasinormal modes of massless scalar fields for charged black holes in the Palatini-type gravity. *Phys. Rev. D*, 98(4):044042.
- [104] Chesler, P. M., Jensen, K., and Karch, A. (2009). Jets in strongly-coupled $N = 4$ super Yang-Mills theory. *Phys. Rev. D*, 79:025021.
- [105] Clayton, J. D. (2011). *Nonlinear mechanics of crystals, solids, and its applications*. Springer.
- [106] Clifton, T., Ferreira, P. G., Padilla, A., and Skordis, C. (2012). Modified Gravity and Cosmology. *Phys. Rept.*, 513:1–189.
- [107] Copeland, E. J., Sami, M., and Tsujikawa, S. (2006). Dynamics of dark energy. *Int. J. Mod. Phys. D*, 15:1753–1936.
- [108] Cunha, P. V. P. and Herdeiro, C. A. R. (2018). Shadows and strong gravitational lensing: a brief review. *Gen. Rel. Grav.*, 50(4):42.
- [109] Cvetič, M. and Gibbons, G. W. (2012). Graphene and the Zermelo Optical Metric of the BTZ Black Hole. *Annals Phys.*, 327:2617–2626.
- [110] Cvetič, M., Nojiri, S., and Odintsov, S. D. (2002). Black hole thermodynamics and negative entropy in de Sitter and anti-de Sitter Einstein-Gauss-Bonnet gravity. *Nucl. Phys. B*, 628:295–330.
- [111] Das Sarma, S., Hwang, E. H., and Tse, W.-K. (2007). Many-body interaction effects in doped and undoped graphene: Fermi liquid versus non-fermi liquid. *Phys. Rev. B*, 75:121406.
- [112] De Felice, A. and Tsujikawa, S. (2010). $f(R)$ theories. *Living Rev. Rel.*, 13:3.
- [113] de Jesus Anguiano Galicia, M. and Bashir, A. (2005). Fermions in odd space-time dimensions: Back to basics. *Few Body Syst.*, 37:71–78.
- [114] de Juan, F., Cortijo, A., and Vozmediano, M. A. H. (2007). Charge inhomogeneities due to smooth ripples in graphene sheets. *Physical Review B*, 76(16).
- [115] de Martino, I., Chakrabarty, S. S., Cesare, V., Gallo, A., Ostorero, L., and Diaferio, A. (2020). Dark matters on the scale of galaxies. *Universe*, 6(8):107.
- [116] Delhom, A., Miralles, V., and Peñuelas, A. (2020). Effective interactions in Ricci-Based Gravity below the non-metricity scale. *Eur. Phys. J. C*, 80(4):340.

- [117] Delhom, A., Olmo, G. J., and Orazi, E. (2019). Ricci-Based Gravity theories and their impact on Maxwell and nonlinear electromagnetic models. JHEP, 11:149.
- [118] Deser, S. and Gibbons, G. W. (1998). Born-Infeld-Einstein actions? Class. Quant. Grav., 15:L35–L39.
- [119] Dey, T. K. (2004). Born-Infeld black holes in the presence of a cosmological constant. Phys. Lett. B, 595:484–490.
- [120] Dhuria, M. and Misra, A. (2015). Transport Coefficients of Black MQGP M3-Branes. Eur. Phys. J. C, 75(1):16.
- [121] Di Casola, E., Liberati, S., and Sonego, S. (2015). Nonequivalence of equivalence principles. Am. J. Phys., 83:39.
- [122] Dias, G. A. S. and Lemos, J. P. S. (2008). Hamiltonian thermodynamics of charged three-dimensional dilatonic black holes. Phys. Rev. D, 78:084020.
- [123] Dias, O. J. C. and Lemos, J. P. S. (2002). Magnetic point sources in three-dimensional Brans-Dicke gravity theories. Phys. Rev. D, 66:024034.
- [124] Diaz-Alonso, J. and Rubiera-Garcia, D. (2010). Electrostatic spherically symmetric configurations in gravitating nonlinear electrodynamics. Phys. Rev. D, 81:064021.
- [125] Ding, C., Liu, C., Casana, R., and Cavalcante, A. (2020). Exact Kerr-like solution and its shadow in a gravity model with spontaneous Lorentz symmetry breaking. Eur. Phys. J. C, 80(3):178.
- [126] Dirac, P. A. M. (1930). The principles of Quantum Mechanics. Oxford University Press.
- [127] Drukker, N., Gross, D. J., and Ooguri, H. (1999). Wilson loops and minimal surfaces. Phys. Rev. D, 60:125006.
- [128] Dymnikova, I. (2003). Spherically symmetric space-time with the regular de Sitter center. Int. J. Mod. Phys. D, 12:1015–1034.
- [129] Dymnikova, I. and Galaktionov, E. (2015). Regular rotating electrically charged black holes and solitons in non-linear electrodynamics minimally coupled to gravity. Class. Quant. Grav., 32(16):165015.
- [130] E.Cartan (1928). Leçons sur la géometrie des espaces de Riemann. Gauthier-Villars, Paris.
- [131] Eddington, A. S. (1922). The propagation of gravitational waves. Proc. Roy. Soc. Lond. A, 102:268–282.
- [132] Einstein, A. (1905). Zur elektrodynamik bewegter körper. Annalen der Physik, 322(10):891–921.
- [133] Einstein, A. (1917). Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, pages 142–152.

- [134] Emparan, R., Frassino, A. M., and Way, B. (2020). Quantum BTZ black hole. *JHEP*, 11:137.
- [135] Englund, D., Fattal, D., Waks, E., Solomon, G., Zhang, B., Nakaoka, T., Arakawa, Y., Yamamoto, Y., and Vučković, J. (2005). Controlling the spontaneous emission rate of single quantum dots in a two-dimensional photonic crystal. *Physical Review Letters*, 95(1).
- [136] Erbin, H. (2017). Janis-Newman algorithm: generating rotating and NUT charged black holes. *Universe*, 3(1):19.
- [137] Erickson, J. K., Semenoff, G. W., and Zarembo, K. (2000). Wilson loops in N=4 supersymmetric Yang-Mills theory. *Nucl. Phys. B*, 582:155–175.
- [138] et al, S. K. (1988). *One-dimensional conductors*. Springer.
- [139] Ezquiaga, J. M. and Zumalacárregui, M. (2020). Gravitational wave lensing beyond general relativity: birefringence, echoes and shadows. *Phys. Rev. D*, 102(12):124048.
- [140] Faulkner, T., Iqbal, N., Liu, H., McGreevy, J., and Vegh, D. (2010). From Black Holes to Strange Metals.
- [141] Faulkner, T., Liu, H., McGreevy, J., and Vegh, D. (2011). Emergent quantum criticality, Fermi surfaces, and AdS(2). *Phys. Rev. D*, 83:125002.
- [142] Fernández-Jambrina, L. (2021). Singularities in Inflationary Cosmological Models. *Universe*, 7(12):491.
- [143] Fernando, S. (2006). Thermodynamics of Born-Infeld-anti-de Sitter black holes in the grand canonical ensemble. *Phys. Rev. D*, 74:104032.
- [144] Fogler, M. M., Novikov, D. S., and Shklovskii, B. I. (2007). Screening of a hypercritical charge in graphene. *Phys. Rev. B*, 76:233402.
- [145] Frank, F. (1951). Lxxxiii. crystal dislocations.—elementary concepts and definitions. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 42(331):809–819.
- [146] García, A., Hackmann, E., Kunz, J., Lämmerzahl, C., and Macías, A. (2015). Motion of test particles in a regular black hole space-time. *J. Math. Phys.*, 56:032501.
- [147] Gavrilov, S. P., Gitman, D. M., and Tomazelli, J. L. (2005). Comments on spin operators and spin-polarization states of 2 + 1 fermions. *Eur. Phys. J. C*, 39:245–248.
- [148] Gibbons, G. W. (1975). Vacuum Polarization and the Spontaneous Loss of Charge by Black Holes. *Commun. Math. Phys.*, 44:245–264.
- [149] Gibbons, G. W. and Hawking, S. W. (1977). Action Integrals and Partition Functions in Quantum Gravity. *Phys. Rev. D*, 15:2752–2756.
- [150] Gibbons, G. W. and Rasheed, D. A. (1995). Electric - magnetic duality rotations in nonlinear electrodynamics. *Nucl. Phys. B*, 454:185–206.

- [151] Gleyzes, J., Langlois, D., Piazza, F., and Vernizzi, F. (2015a). Exploring gravitational theories beyond Horndeski. *JCAP*, 02:018.
- [152] Gleyzes, J., Langlois, D., Piazza, F., and Vernizzi, F. (2015b). Healthy theories beyond Horndeski. *Phys. Rev. Lett.*, 114(21):211101.
- [153] Goldstein, H. (1950). *Classical Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company.
- [154] González, J., Guinea, F., and Herrero, J. (2009). Propagating, evanescent, and localized states in carbon nanotube–graphene junctions. *Physical Review B*, 79(16).
- [155] González, J., Guinea, F., and Vozmediano, M. A. H. (1992). Continuum approximation to fullerene molecules. *Phys. Rev. Lett.*, 69:172–175.
- [156] González, J., Guinea, F., and Vozmediano, M. A. H. (2001). Electron-electron interactions in graphene sheets. *Phys. Rev. B*, 63:134421.
- [157] González, P. A., Rincón, A., Saavedra, J., and Vásquez, Y. (2021). Superradiant instability and charged scalar quasinormal modes for (2+1)-dimensional Coulomb-like AdS black holes from nonlinear electrodynamics. *Phys. Rev. D*, 104(8):084047.
- [158] Gonzalez, P. A., Saridakis, E. N., and Vasquez, Y. (2012). Circularly symmetric solutions in three-dimensional Teleparallel, $f(T)$ and Maxwell- $f(T)$ gravity. *JHEP*, 07:053.
- [159] González, J., Guinea, F., and Vozmediano, M. (1993). The electronic spectrum of fullerenes from the dirac equation. *Nuclear Physics B*, 406(3):771–794.
- [160] González, J., Guinea, F., and Vozmediano, M. (1994). Non-fermi liquid behavior of electrons in the half-filled honeycomb lattice (a renormalization group approach). *Nuclear Physics B*, 424(3):595–618.
- [161] González, J. and Herrero, J. (2010). Graphene wormholes: A condensed matter illustration of dirac fermions in curved space. *Nuclear Physics B*, 825(3):426–443.
- [162] Goodstein, J. R. (2007). *The Volterra chronicles: the life and times of a mathematician*. AMS Bookstore.
- [163] Gralla, S. E., Holz, D. E., and Wald, R. M. (2019). Black Hole Shadows, Photon Rings, and Lensing Rings. *Phys. Rev. D*, 100(2):024018.
- [164] Green, M. B., Schwarz, J. H., and Witten, E. (1988). *SUPERSTRING THEORY. VOL. 1: INTRODUCTION*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics.
- [165] Gu, B.-M., Liu, Y.-X., and Zhong, Y. (2018). Stable Palatini $f(\mathcal{R})$ braneworld. *Phys. Rev. D*, 98(2):024027.
- [166] Gubser, S. S., Klebanov, I. R., and Polyakov, A. M. (1998). Gauge theory correlators from noncritical string theory. *Phys. Lett. B*, 428:105–114.
- [167] Guerrero, M., Mora-Pérez, G., Olmo, G. J., Orazi, E., and Rubiera-Garcia, D. (2020). Rotating black holes in Eddington-inspired Born-Infeld gravity: an exact solution. *JCAP*, 07:058.

- [168] Guerrero, M., Mora-Pérez, G., Olmo, G. J., Orazi, E., and Rubiera-Garcia, D. (2021). Charged BTZ-type solutions in Eddington-inspired Born-Infeld gravity. *JCAP*, 11:025.
- [169] Gürses, M., Sisman, T. C., and Tekin, B. (2019). Non-Einsteinian Black Holes in Generic 3D Gravity Theories. *Phys. Rev. D*, 100(6):064053.
- [170] Gurtug, O., Habib Mazharimousavi, S., and Halilsoy, M. (2017). Classical and quantum analysis of an Einstein-Scalar solution in $2 + 1$ dimensions. *Eur. Phys. J. Plus*, 132(4):161.
- [171] G.W. Misner, K.S. Thorne, J. W. (1973). *Gravitation*. W.H. Freeman and Company.
- [172] Habib Mazharimousavi, S., Amirabi, Z., and Halilsoy, M. (2017). Thin-shell wormholes in (2+1)-dimensional Einstein-scalar theory. *Mod. Phys. Lett. A*, 32(10):1750064.
- [173] Harko, T., Lobo, F. S. N., Mak, M. K., and Sushkov, S. V. (2014). Dark matter density profile and galactic metric in Eddington-inspired Born-Infeld gravity. *Mod. Phys. Lett. A*, 29(09):1450049.
- [174] Hartle, J. B. (2003). *Gravity : an introduction to Einstein's general relativity*. Addison Wesley.
- [175] Hartnoll, S. A. (2009). Lectures on holographic methods for condensed matter physics. *Class. Quant. Grav.*, 26:224002.
- [176] Hartnoll, S. A., Herzog, C. P., and Horowitz, G. T. (2008). Holographic Superconductors. *JHEP*, 12:015.
- [177] Hassaine, M. and Martinez, C. (2007). Higher-dimensional black holes with a conformally invariant Maxwell source. *Phys. Rev. D*, 75:027502.
- [178] Hawking, S. W. (1975). Particle Creation by Black Holes. *Commun. Math. Phys.*, 43:199–220. [Erratum: *Commun.Math.Phys.* 46, 206 (1976)].
- [179] Hayes, J. N. (1964). THE PROPAGATORS OF QUANTUM FIELD THEORIES AS GREEN'S FUNCTIONS FOR BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS.
- [180] He, M., Wang, Z.-L., Fang, C., Sun, D.-Q., and Deng, J.-B. (2018). Discussion of a possible corrected black hole entropy. *Adv. High Energy Phys.*, 2018:2315084.
- [181] Hehl, F. W., McCrea, J. D., Mielke, E. W., and Ne'eman, Y. (1995). Metric affine gauge theory of gravity: Field equations, Noether identities, world spinors, and breaking of dilation invariance. *Phys. Rept.*, 258:1–171.
- [182] Hehl, F. W., Von Der Heyde, P., Kerlick, G. D., and Nester, J. M. (1976). General Relativity with Spin and Torsion: Foundations and Prospects. *Rev. Mod. Phys.*, 48:393–416.
- [183] Heisenberg, L. (2014). Generalization of the Proca Action. *JCAP*, 05:015.

- [184] Helliwell, T. M., Konkowski, D. A., and Arndt, V. (2003). Quantum singularity in quasiregular space-times, as indicated by Klein-Gordon, Maxwell and Dirac fields. Gen. Rel. Grav., 35:79–96.
- [185] Hendi, S. H. (2012). Asymptotic charged BTZ black hole solutions. JHEP, 03:065.
- [186] Hendi, S. H., Eslam Panah, B., Panahiyan, S., and Momennia, M. (2016). F(R) gravity’s rainbow and its Einstein counterpart. Adv. High Energy Phys., 2016:9813582.
- [187] Hendi, S. H., Eslam Panah, B., Panahiyan, S., and Sheykhi, A. (2017). Dilatonic BTZ black holes with power-law field. Phys. Lett. B, 767:214–225.
- [188] Hennigar, R. A., Kubiznak, D., and Mann, R. B. (2021). Rotating Gauss-Bonnet BTZ Black Holes. Class. Quant. Grav., 38(3):03LT01.
- [189] Herdeiro, C., Perapechka, I., Radu, E., and Shnir, Y. (2018). Skyrmsions around Kerr black holes and spinning BHs with Skyrme hair. JHEP, 10:119.
- [190] Heusler, M. (1998). Uniqueness theorems for black hole space-times. Lect. Notes Phys., 514:157–186.
- [191] Horndeski, G. W. (1974). Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space. Int. J. Theor. Phys., 10:363–384.
- [192] Hull, M., Koyama, K., and Tasinato, G. (2016). Covariantized vector Galileons. Phys. Rev. D, 93(6):064012.
- [193] Hung, L.-Y. and Sinha, A. (2010). Holographic quantum liquids in 1+1 dimensions. JHEP, 01:114.
- [194] Huot, S. C., Jeon, S., and Moore, G. D. (2007). Shear viscosity in weakly coupled $N = 4$ super Yang-Mills theory compared to QCD. Phys. Rev. Lett., 98:172303.
- [195] Hurd, C. M. (1975). Electrons in metals. Wiley.
- [196] Iorio, A. and Lambiase, G. (2014). Quantum field theory in curved graphene space-times, Lobachevsky geometry, Weyl symmetry, Hawking effect, and all that. Phys. Rev. D, 90(2):025006.
- [197] Iqbal, N. and Liu, H. (2009). Real-time response in AdS/CFT with application to spinors. Fortsch. Phys., 57:367–384.
- [198] Ivanov, A. N. and Wellenzohn, M. (2016). Einstein–cartan Gravity with Torsion Field Serving as an Origin for the Cosmological Constant or Dark Energy Density. Astrophys. J., 829(1):47.
- [199] Jana, S., Chakravarty, G. K., and Mohanty, S. (2018a). Constraints on Born-Infeld gravity from the speed of gravitational waves after GW170817 and GRB 170817A. Phys. Rev. D, 97(8):084011.
- [200] Jana, S. and Kar, S. (2015). Born-Infeld gravity coupled to Born-Infeld electrodynamics. Phys. Rev. D, 92:084004.

- [201] Jana, S., Shaikh, R., and Sarkar, S. (2018b). Overcharging black holes and cosmic censorship in Born-Infeld gravity. *Phys. Rev. D*, 98(12):124039.
- [202] Janssen, B. (2022). *Gravitación y Geometría*. Universidad de Granada.
- [203] Jiang, J., Bambi, C., and Steiner, J. F. (2015). Using iron line reverberation and spectroscopy to distinguish Kerr and non-Kerr black holes. *JCAP*, 05:025.
- [204] Johannsen, T. and Psaltis, D. (2011). A Metric for Rapidly Spinning Black Holes Suitable for Strong-Field Tests of the No-Hair Theorem. *Phys. Rev. D*, 83:124015.
- [205] Johnson, M. D. et al. (2020). Universal interferometric signatures of a black hole's photon ring. *Sci. Adv.*, 6(12):eaaz1310.
- [206] Johnston, D. A. (1988). Sedentary Ghost Poles in Higher Derivative Gravity. *Nucl. Phys. B*, 297:721–732.
- [207] Joshi, P. S., editor (2012). *Gravitational Collapse and Spacetime Singularities*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press.
- [208] Jusufi, K., Jamil, M., Chakrabarty, H., Wu, Q., Bambi, C., and Wang, A. (2020). Rotating regular black holes in conformal massive gravity. *Phys. Rev. D*, 101(4):044035.
- [209] Kandemir, B. S. and Ertem, U. (2017). Quasinormal modes of BTZ black hole and Hawking-like radiation in graphene. *Annalen Phys.*, 529(4):1600330.
- [210] Karsch, F. (2007). Properties of the Quark Gluon Plasma: A Lattice perspective. *Nucl. Phys. A*, 783:13–22.
- [211] Katanaev, M. O. and Volovich, I. V. (1992). Theory of defects in solids and three-dimensional gravity. *Annals Phys.*, 216:1–28.
- [212] Kaul, R. K. and Majumdar, P. (2000). Logarithmic correction to the Bekenstein-Hawking entropy. *Phys. Rev. Lett.*, 84:5255–5257.
- [213] Kerr, R. P. (1963). Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Phys. Rev. Lett.*, 11:237–238.
- [214] Khodas, M., Pustilnik, M., Kamenev, A., and Glazman, L. I. (2007). Fermi-luttinger liquid: Spectral function of interacting one-dimensional fermions. *Physical Review B*, 76(15).
- [215] Kiritsis, E. (2007). *String theory in a nutshell*. Princeton Univ. Press,.
- [216] Kittel, C. (1953). *Introduction to Solid State Physics*. John Willey & sons inc.
- [217] Kleihaus, B., Kunz, J., and Radu, E. (2011). Rotating Black Holes in Dilatonic Einstein-Gauss-Bonnet Theory. *Phys. Rev. Lett.*, 106:151104.
- [218] Kleinert, H. (1983). Double gauge theory of stresses and defects. *Physics Letters A*, 97(1):51–54.
- [219] Kleinert, H. (1989). *Gauge Fields in Condensed Matter*. WORLD SCIENTIFIC.

- [220] Kondo, K. (1952). On the geometrical and physical foundation of theory of yielding. Proc. 2nd Japan nat Congr. of appl mechanics.
- [221] Konno, K., Matsuyama, T., and Tanda, S. (2009). Rotating black hole in extended Chern-Simons modified gravity. Prog. Theor. Phys., 122:561–568.
- [222] Konoplya, R., Rezzolla, L., and Zhidenko, A. (2016). General parametrization of axisymmetric black holes in metric theories of gravity. Phys. Rev. D, 93(6):064015.
- [223] Konoplya, R. A. and Zhidenko, A. (2020). BTZ black holes with higher curvature corrections in the 3D Einstein-Lovelock gravity. Phys. Rev. D, 102(6):064004.
- [224] Kothawala, D., Sarkar, S., and Padmanabhan, T. (2007). Einstein’s equations as a thermodynamic identity: The Cases of stationary axisymmetric horizons and evolving spherically symmetric horizons. Phys. Lett. B, 652:338–342.
- [225] Kröner, E. (1988). Z. angew. Math. Mech, 66:284–292.
- [226] Kröner, E. (1990). The differential geometry of elementary point and line defects in Bravais crystals. International Journal of Theoretical Physics, 29(11):1219–1237.
- [227] Kruglov, S. I. (2016). Asymptotic Reissner-Nordström solution within nonlinear electrodynamics. Phys. Rev. D, 94(4):044026.
- [228] Kröner, E. and Lagoudas, D. (1992). Gauge theory with disclinations. International Journal of Engineering Science, 30(1):47–53.
- [229] Lagoudas, D. C. (1989). A gauge theory of defects in media with microstructure. International Journal of Engineering Science, 27(3):237–249.
- [230] Lammert, P. E. and Crespi, V. H. (2004). Graphene cones: Classification by fictitious flux and electronic properties. Phys. Rev. B, 69(3):035406.
- [231] Lanczos, C. (1938). A Remarkable Property of the Riemann-Christoffel Tensor in Four Dimensions. Annals of Mathematics, 39:842–850.
- [232] Landau, L. D. and Lifshitz, E. (1992). Teoría clásica de los campos, Vol. II. Ed. Reverté.
- [233] Landau, L. D. and Lifshitz, E. M. (1987). Fluid mechanics, (second edition). Elsevier.
- [234] Langenberg, D. N. (1968). Resource letter oepm-1 on the ordinary electronic properties of metals. Amer. J. Phys., 36:777.
- [235] Larranaga Rubio, E. A. (2008). Thermodynamics of Charged BTZ Black Holes and Effective String Theory. Acta Phys. Polon. B, 39:1349–1356.
- [236] Latorre, A. D. I., Olmo, G. J., and Ronco, M. (2018). Observable traces of non-metricity: new constraints on metric-affine gravity. Phys. Lett. B, 780:294–299.
- [237] Lee, C.-Y. (2013). Massive fermions in 2+1 dimensions.

- [238] Lee, S.-S. (2009). A Non-Fermi Liquid from a Charged Black Hole: A Critical Fermi Ball. *Phys. Rev. D*, 79:086006.
- [239] Lemos, J. P. S. and Zanchin, V. T. (2011). Regular black holes: Electrically charged solutions, Reissner-Nordström outside a de Sitter core. *Phys. Rev. D*, 83:124005.
- [240] Li, S.-L. and Wei, H. (2017). Stability of the Einstein static universe in Eddington-inspired Born-Infeld theory. *Phys. Rev. D*, 96(2):023531.
- [241] Lipschutz, M. M. (1970). *Differential geometry*. McGraw-Hill Book Co. U.S.A.
- [242] Liu, H., McGreevy, J., and Vegh, D. (2011). Non-Fermi liquids from holography. *Phys. Rev. D*, 83:065029.
- [243] Lobo, F. S. N., Olmo, G. J., and Rubiera-Garcia, D. (2014). Microscopic wormholes and the geometry of entanglement. *Eur. Phys. J. C*, 74(6):2924.
- [244] Lobo, F. S. N., Olmo, G. J., and Rubiera-Garcia, D. (2015). Crystal clear lessons on the microstructure of spacetime and modified gravity. *Phys. Rev. D*, 91(12):124001.
- [Lorente] Lorente, F. C. Seminario 2001.
- [246] Lovelock, D. (1971). The Einstein tensor and its generalizations. *J. Math. Phys.*, 12:498–501.
- [247] Macedo, C. F. B., Pani, P., Cardoso, V., and Crispino, L. C. B. (2013). Astrophysical signatures of boson stars: quasinormal modes and inspiral resonances. *Phys. Rev. D*, 88(6):064046.
- [248] Maeda, H. (2022). Quest for realistic non-singular black-hole geometries: regular-center type. *JHEP*, 11:108.
- [249] Mahapatra, S. (2018). Logarithmic black hole entropy corrections and holographic Rényi entropy. *Eur. Phys. J. C*, 78(1):23.
- [250] Maity, D., Sarkar, S., Sircar, N., Sathiapalan, B., and Shankar, R. (2010). Properties of CFTs dual to Charged BTZ black-hole. *Nucl. Phys. B*, 839:526–551.
- [251] Maldacena, J. M. (1998a). The Large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 2:231–252.
- [252] Maldacena, J. M. (1998b). Wilson loops in large N field theories. *Phys. Rev. Lett.*, 80:4859–4862.
- [253] Mandl, F. and Shaw, G. (1985). *QUANTUM FIELD THEORY*.
- [254] Mann, C. R., Richer, H., Heyl, J., Anderson, J., Kalirai, J., Caiazzo, I., Möhle, S., Knee, A., and Baumgardt, H. (2019). A Multimass Velocity Dispersion Model of 47 Tucanae Indicates No Evidence for an Intermediate-mass Black Hole. *Astrophys. J.*, 875(1):1.
- [255] Mao, Y., Tegmark, M., Guth, A. H., and Cabi, S. (2007). Constraining Torsion with Gravity Probe B. *Phys. Rev. D*, 76:104029.

- [256] March, R., Bellettini, G., Tauraso, R., and Dell’Agnello, S. (2011). Constraining spacetime torsion with LAGEOS. *Gen. Rel. Grav.*, 43:3099–3126.
- [257] Martinez, C., Teitelboim, C., and Zanelli, J. (2000). Charged rotating black hole in three space-time dimensions. *Phys. Rev. D*, 61:104013.
- [258] Maselli, A., Pani, P., Gualtieri, L., and Ferrari, V. (2015a). Rotating black holes in Einstein-Dilaton-Gauss-Bonnet gravity with finite coupling. *Phys. Rev. D*, 92(8):083014.
- [259] Maselli, A., Silva, H. O., Minamitsuji, M., and Berti, E. (2015b). Slowly rotating black hole solutions in Horndeski gravity. *Phys. Rev. D*, 92(10):104049.
- [260] Mazza, J., Franzin, E., and Liberati, S. (2021). A novel family of rotating black hole mimickers. *JCAP*, 04:082.
- [261] Meng, Y., Chen, B. B., and Tang, J. (2021). Cooling–heating phase transition of the Euler–Heisenberg-AdS black hole. *Mod. Phys. Lett. A*, 36(23):2150165.
- [262] Misner, C. W. and Wheeler, J. A. (1957). Classical physics as geometry: Gravitation, electromagnetism, unquantized charge, and mass as properties of curved empty space. *Annals Phys.*, 2:525–603.
- [263] Moffat, J. W. (2015). Black Holes in Modified Gravity (MOG). *Eur. Phys. J. C*, 75(4):175.
- [264] Moussa, K. A., Clément, G., and Guennoune, H. (2016). Chern–Simons dilaton black holes in 2 + 1 dimensions. *Class. Quant. Grav.*, 33(6):065008.
- [265] M.R.Spiegel (1970). *Mathematical Handbook of formulas and tables*. McGraw-Hill.
- [266] Nakahara, M. (2003). *Geometry, Topology and Physics*. IOP Publishing Ltd.
- [267] Nakamura, A. and Sakai, S. (2005). Transport coefficients of gluon plasma. *Phys. Rev. Lett.*, 94:072305.
- [268] Natsuume, M. (2015). *AdS/CFT Duality User Guide*, volume 903.
- [269] Newman, E. T., Couch, R., Chinnapared, K., Exton, A., Prakash, A., and Torrence, R. (1965). Metric of a Rotating, Charged Mass. *J. Math. Phys.*, 6:918–919.
- [270] Newman, E. T. and Janis, A. I. (1965). Note on the Kerr spinning particle metric. *J. Math. Phys.*, 6:915–917.
- [271] Nojiri, S. and Odintsov, S. D. (2017). Regular multihorizon black holes in modified gravity with nonlinear electrodynamics. *Phys. Rev. D*, 96(10):104008.
- [272] Nojiri, S., Odintsov, S. D., and Oikonomou, V. K. (2017). Modified Gravity Theories on a Nutshell: Inflation, Bounce and Late-time Evolution. *Phys. Rept.*, 692:1–104.
- [273] Nomizu, K. (1996). *Foundations of Differential Geometry, Vol. 1*. Wiley-Interscience.

- [274] Novoselov, K. S., Geim, A. K., Morozov, S. V., Jiang, D., Katsnelson, M. I., Grigorieva, I. V., Dubonos, S. V., and Firsov, A. A. (2005). Two-dimensional gas of massless Dirac fermions in graphene. *Nature*, 438:197.
- [N.Wheeler] N.Wheeler. Dirac equation in 2-dimensional spacetime.
- [276] Oliva, J., Tempo, D., and Troncoso, R. (2009). Three-dimensional black holes, gravitational solitons, kinks and wormholes for BHT massive gravity. *JHEP*, 07:011.
- [277] Olmo, G. J. (2011). Palatini Approach to Modified Gravity: $f(R)$ Theories and Beyond. *Int. J. Mod. Phys. D*, 20:413–462.
- [278] Olmo, G. J. (2012). Introduction to Palatini theories of gravity and nonsingular cosmologies. INTECH.
- [279] Olmo, G. J. (2016). Nonsingular Black Holes in Palatini Extensions of General Relativity. *Springer Proc. Phys.*, 176:183–219.
- [280] Olmo, G. J., Orazi, E., and Pradisi, G. (2022). Conformal metric-affine gravities. *JCAP*, 10:057.
- [281] Olmo, G. J., Orazi, E., and Rubiera-Garcia, D. (2020). Multicenter solutions in Eddington-inspired Born–Infeld gravity. *Eur. Phys. J. C*, 80(11):1018.
- [282] Olmo, G. J. and Rubiera-Garcia, D. (2012). Reissner-Nordström black holes in extended Palatini theories. *Phys. Rev. D*, 86:044014.
- [283] Olmo, G. J. and Rubiera-Garcia, D. (2014). Semiclassical geons at particle accelerators. *JCAP*, 02:010.
- [284] Olmo, G. J., Rubiera-Garcia, D., and Sanchez-Puente, A. (2016). Classical resolution of black hole singularities via wormholes. *Eur. Phys. J. C*, 76(3):143.
- [285] Olmo, G. J., Rubiera-Garcia, D., and Sanchis-Alepuz, H. (2014). Geonic black holes and remnants in Eddington-inspired Born-Infeld gravity. *Eur. Phys. J. C*, 74:2804.
- [286] Olmo, G. J., Sanchis-Alepuz, H., and Tripathi, S. (2009). Dynamical Aspects of Generalized Palatini Theories of Gravity. *Phys. Rev. D*, 80:024013.
- [287] O’Neill., B. (1983). *Semi-riemannian Geometry (With Applications to Relativity)*. Academic PressC.
- [288] Orazi, E. (2020). Generating Solutions of Ricci-Based gravity theories from General Relativity. *Int. J. Mod. Phys. D*, 29(11):2041010.
- [289] Padmanabhan, T. (2002). Classical and quantum thermodynamics of horizons in spherically symmetric space-times. *Class. Quant. Grav.*, 19:5387–5408.
- [290] Padmanabhan, T. (2003). Cosmological constant: The Weight of the vacuum. *Phys. Rept.*, 380:235–320.

- [291] Pani, P. and Cardoso, V. (2009). Are black holes in alternative theories serious astrophysical candidates? The Case for Einstein-Dilaton-Gauss-Bonnet black holes. Phys. Rev. D, 79:084031.
- [292] Pani, P., Delsate, T., and Cardoso, V. (2012). Eddington-inspired Born-Infeld gravity. Phenomenology of non-linear gravity-matter coupling. Phys. Rev. D, 85:084020.
- [293] Pani, P., Macedo, C. F. B., Crispino, L. C. B., and Cardoso, V. (2011). Slowly rotating black holes in alternative theories of gravity. Phys. Rev. D, 84:087501.
- [294] Paranjape, A., Sarkar, S., and Padmanabhan, T. (2006). Thermodynamic route to field equations in Lancos-Lovelock gravity. Phys. Rev. D, 74:104015.
- [295] Parker, L. E. and Toms, D. (2009). Quantum Field Theory in Curved Spacetime: Quantized Field and Gravity. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press.
- [296] Pascual, P. and Tarrach, R. (1984). QCD: Renormalization for the practitioner, volume 194.
- [297] Peebles, P. J. E. and Ratra, B. (2003). The Cosmological Constant and Dark Energy. Rev. Mod. Phys., 75:559–606.
- [298] Penrose, R. (1969). Gravitational collapse: The role of general relativity. Riv. Nuovo Cim., 1:252–276.
- [299] Penrose, R. (1999). The question of cosmic censorship. J. Astrophys. Astron., 20:233–248.
- [300] Pereira, V. M., Kotov, V. N., and Neto, A. H. C. (2008). Supercritical coulomb impurities in gapped graphene. Physical Review B, 78(8).
- [301] Peskin, M. E. and Schroeder, D. V. (1995). An Introduction to quantum field theory. Addison-Wesley, Reading, USA.
- [302] Pezzaglia, Jr., W. M. and Adams, J. J. (1997). Should metric signature matter in Clifford algebra formulations of physical theories? In Miniconference on Octonions and Clifford Algebras (As part of the 1997 Spring Western Sectional Meeting of the American Mathematical Society).
- [303] Pich, A. (1999). Aspects of quantum chromodynamics. In ICTP Summer School in Particle Physics, pages 53–102.
- [304] Pincak, R. and Smotlacha, J. (2013). Analogies in electronic properties of graphene wormhole and perturbed nanocylinder. The European Physical Journal B, 86(11).
- [305] Pitelli, J. P. M. and Letelier, P. S. (2008). Quantum singularities in the BTZ spacetime. Phys. Rev. D, 77:124030.
- [306] Polchinski, J. (2007). String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press.

- [307] Polyakov, A. (1981). Quantum geometry of bosonic strings. *Physics Letters B*, 103(3):207–210.
- [308] Popławski, N. J. (2010). Cosmology with torsion: An alternative to cosmic inflation. *Phys. Lett. B*, 694:181–185. [Erratum: *Phys.Lett.B* 701, 672–672 (2011)].
- [309] Pourhassan, B., Faizal, M., and Ketabi, S. A. (2018). Logarithmic correction of the BTZ black hole and adaptive model of Graphene. *Int. J. Mod. Phys. D*, 27(12):1850118.
- [310] Psaltis, D. et al. (2020). Gravitational Test Beyond the First Post-Newtonian Order with the Shadow of the M87 Black Hole. *Phys. Rev. Lett.*, 125(14):141104.
- [311] Rahaman, F., Kuhfittig, P. K. F., Bhui, B. C., Rahaman, M., Ray, S., and Mondal, U. F. (2013). BTZ black holes inspired by noncommutative geometry. *Phys. Rev. D*, 87(8):084014.
- [312] Rey, S.-J., Theisen, S., and Yee, J.-T. (1998). Wilson-Polyakov loop at finite temperature in large N gauge theory and anti-de Sitter supergravity. *Nucl. Phys. B*, 527:171–186.
- [313] Rey, S.-J. and Yee, J.-T. (2001). Macroscopic strings as heavy quarks in large N gauge theory and anti-de Sitter supergravity. *Eur. Phys. J. C*, 22:379–394.
- [314] Rodrigues, M. E. and de Sousa Silva, M. V. (2018). Bardeen Regular Black Hole With an Electric Source. *JCAP*, 06:025.
- [315] Roshan, M., Kazemi, A., and De Martino, I. (2018). Local fragmentation of thin discs in Eddington-inspired gravity. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 479(1):1287–1296.
- [316] Rovelli, C. (1996). Black hole entropy from loop quantum gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 77:3288–3291.
- [317] Sadeghi, J., Farahani, H. M., Pourhassan, B., and Noorbakhsh, S. M. (2011). Cosmic string in the BTZ Black Hole background with time-dependant tension. *Phys. Lett. B*, 703:14–19.
- [318] Sáez-Chillón Gómez, D. (2021). Variational principle and boundary terms in gravity à la Palatini. *Phys. Lett. B*, 814:136103.
- [319] Sahni, V. (2004). Dark matter and dark energy. *Lect. Notes Phys.*, 653:141–180.
- [320] Sahni, V. and Starobinsky, A. A. (2000). The Case for a positive cosmological Lambda term. *Int. J. Mod. Phys. D*, 9:373–444.
- [321] Saito, R., Dresselhaus, G., and Dresselhaus, M. S. (1998). *Physical Properties of Carbon Nanotubes*. PUBLISHED BY IMPERIAL COLLEGE PRESS AND DISTRIBUTED BY WORLD SCIENTIFIC PUBLISHING CO.
- [322] Sakurai, J. J. and Napolitano, J. (2020). *Modern Quantum Mechanics*. Quantum physics, quantum information and quantum computation. Cambridge University Press.
- [323] Scargill, J. H. C., Banados, M., and Ferreira, P. G. (2012). Cosmology with Eddington-inspired Gravity. *Phys. Rev. D*, 86:103533.

- [324] Schmidt, H.-J. and Singleton, D. (2013). Exact radial solution in 2+1 gravity with a real scalar field. *Phys. Lett. B*, 721:294–298.
- [325] Senovilla, J. M. M. and Garfinkle, D. (2015). The 1965 Penrose singularity theorem. *Class. Quant. Grav.*, 32(12):124008.
- [326] Shaikh, R. (2018). Wormholes with nonexotic matter in Born-Infeld gravity. *Phys. Rev. D*, 98(6):064033.
- [327] Shaikh, R. (2019). Black hole shadow in a general rotating spacetime obtained through Newman-Janis algorithm. *Phys. Rev. D*, 100(2):024028.
- [328] Shaikh, R., Pal, K., Pal, K., and Sarkar, T. (2021). Constraining alternatives to the Kerr black hole. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 506(1):1229–1236.
- [329] Sham, Y. H., Lin, L. M., and Leung, P. T. (2012). Radial oscillations and stability of compact stars in Eddington inspired Born-Infeld gravity. *Phys. Rev. D*, 86:064015.
- [330] Shao, W.-H., Chen, C.-Y., and Chen, P. (2021). Generating Rotating Spacetime in Ricci-Based Gravity: Naked Singularity as a Black Hole Mimicker. *JCAP*, 03:041.
- [331] Shapiro, I. L. (2002). Physical aspects of the space-time torsion. *Phys. Rept.*, 357:113.
- [332] Shapiro, S. L. and Teukolsky, S. A. (1991). Formation of naked singularities: The violation of cosmic censorship. *Phys. Rev. Lett.*, 66:994–997.
- [333] Sheykhi, A. and Kazemi, A. (2014). Higher dimensional dilaton black holes in the presence of exponential nonlinear electrodynamics. *Phys. Rev. D*, 90(4):044028.
- [334] Sheykhi, A. and Riazi, N. (2007). Thermodynamics of black holes in (n+1)-dimensional Einstein-Born-Infeld dilaton gravity. *Phys. Rev. D*, 75:024021.
- [335] Shytov, A. V., Katsnelson, M. I., and Levitov, L. S. (2007a). Vacuum polarization and screening of supercritical impurities in graphene. *Phys. Rev. Lett.*, 99:236801.
- [336] Shytov, A. V., Katsnelson, M. I., and Levitov, L. S. (2007b). Vacuum polarization and screening of supercritical impurities in graphene. *Physical Review Letters*, 99(23).
- [337] Skenderis, K. (2002). Lecture notes on holographic renormalization. *Class. Quant. Grav.*, 19:5849–5876.
- [338] Smotlacha, J. and Pinčák, R. (2016). Green function approach to the calculation of the local density of states in the graphitic nanocone. *EPJ Web of Conferences*, 108:02043.
- [339] Smotlacha, J., Pincak, R., and Pudlak, M. (2011). Electronic structure of disclinated graphene in a uniform magnetic field. *The European Physical Journal B*, 84(2):255–264.
- [340] Spivak, M. (1975). *A comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol.I. Publish or Perish.*
- [341] Stephani, H., Kramer, D., MacCallum, M. A. H., Hoenselaers, C., and Herlt, E. (2003). *Exact solutions of Einstein’s field equations.* Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge Univ. Press, Cambridge.

- [342] Susskind, L. (1995). The World as a hologram. *J. Math. Phys.*, 36:6377–6396.
- [343] Tang, Z.-Y., Ong, Y. C., Wang, B., and Papantonopoulos, E. (2019). General black hole solutions in (2+1)-dimensions with a scalar field nonminimally coupled to gravity. *Phys. Rev. D*, 100(2):024003.
- [Taylor] Taylor, E. F. Annotated bibliography on the principle of least action.
- [345] Terekhov, I. S., Milstein, A. I., Kotov, V. N., and Sushkov, O. P. (2008). Screening of coulomb impurities in graphene. *Phys. Rev. Lett.*, 100:076803.
- [346] Tipler, P. A. (1982). *Physics*. Worth Publishers, inc.
- [347] Toshmatov, B., Ahmedov, B., Abdujabbarov, A., and Stuchlik, Z. (2014). Rotating Regular Black Hole Solution. *Phys. Rev. D*, 89(10):104017.
- [348] Toshmatov, B., Stuchlík, Z., and Ahmedov, B. (2017). Generic rotating regular black holes in general relativity coupled to nonlinear electrodynamics. *Phys. Rev. D*, 95(8):084037.
- [349] Trova, A., Schroven, K., Hackmann, E., Karas, V., Kovar, J., and Slany, P. (2018). Equilibrium configurations of a charged fluid around a Kerr black hole. *Phys. Rev. D*, 97(10):104019.
- [350] Tsukamoto, N. (2018). Black hole shadow in an asymptotically-flat, stationary, and axisymmetric spacetime: The Kerr-Newman and rotating regular black holes. *Phys. Rev. D*, 97(6):064021.
- [351] Unver, O. and Gurtug, O. (2010). Quantum singularities in (2+1) dimensional matter coupled black hole spacetimes. *Phys. Rev. D*, 82:084016.
- [352] Utiyama, R. and DeWitt, B. S. (1962). Renormalization of a classical gravitational field interacting with quantized matter fields. *J. Math. Phys.*, 3:608–618.
- [353] Vázquez, J. A., Padilla, L. E., and Matos, T. (2020). Inflationary cosmology: from theory to observations. *Rev. Mex. Fis. E*, 17(1):73–91.
- [354] Visser, M. (1995). *Lorentzian wormholes: From Einstein to Hawking*.
- [355] Volkov, M. S. and Gal'tsov, D. V. (1999). Gravitating nonAbelian solitons and black holes with Yang-Mills fields. *Phys. Rept.*, 319:1–83.
- [356] Vollick, D. N. (2005). Born-Infeld-Einstein theory with matter. *Phys. Rev. D*, 72:084026.
- [357] Wald, R. M. (1984). *General Relativity*. Chicago Univ. Pr., Chicago, USA.
- [358] Wald, R. M. (1995). *Quantum Field Theory in Curved Space-Time and Black Hole Thermodynamics*. Chicago Lectures in Physics. University of Chicago Press, Chicago, IL.
- [359] Wang, H.-M., Xu, Y.-M., and Wei, S.-W. (2019). Shadows of Kerr-like black holes in a modified gravity theory. *JCAP*, 03:046.

- [360] Wang, S., Wu, S.-Q., Xie, F., and Dan, L. (2006). The First laws of thermodynamics of the (2+1)-dimensional BTZ black holes and Kerr-de Sitter spacetimes. Chin. Phys. Lett., 23:1096–1098.
- [361] Wei, Y.-H. (2009). Understanding first law of thermodynamics of black holes. Phys. Lett. B, 672:98–100.
- [362] Weinberg, S. (1972). Gravitation and Cosmology. Wiley.
- [363] Weyl, H. (1919). A New Extension of Relativity Theory. Annalen Phys., 59:101–133.
- [364] Weyl, H. (1993). Space, time, matter: Lectures on general relativity. (In German).
- [365] Wheeler, J. A. (1955). Geons. Phys. Rev., 97:511–536.
- [366] Will, C. M. (2014). The Confrontation between General Relativity and Experiment. Living Rev. Rel., 17:4.
- [367] Witten, E. (1988). (2+1)-Dimensional Gravity as an Exactly Soluble System. Nucl. Phys. B, 311:46.
- [368] Witten, E. (1998). Anti-de Sitter space and holography. Adv. Theor. Math. Phys., 2:253–291.
- [369] Woodard, R. P. (2007). Avoiding dark energy with $1/r$ modifications of gravity. Lect. Notes Phys., 720:403–433.
- [370] Woodard, R. P. (2015). Ostrogradsky’s theorem on Hamiltonian instability. Scholarpedia, 10(8):32243.
- [371] Wyman, M. (1981). Static Spherically Symmetric Scalar Fields in General Relativity. Phys. Rev. D, 24:839–841.
- [372] Yagi, K., Yunes, N., and Tanaka, T. (2012). Slowly Rotating Black Holes in Dynamical Chern-Simons Gravity: Deformation Quadratic in the Spin. Phys. Rev. D, 86:044037. [Erratum: Phys.Rev.D 89, 049902 (2014)].
- [373] Yavari, A. and Goriely, A. (2015). Non-metricity and the nonlinear mechanics of distributed point defects. In Chen, G.-Q. G., Grinfeld, M., and Knops, R. J., editors, Differential Geometry and Continuum Mechanics, pages 235–251, Cham. Springer International Publishing.
- [374] Yunes, N. and Pretorius, F. (2009). Dynamical Chern-Simons Modified Gravity. I. Spinning Black Holes in the Slow-Rotation Approximation. Phys. Rev. D, 79:084043.
- [375] Yunes, N., Yagi, K., and Pretorius, F. (2016). Theoretical Physics Implications of the Binary Black-Hole Mergers GW150914 and GW151226. Phys. Rev. D, 94(8):084002.
- [376] Zajaček, M. and Tursunov, A. (2019). Electric charge of black holes: Is it really always negligible?
- [377] Zhang, H., Liu, D.-J., and Li, X.-Z. (2014). Black holes and gravitational waves in three-dimensional $f(R)$ gravity. Phys. Rev. D, 90:124051.

-
- [378] Zhang, Y., Tan, Y.-W., Stormer, H. L., and Kim, P. (2005). Experimental observation of the quantum Hall effect and Berry's phase in graphene. *Nature*, 438:201–204.
- [379] Zumalacárregui, M. and García-Bellido, J. (2014). Transforming gravity: from derivative couplings to matter to second-order scalar-tensor theories beyond the Horndeski Lagrangian. *Phys. Rev. D*, 89:064046.

Apéndice A

Algunos cálculos destacables

Variación de la acción de Einstein-Hilbert

Partiendo de $S_{GR} = \frac{1}{2k^2} \int d^d x \sqrt{-g} R(g_{\mu\nu})$ y tomando variaciones respecto de la métrica tenemos:

$$\delta S_{GR} = \frac{1}{2k^2} \int d^d x \left((\delta \sqrt{-g}) R(g_{\mu\nu}) + \sqrt{-g} \delta(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) \right) \quad (\text{A.1})$$

Usando la relación:

$$\delta \sqrt{\text{Det}[A]} = \frac{1}{2} \sqrt{\text{Det}[A]} \text{Tr}[A^{-1} \delta A] \quad (\text{A.2})$$

Es inmediato escribir $\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta}$. Por otro lado, $\delta R_{\mu\nu}$ se puede expresar en términos de la variación de los símbolos de Christoffel usando la identidad de Palatini:

$$\delta R_{\rho\sigma} = \nabla_\lambda \delta \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda - \nabla_\sigma \delta \Gamma_{\rho\lambda}^\lambda \quad (\text{A.3})$$

Y un cálculo directo a partir de la definición de los símbolos de Christoffel en función de la métrica, (2.9) nos lleva a que su variación viene dada por:

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\nabla_\mu \delta g_{\sigma\nu} + \nabla_\nu \delta g_{\sigma\mu} - \nabla_\sigma \delta g_{\mu\nu}) \quad (\text{A.4})$$

Con lo que la contribución $g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}$ se resume en un término de superficie que no nos va a contribuir a las ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu}(\nabla_\lambda\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \nabla_\nu\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda) = \\
&= \nabla_\lambda(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda) - \nabla_\nu(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda) = \\
&= \nabla_\lambda(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - g^{\mu\lambda}\delta\Gamma_{\sigma\mu}^\sigma)
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Lo que implica:

$$\begin{aligned}
\delta S_{GR} &= \frac{1}{2k^2} \left(\int d^d x \sqrt{-g} (R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu}) \delta g^{\mu\nu} + \right. \\
&\quad \left. + \int d^d x \sqrt{-g} \nabla_\lambda (g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - g^{\mu\lambda} \delta\Gamma_{\sigma\mu}^\sigma) \right)
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Aunque el segundo sumando en (A.3) representa un término de superficie y no afecta a las ecuaciones de movimiento, sí tendrá un papel importante en el cálculo de las acciones “on shell” al generar un contratérmino (acción de Gibbons-Hawking-York [149]). De acuerdo al principio de acción estacionaria tendremos:

$$\begin{aligned}
0 = S_{GR} + \delta S_m &= \int d^d x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2k^2} (R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu}) - \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} + \\
&\quad + \int d^d x \sqrt{-g} \nabla_\lambda (g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - g^{\mu\lambda} \delta\Gamma_{\sigma\mu}^\sigma)
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Como el resultado debe ser idénticamente cero, tenemos que las ecuaciones de movimiento se deducen directamente del primer sumando, lo que nos lleva finalmente a la ecuación (2.18).

Separación de la conexión en espacios de Riemann-Cartan

Partiendo de :

$$\begin{aligned}
\Gamma \equiv \Gamma_{\mu\nu}^\lambda g_{\lambda\lambda} &= e_{a\lambda} \partial_\mu e_\nu^a = \\
&= \frac{1}{2} \{ e_{a\lambda} \partial_\mu e_\nu^a + \partial_\mu e_{a\lambda} e_\nu^a + e_{a\mu} \partial_\nu e_\lambda^a + \partial_\nu e_{a\mu} e_\lambda^a - e_{a\mu} \partial_\lambda e_\nu^a - \partial_\lambda e_{a\mu} e_\nu^a \} + \\
&\quad + \frac{1}{2} \{ e_{a\lambda} \partial_\mu e_\nu^a - e_{a\lambda} \partial_\nu e_\mu^a - e_{a\mu} \partial_\nu e_\lambda^a + e_{a\mu} \partial_\lambda e_\nu^a + e_{a\nu} \partial_\lambda e_\mu^a - e_{a\nu} \partial_\mu e_\lambda^a \}
\end{aligned} \tag{A.8}$$

La primera parte puede expresarse como:

$$\frac{1}{2} \left\{ \partial_\mu [e_\nu^a e_{a\lambda}] + \partial_\nu [e_\lambda^a e_{a\mu}] - \partial_\lambda [e_{a\mu} e_\nu^a] \right\} = C_{\mu\nu\lambda} \quad (\text{A.9})$$

Que coincide con la conexión de Levi-Civita mientras que la segunda parte corresponde al tensor de contorsión, definido en (3.14) como:

$$K_{\mu\nu\lambda} = S_{\mu\nu\lambda} - S_{\nu\lambda\mu} + S_{\lambda\mu\nu} \quad (\text{A.10})$$

Invariancia de escala y traza nula en el tensor energía

En esta sección vamos a ilustrar la relación existente entre invariancia de escala y traza nula del tensor energía-momento asociado ya indicada en el capítulo 4. Consideremos en primer lugar el electromagnetismo de Maxwell, descrito por la acción:

$$S_M \simeq -\frac{1}{4e^2} \int dx^4 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (\text{A.11})$$

Es fácil comprobar que su tensor energía-momento, dado por :

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{e^2} (F_{\mu\rho} F_\nu^\rho - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F^2) \quad (\text{A.12})$$

Es de traza nula:

$$\begin{aligned} T_\nu^\mu &= \eta^{\mu\sigma} T_{\sigma\nu} = \frac{1}{e^2} (F_\rho^\mu F_\nu^\rho - \frac{1}{4} \delta_\nu^\mu F^2) \\ T_\mu^\mu &= \frac{1}{e^2} (F_\rho^\mu F_\mu^\rho - F^2) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Consideremos ahora el caso más general en el que el electromagnetismo de Maxwell se sitúa en el “background” de un espacio-tiempo curvo:

$$S_M \simeq -\frac{1}{4e^2} \int dx^4 \sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} F_{\mu\rho} F_{\nu\sigma} \quad (\text{A.14})$$

Y consideremos una transformación de Weyl local de la forma (4.65). Tendremos entonces $-g \rightarrow -a^8(x)g$ y asimismo $g^{\rho\sigma} \rightarrow \frac{1}{a^2(x)}g^{\rho\sigma}$, luego la acción permanecerá invariante Weyl siempre que el propio potencial A^μ sea invariante Weyl (notemos que el potencial vector sigue una ley de transformación diferente a la que se tiene para transformaciones de escala que afectan a las propias variables espacio-temporales). Consideremos ahora el caso general en

el que en la teoría viene representado por cualquier lagrangiano de materia. Si representamos la transformación elemental de la métrica como:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = (\hat{I} + \varepsilon(x)) \quad (\text{A.15})$$

Con \hat{I} la matriz identidad. Tendremos entonces $\delta g_{\mu\nu} = \varepsilon(x)g_{\mu\nu}$, y usando $0 = \delta(g_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta})$ es inmediato encontrar que la inversa de la métrica va a transformarse como $\delta g^{\mu\nu} = -\varepsilon(x)g^{\mu\nu}$. Si una teoría es invariante Weyl local se tendrá entonces:

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \int d^4x \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} = - \int d^4x \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} \varepsilon(x) g^{\mu\nu} = \\ &= \int d^4x \frac{1}{2} \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \varepsilon(x) g^{\mu\nu} = \\ &= \int d^4x \frac{1}{2} \sqrt{-g} T_{\mu}^{\mu} \varepsilon(x) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Tenemos entonces que si una teoría (caracterizada por su correspondiente lagrangiano de materia) ha de ser invariante bajo transformaciones locales de Weyl su tensor energía-momento asociado debe ser de traza nula. En el caso de que el espacio-tiempo venga descrito por una métrica minkowskiana, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ como ocurre en el marco contextual de la correspondencia AdS/CFT para la teoría gauge del espacio frontera, entonces la invariancia Weyl se reduce a la invariancia conforme.

Variación general del tensor de Riemann

En (3.7) veíamos que bajo una transformación de Einstein de coordenadas la conexión no se transformaba como un tensor, ya que el último término de la transformación rompía la tensorialidad:

$$\begin{aligned} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(x) &= \Gamma'_{\mu\nu}{}^{\lambda}(x) - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(x) = \\ &= \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(x) \xi^{\lambda}(x) - \partial_{\lambda} \xi^{\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(x) + \\ &+ \partial_{\nu} \xi^{\lambda} \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}(x) + \partial_{\mu} \xi^{\lambda} \Gamma_{\lambda\nu}^{\lambda}(x) + \partial_{\mu} \partial_{\nu} \xi^{\lambda}(x) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Sin embargo si consideramos dos conexiones diferentes, calculamos la variación de cada una de ellas por separado bajo un cambio de coordenadas y luego las restamos, vemos que dicho término es común y por tanto la diferencia de dos conexiones sí se transforma tensorialmente. Esta diferencia entre dos conexiones es justamente la variación implicada en el principio de

acción estacionaria, por lo tanto en la aplicación de dicho principio sí podemos considerar que el objeto construido como diferencia entre dos conexiones infinitamente próximas se transforma como un tensor y la derivada covariante de esta diferencia se podrá escribir como:

$$\nabla_{\mu}(\delta\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha}) = \partial_{\mu}(\delta\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha}) + \Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha}\delta\Gamma_{\nu\beta}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}\delta\Gamma_{\sigma\beta}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\beta}^{\sigma}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\alpha} \quad (\text{A.18})$$

Aunque estemos usando la misma notación para los incrementos de la conexión, conceptualmente los incrementos $\delta\Gamma$ involucrados en (3.7) y (A.4) responden a objetos matemáticos completamente distintos: el primero nos dice como se transforma una conexión dada bajo un cambio de coordenadas espacio-temporales “à la Einstein”, y el segundo nos da la diferencia entre dos acciones posibles consideradas cuando se plantea un principio de acción estacionaria en la que la conexión es una variable dinámica.

Teniendo en cuenta (A.4) y la forma del tensor de Riemann introducida en el capítulo ??, un cálculo directo nos lleva a :

$$\delta R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} = \nabla_{\mu}\delta\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} - \nabla_{\nu}\delta\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} + 2S_{\mu\nu}^{\lambda}\delta\Gamma_{\lambda\beta}^{\alpha} \quad (\text{A.19})$$

Tensor energía momento del electromagnetismo de Maxwell y soluciones BTZ con carga

Consideremos la acción asociada al electromagnetismo de Maxwell:

$$S_M = -\frac{1}{4} \int d^d r \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (\text{A.20})$$

Calculemos explícitamente $T_{\mu\nu}$: usando (2.17) encontramos:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} (\delta\sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \sqrt{-g} \delta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \quad (\text{A.21})$$

Siendo $\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta}$ luego el primer término es inmediato:

$$\delta\sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (\text{A.22})$$

Calculemos el segundo término:

$$\delta(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = \delta(F_{\alpha\beta} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} F_{\mu\nu}) = F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} (g^{\alpha\mu} \delta g^{\beta\nu} + g^{\beta\nu} \delta g^{\alpha\mu}) \quad (\text{A.23})$$

En el primer sumando cambiemos los índices mudos $\mu \leftrightarrow \sigma$, $\beta \leftrightarrow \mu$ y en el segundo hagamos el cambio $\nu \leftrightarrow \rho$, $\alpha \leftrightarrow \nu$ con lo que nos queda:

$$\delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = \delta g^{\mu\nu}(g^{\alpha\sigma}F_{\alpha\mu}F_{\sigma\nu} + g^{\beta\rho}F_{\nu\beta}F_{\mu\rho}) = 2\delta g^{\mu\nu}F_{\mu\rho}F_{\nu}^{\rho} \quad (\text{A.24})$$

Y el tensor se escribe finalmente como:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + F_{\mu\rho}F_{\nu}^{\rho} \quad (\text{A.25})$$

Consideremos ahora el caso de las soluciones BTZ con carga eléctrica y veamos como deducir el elemento de línea usado en las referencias habituales [88]: para ello comencemos definiendo la acción total que vamos a usar:

$$S_T = \frac{1}{16\pi G} \left\{ \int d^3x \sqrt{-g}(R - 2\Lambda) - \int d^3x \sqrt{-g}(4\pi G)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \right\} \quad (\text{A.26})$$

La ecuación del campo electromagnético se escribe como [?]:

$$\nabla_{\mu}(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}) = \partial_{\mu}(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}) = 0 \quad (\text{A.27})$$

Supongamos un campo eléctrico estático y radial en el cual que el elemento de línea asociado se escribe como:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2d\theta^2 \quad (\text{A.28})$$

La única componente independiente del tensor $F^{\mu\nu}$ será :

$$F^{tr} = g^{tt}g^{rr}F_{tr} = -F_{tr} = F_{rt} = \partial_r A_0 \quad (\text{A.29})$$

Introduciendo el potencial vector como $A_{\mu} = \{A_0(r), 0, 0\}$, podemos escribir la ecuación (A.27) como:

$$\partial_r[rF^{rt}] = 0. \quad (\text{A.30})$$

Integrando tenemos $F_{rt} = \partial_r A_0 = -\frac{\tilde{Q}}{r}$, es decir:

$$A_0(r) = -\tilde{Q} \ln \frac{r}{r_0}, \quad (\text{A.31})$$

lo que implica:

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2F_{tr}F^{tr} = -2(F_{tr})^2 = -2\frac{\tilde{Q}^2}{r^2} \quad (\text{A.32})$$

Siendo \tilde{Q} una constante de integración asociada a la carga eléctrica. De aquí vemos que para el caso $d = 3$ y de acuerdo con (A.26) y (A.31) esta constante debe tener dimensiones $L^{-\frac{1}{2}}$. Consideremos ahora la ecuación de Einstein en presencia de constante cosmológica:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \left(\frac{R}{2} - \Lambda\right)g_{\mu\nu} = k^2 T_{\mu\nu} = \\ &= 8\pi G \left(-\frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + F_{\mu\rho}F_{\nu}^{\rho} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Y particularicemos para su componente $G_{\theta\theta}$. Para el elemento de línea (A.28) tenemos los resultados:

$$\begin{aligned} R_{\theta\theta} &= -r \frac{df(r)}{dr} \\ R &= -\frac{2}{r} \frac{df(r)}{dr} - \frac{d^2f(r)}{dr^2} \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Y usando (A.25) para la componente $T_{\theta\theta}$:

$$T_{\theta\theta} = -\frac{r^2}{4} \left(-2 \frac{\tilde{Q}^2}{r^2} \right) = \frac{\tilde{Q}^2}{2} \quad (\text{A.35})$$

Tendremos:

$$\begin{aligned} G_{\theta\theta} &= -r \frac{df(r)}{dr} - r^2 \left(-\frac{1}{r} \frac{df(r)}{dr} - \frac{1}{2} \frac{d^2f(r)}{dr^2} - \Lambda \right) \\ &= 4\pi G \tilde{Q}^2 \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

Es decir $r^2 \frac{d^2f(r)}{dr^2} = -2\Lambda r^2 + 8\pi G \tilde{Q}^2$. Una primera integración nos da el resultado $\frac{df(r)}{dr} = -2\Lambda r - 8\pi G \frac{\tilde{Q}^2}{r} + C$. Ahora bien, el caracter logarítmico del potencial implica divergencias en $r \rightarrow \infty$: la forma de manejarlas consiste en suponer el volumen encerrado en un esfera bidimensional de radio $r_0 \gg$ de tal forma que el potencial se anule en los límites del sistema y recuperemos la solución asintóticamente Anti-de-Sitter caracterizada por la masa en el infinito y la constante cosmológica Λ [257]. Teniendo en cuenta esto la función $f(r)$ se escribe como:

$$f(r) = -8G\tilde{M} + \frac{r^2}{L^2} - 8\pi G \tilde{Q}^2 \ln \frac{r}{r_0} \quad (\text{A.37})$$

Definiendo $\frac{Q^2}{2} \equiv 8\pi G\tilde{Q}^2$ como factor adimensional y redefiniendo el factor masa para que sea igualmente adimensional mediante $8G\tilde{M} \equiv M$ encontramos la expresión habitual, en la literatura BTZ.

